

## Referências bibliográficas

AIUBE, F.A.L.; TITO, E.A.H.; BAIDYA, T.K.N. Analysis of Commodity Prices with the Particle Filter. **Energy Economics**, v. 30, p. 598-605, 2008

AMRAM, M.; KULATILAKA, N. Real Options: Managing Strategic Investment in an Uncertain World. Boston: Harvard Business School Press, 1999.

ARCELORMITTAL Brasil. Rio Grande do Sul, 2005. Disponível em: <<http://www.arcelormittal.com/br/>>. Acesso em: 03 out. 2009

BAIDYA, T.K.N.; CASTRO, A.L. Convergência dos Modelos de Árvores Binomiais para Avaliação de Opções. **Pesquisa Operacional**, Rio de Janeiro, v. 21, n. 01, p. 17-30, 2001.

BASTIAN-PINTO, C.; BRANDÃO, L. Modelando Opções de Conversão com Movimentos de Reversão à Média. **Revista Brasileira de Finanças**, v. 5, p. 10-40, 2007

BASTIAN-PINTO, C.; BRANDÃO, L.E.T.; HAHN, W.J. A Binomial Model for Mean Reverting Stochastic Processes: Application to Ethanol Industry Expansion in annals: 14th Annual International Conference on Real Options at University of Luiss Guido Carli, Rome, Italy 17-20 June, 2010.

BASTIAN-PINTO, C. Real Options Modeling with Mean Reversion Processes in Discrete-Time: An Application in the Brazilian Ethanol Industry. Rio de Janeiro, PhD Dissertation, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, December, 2009.

BERGER, P.G.; OFEK, E.; SWARY, I. Investor Valuation of the Abandonment Option, **Journal of Financial Economics**, v. 42, p. 257-287, 1996.

BJERKSUND, P. & EKERN, S. Managing Investment Opportunities under Price Uncertainty: from Last Chance to Wait and See Strategies. **Financial Management**, nº 19 (3), Autumn 1990, pp. 65-83; 1990.

BLACK, F. and SCHOLES, M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities; **Journal of Political Economy**, 81 (May-June): 637-659, 1973.

BLANK, F.F.; BAYDIA, T.K.N.; DIAS, M.A. Private Infrastructure Investment Through Public Private Partnership: An Application to a Toll Road Highway Concession in Brazil, in annals: 13<sup>th</sup> Annual International Conference on Real Options at University of Minho, Portugal & University of Santiago de Compostela, Spain, 17-20 June, 2009.

BRANDÃO, L.E.; DYER, JAMES S.; HAHN, WARREN, J. Using Binomial Decision Trees to Solve Real-Option Valuation Problems. **Decision Analysis**, Estados Unidos, v. 2, n. 2, p. 69-88, 2005

BRANDÃO, L.E.; DYER, J.S. Decision Analysis and Real Options: A Discrete Time Approach to Real Option Valuation. **Annals of Operations Research**, Estados Unidos, v. 135, n. 1, p. 21-39, 2005.

BRANDÃO, L.E.; SARAIVA, E.C.G. Risco Privado em Infra-estrutura Pública: Uma análise quantitativa de risco como ferramenta de modelagem de contratos. **Revista de Administração Pública**, v. 41, n. 6, 2007

BREALEY, R.A.; MYERS, S.C. Principles of Corporate Finance. Mcgraw Hill; 6th edition, 2000.

BRENNAN, M.J.; SCHWARTZ, E.S. Evaluating Natural Resource Investments, **Journal of Business**, v. 58, n. 2, p. 135-57; 1985

BRENNAN, M.J.; SHWARTZ, E.S. A New Approach to Evaluating Natural Resource Investments. In: Stern, J. M., Chew, D. H. The Revolution in Corporate Finance. Cambridge: Blackwell, p. 78-88, 1990.

CALLISTER, W.D. JR. Ciência e engenharia de materiais: uma introdução. 5. ed. São Paulo: LTC, 2002. ISBN: 8521612885.

CASTRO, J.G.; BAIDYA, T.K.N.; AIUBE, F.A.L. Métodos de Apreçamento de Opções Americanas e Determinação da Curva de Gatilho Através da Simulação de Monte Carlo. **Pesquisa Operacional**, v. 28, p. 473-490, 2008.

CHIAVERINI, V. Aços e ferros fundidos. 4. ed. São Paulo: Associação Brasileira de Metais, 1977. ISBN: 8586778486.

COPELAND, T.; ANTIKAROV, V. Opções Reais: Um Novo Paradigma Para Reinventar a Avaliação de Investimentos. Rio de Janeiro: Campus Editora; 2001.

COX, J.; ROSS, S.; RUBINSTEIN, M. Option Pricing: A Simplified Approach, **Journal of Financial Economics**, v. 7, p. 229-264, October 1979.

CSN – Companhia Siderúrgica Nacional. São Paulo, 2006. Disponível em: <<http://www.csn.com.br>>. Acesso em: 03 out. 2009

DAMODARAN, ASWATH. Investment Valuation: Tools and Techniques for Determining the Value so Any Asset; USA, Wiley Frontiers in Finance, 1996.

DIAS, M.A.G. – Notas de Aula da Disciplina IND2272 – Análise de Investimentos com Opções Reais – do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da PUC-Rio, 2008

DIAS, M.A.G. Valuation of Exploration & Production Assets: An Overview of Real Options Models. **Journal of Petroleum Science & Engineering**, v. 44, n. 1-2, p. 93-114, 2004.

DIAS, M.A.G.; ROCHA, K.M.C. Petroleum Concessions with Extendible Options Using Mean Reversion with Jumps to Model Oil Prices. In: 3rd Annual International Conference on Real Options, 1999. 3rd Annual International Conference on Real Options, 1999. v. único.

DIAS, M.A.G.; ROCHA, K.M.C. Mean Reversion with Jumps, 1998.

DIAS, M.A.G.; TEIXEIRA, J.P.; ROCHA, K.M.C. The Optimal Investment Scale and Timing: A Real Option Approach to Oilfield Development. In: 8th Annual International Conference on Real Options, 2003, Montreal. 8<sup>th</sup> Annual International Conference on Real Options, 2004.

DIXIT, A.K. Entry and Exit Decisions Under Uncertainty. **Journal of Political Economy**, v. 97, n. 3, p. 105-115, 1989.

DIXIT, A.K. & PINDYCK, R.S. The Options Approach to Capital Investment, **Harvard Business Review**, May-June 1995, pp.105-115.

DIXIT, A.K. Choosing Among Alternative Discrete Investment Projects Under Uncertainty, **Economic Letters**, vol.41, 1993, pp.265-288.

DIXIT, A.K. Irreversible Investment and Competition Under Uncertainty; Capital, Investment and Development, Essays in Memory of S. Chakravarty, Baku et al Eds., Blackwell, 1993, pp. 56-74  
DIXIT, AVINASH K.; PINDYCK, ROBERT S. Investment Under Uncertainty. New Jersey; Princeton University Press, 1994.

DOCKENDORF, J.; PAXSON, D. The Value of Switching Outputs in a Fertilizer Plant in the US in annals: 13th Annual International Conference on Real Options at University of Minho, Portugal & University of Santiago de Compostela, Spain, 17-20 June, 2009.

DORNIER, F. and QUEREL, M. Caution to the wind, Energy Power Risk Management, **Weather Risk Special Report**, pp. 30-32, 2000.

GALERA, A.L.L. Desarrollo de un Modelo de Valoración de Concesiones de Autopistas basado en la Teoría de Opciones Relaes. Validación mediante el Análisis de Series Históricas de Datos de Concesiones en Servicio. Doctoral Thesis. E.T.S.I. Caminos Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Madrid, 2006.

GERDAU S.A. Rio Grande do Sul, 2008. Disponível em: <<http://www.gerdau.com>>. Acesso em: 03 out. 2009.

GIBSON, R.; SCHWARTZ, E. Stochastic Convenience Yield and The Pricing of Oil Contingent Claims. **Journal of Finance**, 45, 959-976, 1990.

GREENE, W. Econometric Analysis, 4<sup>th</sup> ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, 2000.

HAHN, W.J. A Discrete-Time Approach for Valuing Real Options with Underlying Mean-Reverting Stochastic Processes. PhD Dissertation, The University of Texas, Austin, May, 2005.

HAHN, W.J.; DYER, J.S. Discrete Time Modeling of Mean-Reverting Stochastic Processes for Real Option Valuation. **European Journal of Operational Research**, v. 183, n. 2, p.p. 534-548, Jan, 2008.

HUANG, CHI-FU; LITZENBERGER, R.H. Foundations for Financial Economics. New Jersey, Prentice Hall, 1988.

HULL, J.C. Options, Futures, and Other Derivatives Securities; Prentice Hall, 6th ed., Englewood Cliffs, NJ, 2006.

HULL, J.; WHITE, A. – a. Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I: Single-Factor Models. **The Journal of Derivatives**, v. 2, n. 1, p.p. 7 -16, Fall, 1994.

HULL, J.; WHITE, A. – b. Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II: Two-Factor Models. **The Journal of Derivatives**, v. 2, n. 2, p.p. 37-48, Winter, 1995.

INSTITUTO Aço Brasil. Rio de Janeiro, 2009. Disponível em: <<http://www.acobrasil.org.br>>. Acesso em: 03 out. 2009.

IRWIN, T. Public Money for Private Infrastructure. **World Bank Working Paper**, n.10, 2003.

KULATILAKA, N. The Value of Flexibility: The Case of a Dual-Fuel Industrial Steam Boiler, **Financial Management**, v. 22, n. 3, p. 259-270, Autumn 1993.

MAJD, S. and PINDYCK R.S. Time to Build, Option Value, and Investment Decisions, **Journal of Financial Economics**, 18, 7-27, 1987.

McDONALD, R.L.; SIEGEL, D.R. Investment and the Valuation of Firms When There is an Option to Shut Down, **International Economic Review**, v.26, n. 2, June, p.331-49; 1985.

MERTON, R.C. Theory of Rational Option Pricing, **Bell Journal of Economics and Management Sciences**, p. 141-183, Spring 1973

MERTON, R.C. Option Pricing When Underlying Stock Returns are Discontinuous [pdf]. **Journal of Financial Economics**, 3, Chapter 9 in Continuous-Time Finance, p. 125-144, January-February 1976.

MERTON, R.C. Influence of Mathematical Models in Finance on Practice: Past, Present, and Future-Financial Practice & Education, p.7-15, 1995. New Jersey; Princeton University Press; 1994.

NELSON, D.B.; RAMASWAMY, K. Simple Binomial Processes as Diffusion Approximations in Financial Models. **The Review of Financial Studies**, v. 3, n. 3, p.p. 393-430, 1990.

PADDOCK, J.L.; SIEGEL, D.R.; SMITH, J.L. Option Valuation of Claims on Real Assets. **The Case of Offshore Petroleum Leases**, v. 103, n. 3, p. 479-508, 1988.

PINDYCK, R.S. The Long Run Evolution of Energy Prices. **The Energy Journal**, v. 20, n. 2, p.p. 1 - 27, 1999.

Prospecto Definitivo de Distribuição Pública Primária de Ações Ordinárias e Ações Preferenciais de Emissão da Metalúrgica Gerdau S.A. Porto Alegre: Metalúrgica Gerdau S.A., 24 de Abril de 2008.

SCHWARTZ, E. The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications For Valuation And Hedging. **Journal of Finance**, 52, 923-973, 1997.

SCHWARTZ, E. Valuing Long-Term Commodity Assets. **Financial Management**, 27, 57-66, 1998.

SCHWARTZ, E.; SMITH, J. Short-Term Variations and Long-Term Dynamics in Commodity Prices. **Management Science**, 46, 893-911, 2000.

SMIT, H.T.J.; ANKUM, L.A. A Real Options and Game-Theoretic Approach to Corporate Investment Strategy Under Competition. **Financial Management**, v. 22, n. 3, p. 241-250, Autumn 1993.

SMITH JR., C.W. Applications of Option Pricing Analysis, **Handbook of Financial Economics**, J.L.Bicksler (editor), North-Holland, pp.79-121

SMITH, J.E.; NAU, R.F. Valuing Risky Projects: Option Pricing Theory and Decision Analysis. **Management Science**, v. 41, n. 5, p. 795-816, May 1995.

SMITH, K.W. & A.J. TRIANTIS; The Value of Options in Strategic Acquisitions; Real Options in Capital Investments: Models, Strategies, and Applications; Ed. by L. Trigeorgis, Praeger Publisher, Westport, Conn., 1995, pp.135-150.

SOARES, JOAQUIM PINTO. Aços características tratamentos. 5. Ed. Porto: Publindustria, 1992.

TRIGEORGIS, L. Real Options and Interactions With Financial Flexibility, **Financial Management**, v. 22, n. 3, p. 202-224, Autumn 1993.

TRIGEORGIS, L. Real Options: An Overview; Real Options in Capital Investments: Models, Strategies, and Applications; Ed. by L. Trigeorgis, Praeger Publisher, Westport, Conn., pp.1-28, 1995.

TRIGEORGIS, L. Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation. Cambridge, Massachusetts London, England; MIT Press 1996.

USIMINAS. Minas Gerais, 2009. Disponível em: <<http://www.usiminas.com>>. Acesso em: 03 out. 2009.

WILMOTT, P.; HOWISON, S.; DEWYNNE, J. The Mathematics of Financial Derivatives, A Student Introduction. New York, Cambridge University Press, 1995; 11th printing 2005.

WORLD Steel Association. Bruxelas - Bélgica, 2009. Disponível em: <<http://www.worldsteel.org>>. Acesso em: 03 out. 2009.

WORLD STEEL DYNAMICS INC. – Global Steel Export Pricing: Forecast to 2018, Julho 2008. AIUBE, F. A. L.; TITO, E. A. H. ; BAIDYA, T. K. N. Analysis of Commodity Prices with the Particle Filter. **Energy Economics**, v. 30, p. 598-605, 2008.

WORLD STEEL IN FIGURES 2009. Bruxelas - Bélgica: World Steel Association, 2009. Disponível em: <<http://www.worldsteel.org>>. Anual.

## APÊNDICE I

Desenvolvimento do Modelo Black & Scholes (1973):

O modelo de B&S baseia-se na montagem de um portfólio composto de uma ação ( $V$ ) e  $m$  opções ( $C$ ), com  $m$  escolhido de tal forma que o portfólio seja livre de risco:

$$\Pi = V + mC$$

Como o portfólio é livre de risco, o rendimento instantâneo será a taxa  $r$  de forma idêntica a um título de renda fixa sem risco de crédito:

$$d\Pi = r\Pi dt$$

Em razão disso encontra-se que o ativo-base ( $V$ ) varia no tempo regido pelo processo estocástico chamado Movimento Geométrico Browniano (*MGB*):

$$\frac{dV}{V} = \mu dt + \nu dz$$

A opção ( $C$ ) é uma função de  $V$  e do tempo ( $t$ ) e tem como parâmetros:  $r$ , a volatilidade de  $V$  ( $\nu$ ), o preço de exercício da opção ( $K$ ) e a data de exercício ( $T$ ).

$$C = f(V, t; r, \nu, K, T)$$

Aplicando o Lema de Itô é possível obter o diferencial estocástico do preço da opção:

$$dC = \frac{\partial f}{\partial V} dV + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial V^2} dV^2$$

Como  $\Pi = V + mC$  temos também que:

$$d\Pi = dV + m dC$$



Se igualadas as 2 expressões para  $d\Pi$ , substitui-se o resultado encontrado para  $dC$  pelo Lema de Itô e considera-se  $m = \partial f / \partial V$ . Dessa forma, é possível obter a equação diferencial parcial parabólica, conhecida como equação de Black & Scholes:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 V^2 \frac{\partial^2 C}{\partial V^2} + rV \frac{\partial C}{\partial V} - rC = 0$$

Consideradas as condições de contorno no vencimento  $C(V) = V - K$ , se  $V \geq K$  e  $C(V) = 0$ , se  $V < K$  e ainda que  $C = 0$  quando  $V = 0$ , B&S conseguiram por meio da substituição de variáveis converter a EDP na fórmula do calor, a qual possui solução padrão, e aplicado o Teorema de Fourier, obtiveram a seguinte fórmula fechada para precificação de opções européias de compra:

$$C(V, t) = VN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(V/K) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \quad d_2 = \frac{\ln(V/K) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

Onde:

$C$  é o valor da opção de compra europeia;

$V$  o preço da ação no tempo  $t$ ;

$r$  a taxa de juros sem risco;

$\sigma^2$  a variância do retorno do ativo;

$K$  o preço de exercício;

$T$  o dia de maturação;

$t$  a data atual

## APÊNDICE II

Desenvolvimento do Método Binomial de Cox, Ross & Rubinstein (1979):

O método binomial inicia-se com a suposição de que o prazo entre o momento atual ( $t=0$ ) e a data de exercício da opção ( $t=T$ ) possa ser subdividido em  $n$  períodos de tempo, de forma que o ativo subjacente em um primeiro período de tempo possa evoluir para apenas dois possíveis resultados: um tique para cima relativo ao estado da natureza “up” (com probabilidade  $p$  de ocorrência), ou um tique para baixo num estado da natureza “down” (com probabilidade  $1-p$ ). Essas probabilidades ( $p$  e  $1-p$ ) são probabilidades subjetivamente reais de ocorrência em cada um dos estados da natureza citados.

Será chamado de  $V$  o valor atual do ativo subjacente, então em  $t=1$  esse ativo poderá valer  $V_u$  (no estado “up”) ou  $V_d$  (no estado “down”), sendo  $u$  e  $d$  parâmetros que indicam a variação bruta do valor do ativo no primeiro período de tempo.

No instante 2, se for suposto que o ativo subjacente valha  $V_u$  em  $t=1$ , ele poderá progredir para  $V_u^2$  ou  $V_{ud}$ . Analogamente, se em  $t=1$  o ativo valer  $V_d$ , ele progredirá em  $t=2$  para  $V_{du}$  ou  $V_d^2$ , e assim sucessivamente.

A escolha de  $u$  igual a  $1/d$  é conveniente, pois além de gerar a recombinação dos ramos da árvore binomial, determinará, a medida que  $n$  tende a infinito, que a distribuição dos valores de  $V$  tenda para a distribuição log-normal, e não permitirá o surgimento de valores negativos para o ativo subjacente.

Será denominada agora de  $C$  o valor de determinada opção de compra européia em tempo  $t=0$ . Em  $t=1$  essa opção poderá valer  $C_u$  caso o ativo subjacente valha  $V_u$  ou  $C_d$  no caso do ativo subjacente valer  $V_d$ . Ressalte-se que o  $u$  e  $d$  respectivos a  $V_u$  e  $V_d$  referem-se aos parâmetros de variação bruta do ativo-base, enquanto o  $u$  e  $d$  nos casos de  $C_u$  e  $C_d$  são subscritos, que indicam os valores da opção nos dois estados distintos da natureza, determinados pela ocorrência de  $V_u$  e  $V_d$ , respectivamente.

Chamemos de  $\Pi$  o portfólio formado em  $t=0$ , por determinada unidade do ativo subjacente  $V$  e  $m$  unidades do ativo  $C$ . Onde  $m$  é escolhido de tal forma que em  $t=1$  os valores dos portfólios em cada um dos possíveis cenários sejam iguais. Logo em  $t=1$  teremos:

$$\Pi_u = Vu + mC_u \quad \text{o valor do portfólio caso ocorra o estado } up;$$

$$\Pi_d = Vd + mC_d \quad \text{o valor do portfólio caso ocorra o cenário } down;$$

$$\text{e ainda que } \Pi_u = Vu + mC_u = Vd + mC_d = \Pi_d.$$

Logo temos que (1):

$$m = -V(u - d) / (C_u - C_d)$$

Como o valor do portfólio em  $t=1$  ( $\Pi_1$ ) será igual em todos os estados da natureza (o que implica que o valor dele é determinado) teremos também que:

$$\Pi_1 = \Pi \times (1 + r)$$

Igualados  $\Pi_u$  a  $\Pi_1$  e efetuando álgebras necessárias, encontra-se a seguinte expressão (2) para  $C$ :

$$C = \frac{1}{1+r} (V(u - (1+r)/m) + C_u)$$

Substituído  $m$  (em 1) na expressão encontrada para  $C$  (em  $t=2$ ) e efetuadas as operações algébricas necessárias encontra-se a expressão (3):

$$C = \frac{1}{1+r} (C_u p^* + C_d (1 - p^*))$$

$$C = \frac{E^*[C_1]}{1+r}$$

Onde:

$$p^* = \frac{1+r-d}{u-d}$$

O  $p^*$  encontrado é justamente o que se chamou há pouco de probabilidade neutra ao risco. É possível verificar que essa probabilidade nos permite o cálculo das opções com o uso de taxas livres de risco para desconto no valor presente.

Observe a diferença com o método que utiliza taxas ajustadas ao risco:

$$C = \frac{E[C_1]}{1+\mu_c};$$

$$C = \frac{1}{1+\mu_c} (C_u p + C_d (1 - p)).$$

Onde  $p$  é a probabilidade real  $\mu_c$  a taxa ajustada ao risco da opção.

Utilizados os valores de  $C_u$ ,  $C_d$  e  $C_{ud}$  é possível obter o valor de  $C_u$  e  $C_d$  se utilizado o mesmo procedimento aplicado ao cálculo de  $C$ . Substituídos os valores de  $C_u$  e  $C_d$  na expressão 3 obtém-se o seguinte valor para  $C$ :

$$C = \frac{1}{(1+r)^2} (C_u p^{*2} + 2C_{ud}(1-p^*)p^* + C_d(1-p^*)^2)$$

Repetido o procedimento para os períodos posteriores, obtém-se a seguinte expressão (4) para  $n$  períodos:

$$C = \frac{1}{(1+r)^n} \left[ \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} p^{*i} (1-p^*)^{n-i} C_u^i d^{n-i} \right]$$

Na expressão acima temos que  $C_u^i d^{n-i}$  com  $i$  variando de 0 a  $n$  consiste do conjunto de valores da opção de compra, contingentes aos  $n+1$  possíveis estados da natureza na data de exercício, determinados pela função:

$$C_u^i d^{n-i} = \text{Max}[Vu^i d^{n-i} - k, 0]$$

Onde:

$K$  é valor de exercício da opção (strike price)

Essa última expressão prescreve que na data de exercício ( $T$ ) se o valor do ativo-base ( $V(T)$ ) for inferior ao *strike price* ( $K$ ), a opção não será exercida e o valor será 0.

Se supusermos a existência de  $A$  pertencente aos naturais, tal que:

$$Vu^A d^{n-A} \geq k > Vu^{A-1} d^{n-(A-1)}$$

É possível, então, reescrever a expressão 4 como:

$$C = \frac{1}{(1+r)^n} \left[ \sum_{i=0}^{A-1} \frac{n!}{i!(n-i)!} p^{*i} (1-p^*)^{n-i} C_u^i d^{n-i} \right] + \frac{1}{(1+r)^n} \left[ \sum_{i=A}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} p^{*i} (1-p^*)^{n-i} C_u^i d^{n-i} \right]$$

Considerando que a opção não será exercida quando:

$$Vu^{A-1} d^{n-(A-1)} < k$$

Pode-se reduzir a expressão anterior ao eliminar o conteúdo da primeira parcela da soma. Assim, chega-se a expressão 5:

$$C = \frac{1}{(1+r)^n} \left[ \sum_{i=A}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} p^{*i} (1-p^*)^{n-i} C_u^i d^{n-i} \right]$$

Substitua, agora, em 5  $C_u^i d^{n-i}$  por  $Vu^i d^{n-i} - k$ , já que somente restaram os estados da natureza onde a opção será exercida, com o que se obtém:

$$C = \frac{1}{(1+r)^n} \left[ \sum_{i=A}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} p^{*i} (1-p^*)^{n-i} (Vu^i d^{n-i} - k) \right]$$

Após algumas manipulações algébricas chega-se à seguinte expressão:

$$C = V \left[ \sum_{i=A}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} \left( \frac{p^* \times u}{1+r} \right)^i \left( \frac{(1-p^*) \times d}{1+r} \right)^{n-i} \right] - \frac{k}{(1+r)^n} \left[ \sum_{i=A}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} p^{*i} (1-p^*)^{n-i} \right]$$

Os termos entre colchetes consistem de distribuições binomiais, o que permite chegar à expressão final de Cox, Ross & Rubinstein:

$$C = VB_1(A; n, p^{\sim}) - \frac{k}{(1+r)^n} B_2(A; n, p^*)$$

Onde:

$$B_1(A; n, p^{\sim}) = \left[ \sum_{i=A}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} p^{\sim i} (1-p^{\sim})^{n-i} \right];$$

$$p^{\sim} = \left( \frac{p^* u}{1+r} \right);$$

$$(1-p^{\sim}) = \left( \frac{(1-p^*) d}{1+r} \right);$$

$$B_2(A; n, p^*) = \left[ \sum_{i=A}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} p^{*i} (1-p^*)^{n-i} \right].$$

Prova-se, que com a escolha adequada dos parâmetros  $u$  e  $d$  que as distribuições binomiais  $B_1$  e  $B_2$  convergem para distribuições normais acumuladas  $N(d_1)$  e  $N(d_2)$  de B&S quando  $n$  (número de períodos discretos) tende ao infinito, à medida que as partições do tempo até  $T$  tornam-se cada vez menores. Isso implica que à medida que o tempo decorre de discreto para contínuo, quando os intervalos de tempo tornam-se cada vez menores, os resultados obtidos pelo modelo de Cox, Ross & Rubinstein e B&S perpetram-se coincidentes.

Em termos práticos a aplicação do Método Binomial pode ser resumida em 5 etapas:

1ª Etapa – Cálculo da volatilidade do ativo subjacente: a volatilidade do ativo subjacente consiste do desvio padrão do retorno do ativo, podendo ser obtida através de retornos históricos. É comum no caso de ações o uso de volatilidades implícitas das opções mais negociadas do ativo subjacente em questão. A

volatilidade implícita consiste da volatilidade que, aplicada em modelo de precificação teórico de opções – Black & Scholes, por exemplo – determina que o prêmio calculado coincida com o valor do prêmio negociado no mercado.

2ª Etapa – Construção da árvore do ativo subjacente: a partir do valor atual do ativo subjacente e da estimativa da volatilidade obtida na etapa anterior é possível simular o comportamento futuro do valor do ativo pela construção de uma árvore binomial. Será necessário definir o número passos da árvore e sequencialmente o valor dos parâmetros de variação bruta do valor do ativo:  $u$  e  $d$ . No caso da suposição que o ativo segue um Movimento Geométrico Browniano (MGB), esses parâmetro podem ser obtidos pelas fórmulas:

$$u = \exp[\sigma(\Delta t)^{1/2}]$$

$$d = \frac{1}{u}$$

Onde:

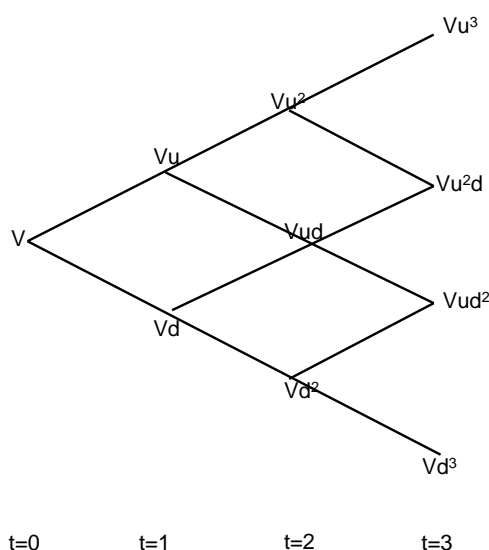
$u$  - é a variação bruta por período de tempo do valor ativo para o caso de subida;

$d$  - é a variação bruta por período de tempo do valor ativo para o caso de queda;

$\sigma$  - é a volatilidade anual do ativo subjacente;

$\Delta t$  - é percentual do tempo em anos do período referente ao tamanho passo definido para montagem árvore binomial.

A figura abaixo apresenta o esquema de uma árvore binomial de 3 períodos de tempo:



3ª Etapa – Cálculo das probabilidades neutras ao risco: de posse do valor da taxa livre de risco ( $r$ ) e dos parâmetros  $u$  e  $d$  é possível calcular as probabilidades neutras ao risco -  $p^*$  referente ao estado da natureza “up” e  $(1 - p^*)$  referente a “down”, - aonde  $p^*$  é dado pela fórmula:

$$p^* = \frac{1 + r - d}{u - d}$$

4ª Etapa – Verificação dos payoffs da opção na data de maturação (fim do prazo de exercício da opção): em  $t=T$ , onde  $T$  consiste do prazo terminal para exercício para opção avaliaremos qual será o payoff obtido em cada estado da natureza, o que poderá ser efetuado no caso de opções de compra (call (C)), pela fórmula:

$$C_u^i d^{n-i} = \text{Max}[Vu^i d^{n-i} - k, 0]$$

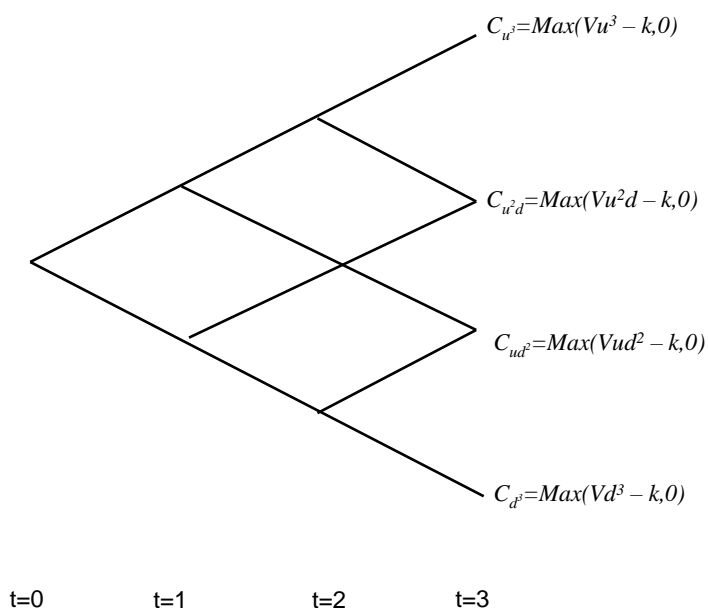
Onde:

$k$  - é o valor de exercício (*strike price*) da opção;

$i$  - é o número de vezes que o ativo base efetuou um movimento “up” entre  $t=0$  e  $T$ ;

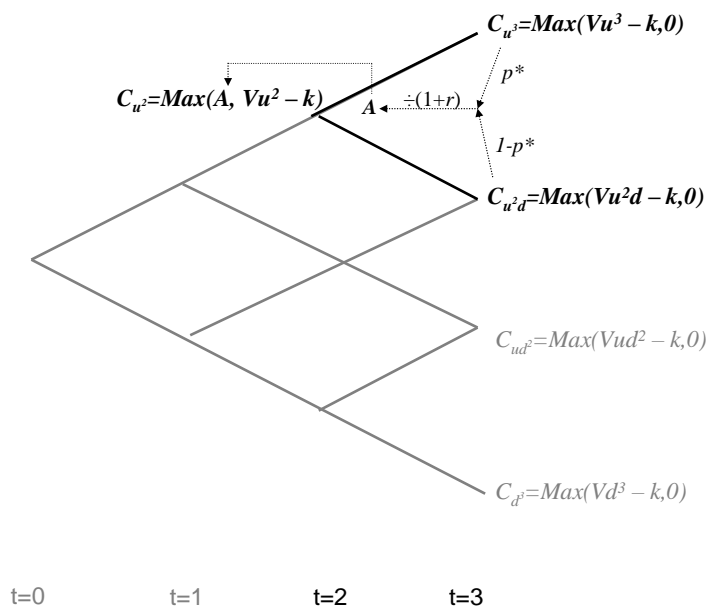
$n$  - é o número total de passos entre  $t=0$  e  $T$ .

A figura abaixo apresenta o esquema para verificação dos payoffs da opção na data de maturação:



5ª Etapa – Cálculo do valor da opção utilizando o método de indução retroativa: de posse dos payoffs da opção em T, é possível pela utilização do método de indução retroativa avaliar o valor da opção em cada “nó” da árvore até a obtenção do valor da opção em  $t=0$ .

O esquema abaixo ilustra o procedimento para obtenção do valor de  $C_u^2$ , partindo dos valores obtidos para:  $r$ ,  $C_u^3$ ,  $C_u^2d$ ,  $p^*$  e  $(1-p^*)$ .



Onde:

$$A = \frac{E^*[C_3 | Vu^2]}{1+r} = \frac{[p^* C_u^3 + (1-p^*) C_u^2d]}{1+r}$$



## APÊNDICE III

Desenvolvimento do Método Binomial para MRM apresentado por Bastian-Pinto, Brandão e Hall (2010):

Bastian-Pinto & Brandão (2010) apresentaram uma modelagem de reversão à média por árvore recombinante censurada de duas variáveis incertas correlacionadas. O modelo proposto pelos autores segue os passos da metodologia definida por Nelson & Ramaswamy (1990), que generaliza o método binomial permitindo que a evolução dos preços do ativo subjacente e as probabilidades correspondentes sejam estimadas a partir da equação diferencial do processo de preços.

Método de Nelson & Ramaswamy (1990):

Considerando o processo estocástico definida pela equação:

$$dx = \mu(x, t)dt + \sigma(x, t)dz$$

Os movimentos de subida e descida -  $x_t^+$  e  $x_t^-$ , respectivamente - serão dados pelas equações:

$$x_t^+ \equiv x + \sqrt{\Delta t} \sigma(x, t);$$

$$x_t^- \equiv x - \sqrt{\Delta t} \sigma(x, t)$$

Tem-se ainda que as probabilidades de ocorrência dos cenários de subida e descida serão determinadas respectivamente por  $q_t$  e  $(1 - q_t)$ , sendo:

$$q_t \equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta t} \frac{\mu(x, t)}{\sigma(x, t)}$$

Considerando um MRM definido por um processo de Ornstein-Uhlenbeck:

$$dx = \eta(\bar{x} - x_t)dt + \sigma dz$$

Os movimentos de subida e descida e as respectivas probabilidades de ocorrência são determinados pelas equações:

$$x_t^+ \equiv x + \sqrt{\Delta t} \sigma;$$

$$x_t^- \equiv x - \sqrt{\Delta t} \sigma;$$

$$q_t \equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta t} \frac{\eta(\bar{x} - x_t)}{\sigma};$$

$$(1 - q_t)$$

Considerando que o valor das probabilidades deverão estar sempre em um intervalo fechado entre 0 e 1, será necessário limitar (censurar) os valores de  $q_t$  e  $(1 - q_t)$ , o que pode ser efetuado pelas equações:

$$q_t = \max \left( 0, \min \left( 1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta t} \frac{\eta(\bar{x} - x_t)}{\sigma} \right) \right);$$

$$\Delta x_t^+ = \sqrt{\Delta t} \sigma \quad \text{e} \quad \Delta x_t^- = -\sqrt{\Delta t} \sigma$$

Considerando  $x_t = \log(S_t)$ , onde  $S_t$  consiste de um processo de preços obtem-se:

$$\Delta S_t^+ = \exp(\sqrt{\Delta t} \sigma) \quad \text{e} \quad \Delta S_t^- = \exp(-\sqrt{\Delta t} \sigma)$$

Como provado por Hahn (2005), a medida que o número de passos é aumentado, esse modelo converge de forma fraca para um Movimento de Reversão à Média. De forma distinta ao Método de Cox, Ross & Rubinstein (1979), onde as probabilidades eram constantes em todos os períodos de tempo e estados da natureza, nesse modelo para cada novo “nó” da árvore será gerado um novo conjunto de probabilidades de subida e descida em função da dependência de  $q_t$  a  $x_t$ .

Para obtenção da medida equivalente Martingal (probabilidades neutras ao risco:  $q_t^*$  e  $(1 - q_t^*)$ ) será necessária a dedução do prêmio de risco da média de longo prazo do processo ( $\bar{x}$ ) no cálculo das probabilidades  $q_t$  e  $(1 - q_t)$ , como demonstrado na equação abaixo:

$$q_t^* = \max \left( 0, \min \left( 1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta t} \frac{\eta(\bar{x}^* - x_t)}{\sigma} \right) \right)$$

Onde:

$q_t^*$  é a probabilidade de ocorrência de subida na medida equivalente

$\bar{x}^* = \bar{x} - \frac{\pi}{\eta}$  martingal;

$\bar{x}^*$  é a media de longo prazo do processo “penalizada”;

$\pi$  é o prêmio pelo risco associado ao processo  $x_t$ .

## APÊNDICE IV

Simulação de Monte Carlo: Discretização de Fórmulas do MGB e MRM para Aplicação em Opções Reais:

Na sequência será apresentado sucintamente um conjunto de equações visando demonstrar os passos para discretização e posterior simulação neutra ao risco dos processos de preços para análise de opções.

Seja  $F$  uma opção escrita sobre o ativo  $S$ , cujo preço desse último seja a única fonte de incerteza. Temos então que:

$$F(S_t, t) = e^{-r(T-t)} E_t^*[F(S_T, T)]$$

Onde:

$F(S_t, t)$  é o valor da opção na data  $t$ ;

$T$  é a data de expiração da opção;

$E_t^*[\cdot]$  é o valor esperado sob a medida equivalente martingal em função das informações disponíveis em  $t$ ;

$F(S_T, T) = \text{Max}[S_T - K, 0]$  para o caso de uma opção européia de compra ou  $F(S_T, T) = \text{Max}[K - S_T, 0]$  para o caso de uma opção européia de venda.

A simulação neutra ao risco do processo de preços  $S$  utilizando o método de Monte Carlo permite simular em  $T$ , prazo de expiração de  $F$ ,  $n$  possíveis valores de  $F(S_T, T)$ , o que determina que:

$$F(S_t, t) = e^{-r(T-t)} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(S_{T,i}, T)$$

Caso  $S$  siga um MGB, temos que:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz$$

Onde:

$\mu$  é o parâmetro de tendência do processo real;

$\sigma$  é o parâmetro de volatilidade do processo;

$dz$  é um processo de Wiener;

$dt$  é uma variação infinitesimal de tempo.

No caso do MGB neutro ao risco temos:

$$\frac{dS}{S} = (r - \delta)dt + \sigma dz^*$$

ou

$$\frac{dS}{S} = (\mu - \pi)dt + \sigma dz^*$$

Onde:

$r$  é a taxa livre de risco da economia;

$\delta$  é o dividend yield;

$\pi$  é o prêmio de risco do processo de preços;

$dz^*$  é um processo de Wiener adaptado a medida equivalente martingal.

Aplicando o Lema de Ito é possível obter a formulação para o logaritmo natural de  $S$  que resulta em um MAB:

$$d \ln(S) = (\mu - \pi - \frac{1}{2} \sigma^2)dt + \sigma dz^*$$

A discretização do processo é dada por:

$$\Delta \ln(S) = (\mu - \pi - \frac{1}{2} \sigma^2)\Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

Partindo do valor de  $S_0$  é possível simular, através da SMC, a evolução do valor de  $S$  nos posteriores períodos de tempo até  $T$  pela amostragem de  $N(0,1)$  na equação abaixo, gerando em  $T$  uma distribuição Log-Normal de  $S_T$ :

$$S_t = S_{t-1} \exp \left[ (\mu - \pi - \frac{1}{2} \sigma^2)\Delta t + \sigma N(0,1)\sqrt{\Delta t} \right]$$

No caso do logaritmo de  $S$  seguir um processo Aritmético de Reversão à Média de Ornstein-Uhlenbeck, tem-se que:

$$d \ln(S) = \eta(\overline{\ln S} - \ln S)dt + \sigma dz$$

Onde:

$\overline{\ln S}$  é a média de longo prazo do logaritmo dos preços;

$\eta$  é o parâmetro da velocidade de reversão do logaritmo dos preços;

$\sigma$  é o parâmetro de volatilidade do processo;

$dz$  é um processo de Wiener;

$dt$  é uma variação infinitesimal de tempo.

De forma similar ao MGB a discretização do processo e conseguinte simulação neutra ao risco pela SMC será dada por:

$$\ln S_t = \ln S_{t-1} e^{-\eta \Delta t} + \left( \overline{\ln S} - \frac{\pi}{\eta} \right) (1 - e^{-\eta \Delta t}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta \Delta t}}{2\eta}} N(0,1)$$

Onde:

$\pi$  é o prêmio de risco do processo do logaritmo de preços.

De posse dos valores simulados para o logaritmo de  $S$  seguindo um MRA será possível simular as trajetórias de  $S$  tomando:

$$E[\ln S_t] = \overline{\ln S} - (\ln S_0 - \overline{\ln S}) e^{-\eta(t-t_0)}$$

$$Var[\ln S_t] = \frac{\sigma^2}{2\eta} (1 - e^{-2\eta(t-t_0)})$$

$$E(S_t) = \exp(E[\ln S_t] + \frac{1}{2} Var[\ln S_t])$$

Uma alternativa ao método descrito para simulação de preços cujo logaritmo supõe-se seguir um processo de Ornstein-Uhlenbeck é proposta por Dias (1999). Neste caso a simulação deverá ser efetuada em 2 etapas, sendo a primeira a simulação de  $x_t$  que consiste do  $\ln(S_t)$  acrescido de metade da variância do processo, para posterior obtenção dos valores simulados de  $S_t$ , conforme demonstrado nas equações abaixo:

$$x_t = x_{t-1} e^{-\eta \Delta t} + \ln(\overline{S}) (1 - e^{-\eta \Delta t}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta \Delta t}}{2\eta}} N(0,1)$$

$$S_t = \exp \left\{ x_t - (1 - e^{-2\eta t}) \frac{\sigma^2}{4\eta} \right\}$$

Onde:

$$x_t = \ln(S_t) + (1 - e^{-2\eta t}) \frac{\sigma^2}{4\eta};$$

$\ln(\overline{S})$  é o logaritmo da média de longo prazo dos preços;

$\eta$  é o parâmetro da velocidade de reversão de  $x_t$ ;

$\sigma$  é o parâmetro de volatilidade do processo.

Os parâmetros do modelo podem ser obtidos partindo da regressão linear:

$$\ln(S_t) - \ln(S_{t-1}) = a + b \ln(S_{t-1}) + \varepsilon_t$$

A partir dos valores obtidos para  $a$ ,  $b$  e para o erro padrão da regressão ( $\sigma_\varepsilon$ ) é possível estimar os parâmetros do modelo pelas equações:

$$\eta = -\frac{\ln(1+b)}{\Delta t}$$

$$\bar{S} = \exp\left[\frac{a}{(1-b)} + \frac{\sigma^2}{4\eta}\right]$$

$$\sigma = \sigma_\varepsilon \sqrt{\frac{2\ln(1+b)}{((1+b)^2 - 1)\Delta t}}$$

Para simulação do processo neutro ao risco de  $x_t$  é necessário apenas a subtração do prêmio de risco ( $\pi$ ) normalizado pelo parâmetro de reversão, conforme demonstrado na equação abaixo:

$$x_t = x_{t-1} e^{-\eta\Delta t} + \left(\ln(\bar{S}) - \frac{\pi}{\eta}\right)(1 - e^{-\eta\Delta t}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta\Delta t}}{2\eta}} N(0,1)$$

Cabe ainda a consideração de que em muitos casos práticos, nos quais se trabalha com mais de uma fonte de incerteza, é necessária a avaliação se os processos estocásticos em questão possuem algum grau de dependência linear. Um caso típico ocorre quando estão sendo modeladas opções de troca de produtos ou insumos cujos preços supõe-se que sigam processos como MGB ou MRM (cuja as variações apresentam distribuições normais) os quais seriam correlacionados. Nestes casos é possível obter a simulação conjunta dos processos através da decomposição de Cholesky.

Sendo  $A$  e  $B$  duas variáveis aleatórias ambas seguindo distribuições normais correlacionadas ( $Z_A$  e  $Z_B$ ) é possível simular os valores de  $Z_B$  a partir da equação:

$$Z_B = \rho Z_A + (1 - \rho^2)^{0.5} Z_w$$

Onde:  $Z_w$  e  $Z_A$  são distribuições normais padrão independentes.

## APÊNDICE V

Desenvolvimento do Modelos de Schwartz (1997) e do Modelo Espaço-Estado Linear:

Modelo de 1 Fator Estocástico de Schwartz (97) – O modelo consiste de um MRG que usa como termo para reversão à média o logaritmo do preço no interior dos parentes:

$$dS = \kappa S(\mu - \ln S)dt + \sigma S dz$$

Usando o lema de Itô podemos encontrar  $dX$ , sendo  $X = \ln S$ :

$$dX = \kappa(\alpha - X)dt + \sigma dz$$

Sendo:

$$\alpha = \mu - \sigma^2/2\kappa;$$

$\kappa > 0$  é o parâmetro de reversão à média;

$\alpha$  é a média de longo prazo do log do preço;

$dz$  é um incremento de Wiener.

Considerando que  $dX$  constituísse num MRA de Ornestein-Uhlenbeck é possível a obtenção de um processo neutro ao risco com a subtração do prêmio do risco de mercado, que foi assumido constante, e ainda pelo ajuste no processo de Wiener utilizando o Teorema de Girsanov, determinando o seguinte processo:

$$dX = \kappa (\alpha^* - X) dt + \sigma dz^*$$

Onde:

$$\alpha^* = \alpha - \lambda,$$

$\lambda$  é o preço do risco de mercado,

$dz^*$  um incremento de Wiener sob a medida equivalente martingal.

Considerando que por ser  $X$  um MRA e por esse possuir distribuição normal, a média e variância de  $X$  para o tempo  $t=T$  calculada em  $t=0$ , pode ser determinada pelas equações:

$$E_0[X(T)] = e^{-\kappa T} X(0) + (1 - e^{-\kappa T})\alpha^*$$

$$\text{Var}_0[X(T)] = \sigma^2/2\kappa (1 - e^{-2\kappa T})$$

Sob a medida equivalente martingal podemos considerar que o preço spot  $S$  no tempo  $T$  terá distribuição lognormal com os mesmos parâmetros encontrados para  $X$ , o que nos permitirá obter as seguintes fórmulas para contratos futuros (ou à termo) de  $S$ :

$$F(S,T) = E(S,T) = \exp(E_0[X(T)] + \frac{1}{2} \text{Var}_0 [X(T)])$$

$$F(S,T) = \exp[ e^{-\kappa T} \ln S + (1-e^{-\kappa T})\alpha^* + \sigma^2/4\kappa (1-e^{-2\kappa T}) ]$$

ou na forma de Log:

$$\ln F(S,T) = e^{-\kappa T} \ln S + (1-e^{-\kappa T})\alpha^* + \sigma^2/4\kappa (1-e^{-2\kappa T})$$

Esta última equação é utilizada no artigo para nos testes empíricos do modelo. Adicionalmente, Schwartz comenta que considerando a condição de contorno  $F(S,0)=S$ , as fórmulas obtidas para os preços futuros de  $S$ , também poderiam ser conseguidas através da equação diferencial parcial:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 F_{SS} + \kappa (\mu - \lambda - \ln S) S F_S - F_T = 0$$

Modelo de 2 Fatores de Schwartz (1997) – Neste modelo se verifica a presença de 2 fatores estocásticos correlacionados: o preço spot da commodity ( $S$ ) seguindo um MGB e o convenience yield ( $\delta$ ) seguindo um MRA. As equações apresentadas a seguir apresentam os processos e descrevem seu relacionamento:

$$dS = (\mu - \delta) S dt + \sigma_1 S dz_1$$

$$d\delta = \kappa(\alpha - \delta) dt + \sigma_2 dz_2$$

$$dz_1, dz_2 = \rho dt$$

Sendo:

$\mu$  é o parâmetro de crescimento dos preços da commodity;

$\sigma_1$  é o parâmetro da volatilidade do processo de preços da commodity;

$dz_1$  é o incremento de Wiener do processo de preços da commodity;

$\kappa > 0$ , parâmetro de reversão para à média do convenience yield estocástico;

$\alpha$  a média de longo prazo do log convenience yield estocástico;

$\sigma_2$  é o parâmetro da volatilidade do processo do convenience yield;

$dz_2$  é o incremento de Wiener do processo de preços do convenience yield;

$\rho$  é o parâmetro da correlação entre os incrementos dos 2 fatores.

De forma similar ao efetuado no Modelo de 1 Fator, definindo  $X = \ln S$  e aplicando o Lema de Itô, o processo para o log do preço pode ser escrito como:

$$dX = (\mu - \delta - \frac{1}{2} \sigma_{12}) dt + \sigma_1 dz_1$$



Os processos estocásticos para os fatores sob a medida equivalente martingal pode ser expresso por:

$$dS = (r - \delta)Sdt + \sigma_1 S dz_1^*$$

$$d\delta = [\kappa(\alpha - \delta) - \lambda]dt + \sigma_2 dz_2^*$$

$$dz_1^* \cdot dz_2^* = \rho dt$$

onde:  $\lambda$  é o preço de mercado do risco convenience yield, o qual será assumido constante.

Utilizando o método de Contingent Claims é obtida a seguinte EDP:

$$\frac{1}{2} \sigma_1^2 S^2 F_{SS} + \sigma_1 \sigma_2 \rho S F_{S\delta} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 F_{\delta\delta} + (r - \delta) S F_S + [\kappa(\alpha - \delta) - \lambda] F_\delta - F_T = 0$$

Partindo dessa EDP e considerando a condição de contorno terminal  $F(S, \delta, 0) = S$ , Schwartz utiliza a metodologia demonstrada nos trabalhos de Jamshidian e Fein (1990) e Bjerk Sund (1991), para obtenção de uma fórmula fechada para os preços futuros (ou à termo) de  $S$ , que contempla a existência de convenience yield estocásticos:

$$F(S, \delta, T) = S \exp[-\delta(1 - e^{-\kappa T})/\kappa + A(T)]$$

Na construção dos testes empíricos do Modelo de 2 Fatores foi utilizada a forma de log dos preços futuros:

$$\ln F(S, \delta, T) = \ln S - \delta(1 - e^{-\kappa T})/\kappa + A(T)$$

Onde:

$$A(T) = (r - \alpha^* + \frac{1}{2} \sigma_2^2 / \kappa^2 - \sigma_1 \sigma_2 \rho / \kappa) T + \frac{1}{4} \sigma_2^2 (1 - e^{-2\kappa T}) / \kappa^3 + (\alpha^* \kappa + \sigma_1 \sigma_2 \rho - \sigma_2^2 / \kappa) (1 - e^{-\kappa T}) / \kappa^2$$

$$\text{Sendo: } \alpha^* = \alpha - \lambda / \kappa$$

Modelo de 3 Fatores de Schwartz (1997) – Nesse modelo Schwartz contempla a presença de 3 fatores estocásticos correlacionados, sendo 2 os mesmos apresentados no Modelo de 2 Fatores e o 3º a taxa de juros estocástica, seguindo também um MRA:

$$dS = (r - \delta)Sdt + \sigma_1 S dz_1^*$$

$$d\delta = \kappa(\alpha^* - \delta)dt + \sigma_2 dz_2^*$$

$$dr = a(m^* - r)dt + \sigma_3 dz_3^*$$

Sendo:

$$dz_1^* \cdot dz_2^* = \rho_1 dt; dz_1^* \cdot dz_3^* = \rho_2 dt; dz_2^* \cdot dz_3^* = \rho_3 dt$$

Onde:

$a$  é o coeficiente de ajuste da velocidade de reversão;

$m^*$  é a média da taxa de juros de curto prazo ajustada ao risco do processo da taxa de juros.

Todos os demais parâmetros são semelhantes aos apresentados no Modelo de 2 Fatores.

Como efetuado anteriormente no modelo 2 fatores são obtidas uma EDP e uma fórmula fechada correspondente para os preços futuros. Neste modelo, em função da taxa de juros ser tratada como estocástica, de forma diversa ao modelo anterior são obtidas fórmulas distintas para futuros e contratos a termo. A formulação dos contratos a termo não será apresentada no presente trabalho.

EDP do Modelo de 3 Fatores:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\sigma_1^2 S^2 F_{SS} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 F_{\delta\delta} + \frac{1}{2}\sigma_3^2 F_{rr} + \sigma_1\sigma_2\rho_1 S F_{S\delta} + \sigma_2\sigma_3\rho_2 F_{\delta r} \\ & + \sigma_1\sigma_3\rho_3 S F_{sr} + (r-\delta)S F_S + \kappa(\alpha^* - \delta)F_\delta + a(m^* - r)F_r - F_T = 0 \end{aligned}$$

Considerando a condição de contorno terminal  $F(S, \delta, r, 0) = S$ , foi obtida a seguinte fórmula para os preços futuros:

$$F(S, \delta, r, T) = S \exp[ -\delta(1 - e^{-\kappa T})/\kappa + r(1 - e^{-aT})/a + C(T)]$$

Para confecção dos testes empíricos do modelo 3 Schwartz utilizou a forma de log dos preços futuros, dada pela expressão:

$$\ln F(S, \delta, r, T) = \ln S - \delta(1 - e^{-\kappa T})/\kappa + r(1 - e^{-aT})/a + C(T)$$

Onde:

$$\begin{aligned} C(T) = & [(\kappa\alpha^* + \sigma_1\sigma_2\rho_1)((1 - e^{-\kappa T}) - \kappa T)]/\kappa^2 - [\sigma_2^2(4(1 - e^{-\kappa T})) - (1 - e^{-2\kappa T}) - 2\kappa T]/4\kappa^3 \\ & - [(a m^* + \sigma_1\sigma_3\rho_3)((1 - e^{-aT}) - aT)/a^2 - [\sigma_3^2(4(1 - e^{-aT})) - (1 - e^{-2aT}) - 2aT]/4a^3 \\ & + \sigma_2\sigma_3\rho_2\{[(1 - e^{-\kappa T}) + (1 - e^{-aT}) - (1 - e^{-(\kappa+a)T})]/(\kappa a(\kappa+a)) \\ & + [\kappa^2(1 - e^{-aT}) + a^2(1 - e^{-\kappa T}) - \kappa a^2 T - a\kappa^2 T]/(\kappa^2 a^2(\kappa+a))\} \end{aligned}$$

Modelo Espaço- Estado Linear:

De forma resumida será apresentado abaixo as equações matriciais do Modelo Espaço- Estado Linear:

Equação das Medidas:

$$y_t = d_t + Z_t X_t + \varepsilon_t$$

$$\begin{matrix} N \times 1 & N \times 1 & N \times M & M \times 1 & N \times 1 \end{matrix}$$

Equação de Transição (Eq. de Estado):

$$X_t = c_t + Q_t X_{t-1} + \eta_t$$

$$\begin{matrix} M \times 1 & M \times 1 & M \times M & M \times 1 & M \times 1 \end{matrix}$$

Vetor dos Distúrbios:

$$[\varepsilon_t \ \eta_t]' \sim WN( [0 \ 0]', [H_t \ \text{Var}(\eta_t)] \ I_{2 \times 2})$$

$$(M+N) \times 1$$

Onde:

$y_t$  corresponde ao vetor das observações

$X_t$  consiste do vetor de estados

$Z_t, d_t, c_t, Q_t, H_t, \text{Var}[\eta_t]$  são chamadas de matrizes do sistema

No caso em questão, o vetor das observações ( $y_t$ ) consistirá do log do preço de contratos futuro das commodities com diferentes maturidades. O vetor de estados ( $X_t$ ) será o log do preço spot somente (modelo 1) ou ambos log do preço spot e convenience yield instantâneo (modelos 2 e 3) As equações das medidas são obtidas pelas equações apresentadas abaixo, para os modelos de 1, 2 e 3 fatores, respectivamente:

$$\ln F(S, T) = e^{-\kappa T} \ln S + (1 - e^{-\kappa T}) \alpha^* + \sigma^2 / 4\kappa (1 - e^{-2\kappa T})$$

$$\ln F(S, \delta, T) = \ln S - \delta(1 - e^{-\kappa T}) / \kappa + A(T)$$

$$\ln F(S, \delta, r, T) = \ln S - \delta(1 - e^{-\kappa T}) / \kappa + r(1 - e^{-aT}) / a + C(T)$$

As equações de transição (ou eq.de estado) serão as versões em tempo discreto dos processos estocásticos das variáveis de estado, sendo essas: equações 2 para modelo de 1 fator, 11 a 13 para os modelos de 2 e 3 fatores.

$$dX = \kappa(\alpha - X)dt + \sigma dz \quad \text{para o Modelo 1;}$$

e

$$d\delta = \kappa(\alpha - \delta)dt + \sigma_2 dz_2,$$

$$dz_1, dz_2 = \rho dt,$$

$$dX = (\mu - \delta - \frac{1}{2} \sigma_{12})dt + \sigma_1 dz_1 \quad \text{para os Modelos 2 e 3.}$$

A equação de medida para o Modelo 1 pode ser escrita como:

$$y_t = d_t + Z_t X_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, NT$$

Onde:

$$y_t = \ln[F(T_i)], \quad i = 1, \dots, N, \quad N \times 1 \text{ vetor das observações}$$

$$d_t = [(1 - e^{-\kappa T_i}) \alpha^* + \sigma^2 / 4\kappa (1 - e^{-2\kappa T_i})], \quad i = 1, \dots, N, \quad N \times 1 \text{ vetor}$$

$$Z_t = [e^{-\kappa T_i}], \quad i = 1, \dots, N, \quad N \times 1 \text{ vetor}$$

$\varepsilon_t$ , vetor dos distúrbios descorrelacionados serialmente com

$$E[\varepsilon_t] = 0, \quad \text{Var}[\varepsilon_t] = H$$

A equação de transição do modelo 1 pode ser escrita como:

$$X_t = c_t + Q_t X_{t-1} + \eta_t, \quad t = 1, \dots, NT$$

Onde:

$$c_t = \kappa \alpha \Delta t, \quad Q_t = 1 - \kappa \Delta t$$

$\eta_t$ , distúrbios descorrelacionados serialmente com  $E[\eta_t] = 0, \text{Var}[\eta_t] = \sigma^2 \Delta t$

## APÊNDICE VI

Desenvolvimento do Modelo Schwartz & Smith (2000):

Schwartz & Smith (2000) propuseram um modelo com 2 fatores estocásticos correlacionados não observáveis para descrição do comportamento dos preços de commodities, que somados formam o logaritmo do preço do ativo ( $\ln S_t$ ).

As formulações apresentadas no artigo foram:

$$\ln S_t = \chi_t + \xi_t$$

Onde:

$S_t$  o preço spot da commodity;

$\chi_t$  o fator que representa os desvios de curto prazo nos preços;

$\xi$  o fator que determina a tendência de longo prazo dos preços.

Por sua vez, as formulações correspondentes aos processos estocásticos seriam:

$$d\chi_t = -\kappa\chi dt + \sigma_\chi dz_\chi$$

$$d\xi_t = \mu_\xi dt + \sigma_\xi dz_\xi$$

$$dz_\xi \cdot dz_\chi = \rho dt.$$

Onde:

$\kappa$  é o parâmetro de reversão à média do MRA;

$\sigma_\chi$  é a volatilidade do desvio de curto prazo nos preços;

$dz_\chi$  é o incremento de Wiener do desvio de curto prazo nos preços;

$\mu_\xi$  é o parâmetro do drift da tendência de longo prazo dos preços;

$\sigma_\xi$  é a volatilidade da tendência de longo prazo dos preços;

$dz_\xi$  é o incremento de Wiener da tendência de longo prazo dos preços;

$\rho$  é o parâmetro da correlação entre os incrementos dos 2 fatores.

Considerando que as variáveis de estado possuem distribuição normal conjunta, as formulações do vetor de valores esperados e a matriz de covariância correspondente são dadas por:

$$E[(\chi_t, \xi_t)] = [e^{-\kappa t} \chi_0, \xi_0 + \mu_\xi t]$$

$$Cov[(\chi_t, \xi_t)] = \begin{vmatrix} (1 - e^{-2\kappa t}) \frac{\sigma_\chi^2}{2\kappa} & (1 - e^{-\kappa t}) \frac{\rho_{\chi\xi} \sigma_\chi \sigma_\xi}{\kappa} \\ (1 - e^{-\kappa t}) \frac{\rho_{\chi\xi} \sigma_\chi \sigma_\xi}{\kappa} & \sigma_\xi^2 t \end{vmatrix}$$

Como  $\ln S_t = \chi_t + \xi_t$ ,  $\ln S_t$  tem distribuição normal com média e variância dadas por:

$$E[\ln S_t] = e^{-\kappa t} \chi_0 + \xi_0 + \mu_\xi t$$

$$Var[\ln S_t] = (1 - e^{-2\kappa t}) \frac{\sigma_\chi^2}{2\kappa} + \sigma_\xi^2 t + 2(1 - e^{-\kappa t}) \frac{\rho_{\chi\xi} \sigma_\chi \sigma_\xi}{\kappa}$$

O preço spot  $S_t$  terá por conseguinte distribuição log-normal, o que implica que seu valor esperado será dado por:

$$E[S_t] = \exp(E[\ln S_t] + \frac{1}{2} Var[\ln S_t])$$

Temos então que:

$$\ln(E[S_t]) = E[\ln S_t] + \frac{1}{2} Var[\ln S_t]$$

Temos então que:

$$\ln(E[S_t]) = E[\ln S_t] + \frac{1}{2} Var[\ln S_t]$$

$$\ln(E[S_t]) = e^{-\kappa t} \chi_0 + \xi_0 + \mu_\xi t + \frac{1}{2} \left( (1 - e^{-2\kappa t}) \frac{\sigma_\chi^2}{2\kappa} + \sigma_\xi^2 t + 2(1 - e^{-\kappa t}) \frac{\rho_{\chi\xi} \sigma_\chi \sigma_\xi}{\kappa} \right)$$

Por essa última equação é possível observar que quando  $t$  tende ao infinito que o logaritmo do valor esperado do preço tenderá para:

$$\ln(E[S_t]) = \left( \xi_0 + \frac{\sigma_\chi^2}{4\kappa} + \frac{\rho_{\chi\xi} \sigma_\chi \sigma_\xi}{\kappa} \right) + (\mu_\xi \sigma_\xi^2) t$$

$$t \rightarrow \infty$$

Os processos estocásticos para os fatores sob a medida equivalente martingal podem ser expressos por:

$$d\chi_t = (-\kappa\chi - \lambda_\chi)dt + \sigma_\chi dz_\chi^*$$

$$d\xi_t = (\mu_\xi - \lambda_\xi)dt + \sigma_\xi dz_\xi^*$$

$$dz_\xi^* \cdot dz_\chi^* = \rho dt$$

Foram adotados os mesmos procedimentos ao caso anterior para as formulações do vetor de valores esperados e a matriz de covariância na medida

equivalente martingal, permitindo a obtenção das seguintes expressões para o valor esperado e variância de  $\ln(S_t)$  sob a neutralidade ao risco:

$$E^*[\ln S_t] = e^{-\kappa t} \chi_0 - (1 - e^{-\kappa t}) \frac{\lambda_\chi}{\kappa} + \xi_0 + \mu_\xi^* t$$

$$Var^*[\ln S_t] = Var[\ln S_t]$$

De posse desses resultados foi possível escrever o preço futuro de  $S_t$  como:

$$\ln(F_{T,0}) = \ln(E^*[S_T])$$

$$\ln(F_{T,0}) = E^*[\ln(S_T)] + \frac{1}{2} Var^*[\ln(S_T)]$$

$$\ln(F_{T,0}) = e^{-\kappa T} \chi_0 + \xi_0 + A(T)$$

Onde:

$$A(T) = \mu_\xi^* T - (1 - e^{-\kappa T}) \frac{\lambda_\chi}{\kappa} + \frac{1}{2} (1 - e^{-2\kappa T}) \frac{\sigma_\chi^2}{2\kappa} + \sigma_\xi^2 T + 2(1 - e^{-\kappa T}) \frac{\rho_{\chi\xi} \sigma_\chi \sigma_\xi}{\kappa}$$

## ANEXO I

Caso Base 1 - Projeto de Investimento em um Forno-Elétrico (Usina Semi-Integrada).

### a) Dados do Projeto

Investimento Inicial (Io)	500	Milhões R\$
Capacidade Instalada (Cap)	1000	Mil Ton. Ano
Uso da Cap.Instalada (UC)	90%	
Rec.Líqu.porTon.de Aço em 0 (So)	500	US\$
Taxa de Câmbio (TC)	1,80	R\$/US\$
Custo da Sucata Ferrosa (CSF)	30%	da Rec.Líquida
Outros Custos e Despesas (OCD)	535	Milhões R\$/ano
Alíquota de Impostos (AI)	34%	
Período de Tempo - Trimestre (Δs)	0,25	ano
Custo de Capital	10%	ao ano (real)
Taxa Livre de Risco (r)	5%	ao ano (real)
Peíodo.de Cresc.Extraordinário	5	anos
Crescimento da Rec.Líqu.por Ton,	2,50%	ao ano (real)

### b) Fluxo de Caixa do Projeto (FCXs):

$$FCX_s = [S_s \times Cap \times TC \times UC \times (1 - CSF) - OCD](1 - AI)\Delta s$$

s	Ss em US\$	FCXs em R\$
0	500,00	-
1	503,13	5.866.550
2	506,29	6.456.777
3	509,46	7.050.705
4	512,66	7.648.356
5	515,87	8.249.754
6	519,11	8.854.923
7	522,36	9.463.886
8	525,64	10.076.667
9	528,93	10.693.290
10	532,25	11.313.779
11	535,58	11.938.158
12	538,94	12.566.452
13	542,32	13.198.684
14	545,72	13.834.881
15	549,14	14.475.066
16	552,59	15.119.265
17	556,05	15.767.503
18	559,54	16.419.805
19	563,04	17.076.197
20	566,57	17.736.704

### c) Valor e VPL

VP dos FCXs (VPFCX) =	176.035.627
VP Perpetuidade (VPP) =	456.715.577
Valor (Vo) = VPFCX+VPP =	632.751.204
VPLo =	132.751.204

## ANEXO II

Caso Base 2 - Projeto de Investimento em um Alto-forno (Usina Integrada).

### a) Dados do Projeto - Alto Forno

Investimento Inicial (I <sub>0</sub> )	4140	Milhões R\$
Capacidade Instalada (Cap)	2800	Mil Ton. Ano
Uso da Cap.Instalada (UC)	90%	
Rec.Liq.porTon.de Aço em 0 (S <sub>0</sub> )	500	US\$
Taxa de Câmbio (TC)	1,80	R\$/US\$
Custo do Min.de Ferro por Ton. (Cs)	45	US\$
Outros Custos Prod.por Ton (OCP)	255	US\$
Depreciacao e Amortizacao (DA)	0,05	de I <sub>0</sub> ao ano
Despesas Gerais (DG)	200	Milhões R\$/ano
Alíquota de Impostos (AI)	34%	
Período de Tempo - Trimestre (Δs)	0,25	ano
Custo de Capital	10%	ao ano (real)
Taxa Livre de Risco (r)	5%	ao ano (real)
Peíodo.de Cresc.Extraordinário	5	anos
Crescimento da Rec.Liq.por Ton,	2,50%	ao ano (real)

### b) Fluxo de Caixa do Projeto (FCXs):

$$FCX_s = [Cap \times UC \times (S_s - M_s - OCP) \times TC - DA - DG](1 - AI)\Delta s$$

s	Ss em US\$	FCXs em R\$
0	500,00	-
1	503,13	84.668.041
2	506,29	86.816.468
3	509,46	88.978.365
4	512,66	91.153.816
5	515,87	93.342.906
6	519,11	95.545.721
7	522,36	97.762.347
8	525,64	99.992.869
9	528,93	102.237.377
10	532,25	104.495.956
11	535,58	106.768.696
12	538,94	109.055.684
13	542,32	111.357.012
14	545,72	113.672.767
15	549,14	116.003.041
16	552,59	118.347.925
17	556,05	120.707.511
18	559,54	123.081.890
19	563,04	125.471.156
20	566,57	127.875.401

### c) Valor e VPL

VP dos FCXs (VPFCX) =	1.636.092.773
VP Perpetuidade (VPP) =	3.292.758.847
Valor (Vo) = VPFCX+VPP =	4.928.851.621
VPLo =	788.851.621



## ANEXO III

Opção de Parada Temporária em Usinas Siderúrgicas – MGB.

a) Outros Custos e Despesas nos casos de 90% de uso da capacidade, parada temporária 1 e 2:

Outros Custos e Despesas em Milhares de R\$			
Uso da Capacidade	90%	parada temp.1	parada temp.2
Energia Elétrica	190.000	0	0
Outros Materiais	80.000	0	0
Custos com Pessoal	115.000	57.500	0
Manutenção	50.000	10.000	10.000
Depreciação	25.000	25.000	25.000
Desp.Adm e Com.	75.000	37.500	7.500
TOTAL	535.000	130.000	42.500
Percentual Evitado	0%	76%	92%

Tipo de Parada Temp. escolhida para análise (1 ou 2)----->

1

b) Parâmetros do MGB:

Drift de Tendência	$\mu - \sigma^2/2$	2,50%
Volatilidade	$\sigma$	34,32%
Prêmio de Risco	$\pi$	0,69%
Fator de "Subida"	$u$	1,1872
Fator de "Descida"	$d$	0,8423
Prob.Neutra ao Risco (Subida)	$p^*$	47,03%

c) Valor, VPL Expandido, Valor da Opção

VP dos FCXs Expandidos (VPFCXexp) =	277.679.137
VP Perpetuidade (VPP) =	456.715.577
Valor Expand. (Vo exp) = VPFCXexp+VPP =	734.394.714
VPLo exp =	234.394.714
Valor da Opção de Parada Temporária =	101.643.510
% de Acrésc. da Opção ao VPL Estático=	77%



**e) Árvore de Fluxos de Caixa (FCXs) em Milhares de Reais**

[illegible]

**f) Árvore de VP de Fluxos de Caixa (VPFCX) em Milhares de Reais**

[illegible]

**g) Árvore de VP de Fluxos de Caixa Expandidos (VPFCXexp) em Milhares de Reais**

[illegible]

## ANEXO IV

Opção de Parada Temporária em Usinas Siderúrgicas – MRM.

a) Fluxo de Caixa do Projeto (FCXs) com suposto de Ss seguindo um M

$$FCX_s = [S_s \times Cap \times TC \times UC \times (1 - CSF) - OCD](1 - AI)\Delta s$$

s	Ss em US\$	FCXs em R\$
0	500,00	-
1	507,56	6.694.586
2	514,04	7.907.693
3	519,59	8.945.797
4	524,33	9.832.543
5	528,37	10.588.841
6	531,82	11.233.050
7	534,75	11.781.182
8	537,24	12.247.135
9	539,35	12.642.921
10	541,15	12.978.884
11	542,67	13.263.906
12	543,96	13.505.597
13	545,06	13.710.463
14	545,98	13.884.055
15	546,77	14.031.106
16	547,44	14.155.644
17	548,00	14.261.093
18	548,48	14.350.365
19	548,88	14.425.929
20	549,22	14.489.883

b) Valor e VPL do Caso Base com MRM:

VP dos FCXs (VPFCX) =	187.869.693
VP Perpetuidade (VPP) =	373.110.771
Valor (Vo) = VPFCX+VPP =	560.980.464
VPLo =	60.980.464

c) Parâmetros do MRM:

Velocidade de Reversão	$\kappa$	0,67
Volatilidade	$\sigma$	35,10%
Prêmio de Risco Normalizado	$\lambda$	0,0399
Nível de Equilíbrio dos Preços	$\bar{S}$	551,10

d) Valor, VPL Expandido, Valor da Opção

VP dos FCXs Expandidos (VPFCXexp) =	205.283.163
VP Perpetuidade (VPP) =	373.110.771
Valor Expand. (Vo exp) = VPFCXexp+VPP =	578.393.934
VPLo exp =	78.393.934
Valor da Opção de Parada Temporária =	17.413.470
% de Acrésc. da Opção ao VPL Estático=	29%

#### e) Árvore Auxiliar para Cálculo das Probabilidades

[illegible]

#### f) Árvore das Probabilidades de Subida

[illegible]



**g) Árvore da Receita Líquida Neutra ao Risco por Tonelada - (Ss)**

[illegible]

## h) Árvore de Fluxos de Caixa (FCXs) em Milhares de Reais

s=0	s=1	s=2	s=3	s=4	s=5	s=6	s=7	s=8	s=9	s=10	s=11	s=12	s=13	s=14	s=15	s=16	s=17	s=18	s=19	s=20
5.280	23.424	45.051	70.829	101.553	138.174	181.822	233.846	295.851	369.754	457.836	562.817	687.940	837.069	1.014.809	1.226.649	1.479.130	1.780.049	2.138.700	2.566.156	3.075.618
	-9.641	5.584	23.731	45.361	71.142	101.869	138.493	182.144	234.170	296.178	370.083	458.168	563.152	688.278	837.410	1.015.153	1.226.995	1.479.479	1.780.401	2.139.054
		-22.200	-9.424	5.803	23.952	45.583	71.366	102.095	138.721	182.374	234.402	296.412	370.319	458.406	563.392	688.520	837.654	1.015.398	1.227.243	1.479.729
			-32.765	-22.046	-9.269	5.959	24.110	45.743	71.526	102.257	138.884	182.538	234.568	296.580	370.488	458.576	563.564	688.693	837.828	1.015.574
				-41.651	-32.656	-21.936	-9.158	6.071	24.223	45.857	71.641	102.373	139.001	182.656	234.687	296.699	370.609	458.698	563.687	688.817
					-49.120	-41.573	-32.578	-21.857	-9.078	6.152	24.304	45.938	71.724	102.456	139.085	182.741	234.772	296.785	370.695	458.785
						-55.398	-49.065	-41.518	-32.522	-21.800	-9.022	6.209	24.362	45.997	71.783	102.516	139.145	182.801	234.833	296.846
							-60.672	-55.359	-49.026	-41.478	-32.482	-21.760	-8.981	6.250	24.403	46.039	71.825	102.558	139.188	182.844
								-65.102	-60.644	-55.331	-48.998	-41.449	-32.453	-21.731	-8.952	6.280	24.433	46.068	71.855	102.589
									-68.823	-65.083	-60.624	-55.311	-48.977	-41.429	-32.433	-21.710	-8.931	6.301	24.454	46.090
										-71.948	-68.809	-65.069	-60.610	-55.296	-48.963	-41.414	-32.418	-21.695	-8.916	6.316
											-74.571	-71.938	-68.799	-65.058	-60.600	-55.286	-48.952	-41.404	-32.407	-21.685
												-76.774	-74.564	-71.931	-68.792	-65.051	-60.593	-55.279	-48.945	-41.397
													-78.623	-76.769	-74.559	-71.926	-68.787	-65.046	-60.587	-55.273
														-80.175	-78.619	-76.765	-74.556	-71.922	-68.783	-65.042
															-81.478	-80.172	-78.617	-76.763	-74.553	-71.920
																-82.571	-81.476	-80.171	-78.615	-76.761
																	-83.489	-82.570	-81.475	-80.169
																		-84.259	-83.488	-82.569
																			-84.905	-84.258
																				-85.447

**i) Árvore de VP de Fluxos de Caixa (VPFCX) em Milhares de Reais**

[illegible]



## ANEXO V

Opção de Parada Temporária em Usinas Siderúrgicas – MRM com tendência.

a) Fluxo de Caixa do Projeto (FCXs) com suposto de Ss seguindo um MRM com Tendência :

$$FCX_s = [S_s \times Cap \times TC \times UC \times (1 - CSF) - OCD](1 - AI)\Delta s$$

s	C <sub>s</sub>	X <sub>s</sub>	S <sub>s</sub> em US\$	FCX <sub>s</sub> em R\$
0	6,21	0,00	500,00	-
1	6,22	0,00	503,13	5.866.550
2	6,23	0,00	506,29	6.456.777
3	6,23	0,00	509,46	7.050.705
4	6,24	0,00	512,66	7.648.356
5	6,25	0,00	515,87	8.249.754
6	6,25	0,00	519,11	8.854.923
7	6,26	0,00	522,36	9.463.886
8	6,26	0,00	525,64	10.076.667
9	6,27	0,00	528,93	10.693.290
10	6,28	0,00	532,25	11.313.779
11	6,28	0,00	535,58	11.938.158
12	6,29	0,00	538,94	12.566.452
13	6,30	0,00	542,32	13.198.684
14	6,30	0,00	545,72	13.834.881
15	6,31	0,00	549,14	14.475.066
16	6,31	0,00	552,59	15.119.265
17	6,32	0,00	556,05	15.767.503
18	6,33	0,00	559,54	16.419.805
19	6,33	0,00	563,04	17.076.197
20	6,34	0,00	566,57	17.736.704

b) Valor e VPL do Caso Base com MRM com Tendência:

VP dos FCXs (VPFCX) =	176.035.627
VP Perpetuidade (VPP) =	456.715.577
Valor (Vo) = VPFCX+VPP =	632.751.204
VPLo =	132.751.204

c) Parâmetros do MRM:

V.Inicial da Tendência de CP	X <sub>0</sub>	0,00
V.Inic.Nível Equil.L.Prazo	C <sub>0</sub>	6,21
Drift de Tendência	c	2,50%
Média de X <sub>t</sub>	α	0,00
Velocidade de Reversão	κ	2,40
Volatilidade	σ	36,40%
Prêmio de Risco Normalizado	λ	0,0395

d) Valor, VPL Expandido, Valor da Opção

VP dos FCXs Expandidos (VPFCXexp) =	178.643.989
VP Perpetuidade (VPP) =	456.715.577
Valor Expand. (Vo exp) = VPFCXexp+VPP =	635.359.566
VPLo exp =	135.359.566
Valor da Opção de Parada Temporária =	2.608.362
% de Acrésc. da Opção ao VPL Estático=	2,0%

[illegible]

**f) Árvore das Probabilidades de Subida**

[illegible]

[illegible]



#### h) Árvore de Fluxos de Caixa (FCXs) em Milhares de Reais

[illegible]

**i) Árvore de VP de Fluxos de Caixa (VPFCX) em Milhares de Reais**

[illegible]

j) **Árvore de VP de Fluxos de Caixa Expandidos (VPFCXexp) em Milhares de Reais**

[illegible]

## ANEXO VI

### Opção de Troca de Tecnologia em Usinas Integradas - MGB.

#### a) Dados do Projeto - Laminador a Quente

Investimento Inicial (I <sub>0</sub> )	2880	Milhões R\$
Capacidade Instalada (Cap)	2800	Mil Ton. Ano
Uso da Cap.Instalada (UC)	90%	
Rec.Liq/Ton.Placa Aço em 0 (S <sub>0</sub> *)	750	US\$
Taxa de Câmbio (TC)	1,80	R\$/US\$
Rec.Liq/Ton.Lam.Quente em 0 (S <sub>0</sub> )	500	US\$
Outros Custos Lam./Ton (OCP*)	100	US\$
Deprec. e Amort.Incremental (DA*)	0,05	de I <sub>0</sub> ao ano
Despesas Gerais Increm..(DG*)	120	Milhões R\$/ano
Alíquota de Impostos (AI)	34%	
Período de Tempo - Trimestre (Δs)	0,25	ano
Custo de Capital	10%	ao ano (real)
Taxa Livre de Risco (r)	5%	ao ano (real)
Peíodo.de Cresc.Extraordinário	5	anos
Crescimento da Rec.Liq.por Ton,	2,50%	ao ano (real)

#### b) Fluxo de Caixa Incremental do Projeto do Laminador (FCXIs):

$$FCXI_s = [Cap \times UC \times (S_s^* - S_0 - OCP^*) \times TC - DA^* - DG^*]$$

s	Ss* em US\$	FCXIs em R\$
0	750,00	-
1	754,70	69.879.100
2	759,43	71.059.554
3	764,20	72.247.409
4	768,99	73.442.712
5	773,81	74.645.509
6	778,66	75.855.847
7	783,54	77.073.773
8	788,45	78.299.335
9	793,40	79.532.581
10	798,37	80.773.558
11	803,38	82.022.316
12	808,41	83.278.903
13	813,48	84.543.369
14	818,58	85.815.762
15	823,71	87.096.133
16	828,88	88.384.530
17	834,07	89.681.006
18	839,30	90.985.610
19	844,57	92.298.393
20	849,86	93.619.407

#### c) Valor e VPL

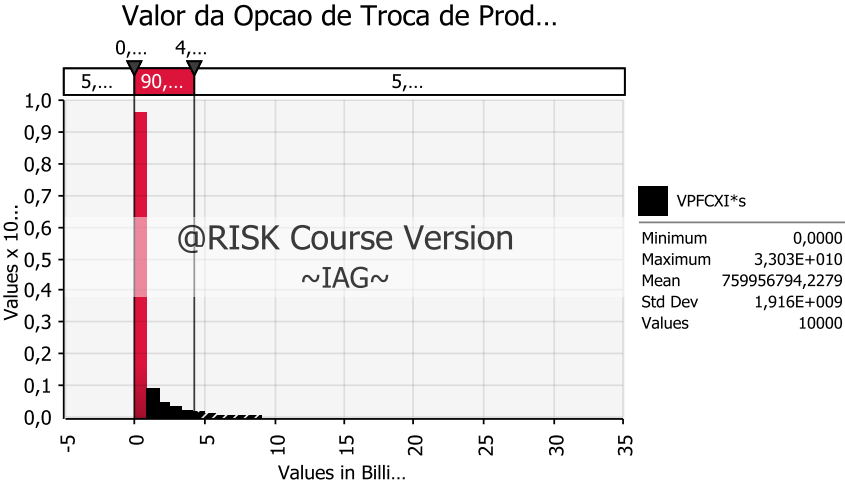
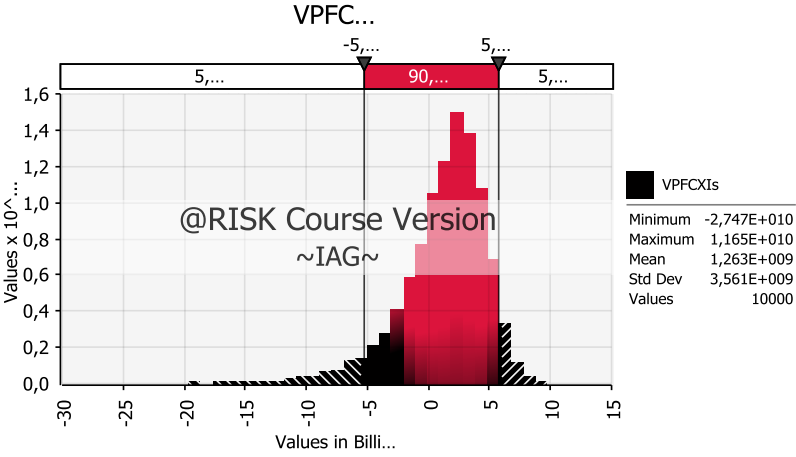
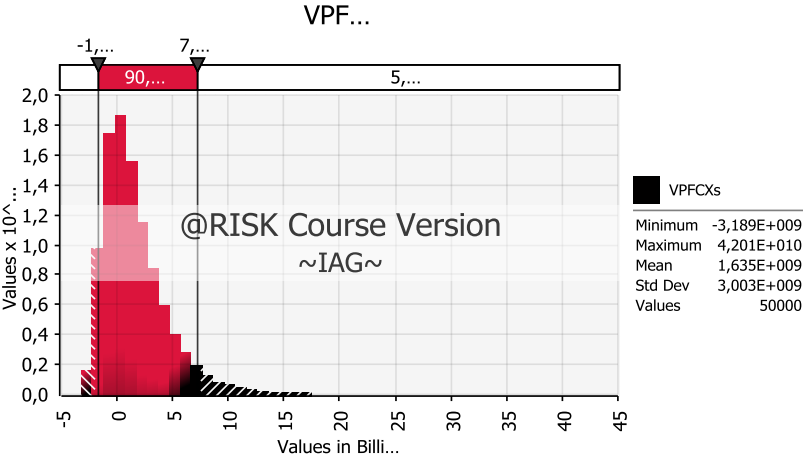
VP dos FCXIs (VPFCXI) =	1.266.154.067
VP Perpetuidade (VPPI) =	2.410.675.774
Valor (Vo) = VPFCXI+VPPI =	3.676.829.841
VPLo =	796.829.841

d) Parametros do MGB dos Processos Ss (Placas) e Ss\* (Laminado a Quente):

Parametros	Simb. Parametros	Ss - Placas	Ss* - Lam.Quente
Drift de Tendência	$\mu-\sigma^2/2$	2,50%	2,50%
Volatilidade	$\sigma$	34,30%	9,84%
Prêmio de Risco	$\Pi$	0,33%	0,37%
Correl. log-retornos de S e S*	$\rho$	23,80%	23,80%

e) Simulacao

s	Z(S)	Z(W)	Z(S*)	Ss	FCXs em R\$	Ss*	FCXIs em R\$	FCXIs* em R\$
0	-	-	-	500,00		750,0		
1	0	0	0	494,1	78.548.066	751,0	73.826.313	0
2	0	0	0	488,4	74.609.763	752,0	78.896.363	0
3	0	0	0	482,7	70.717.545	753,0	83.916.750	0
4	0	0	0	477,0	66.870.873	754,0	88.888.067	0
5	0	0	0	471,4	63.069.214	755,0	93.810.903	0
6	0	0	0	465,9	59.312.041	756,0	98.685.836	0
7	0	0	0	460,5	55.598.834	757,0	103.513.441	0
8	0	0	0	455,1	51.929.078	758,0	108.294.284	0
9	0	0	0	449,7	48.302.265	759,0	113.028.926	0
10	0	0	0	444,5	44.717.892	760,0	117.717.918	0
11	0	0	0	439,3	41.175.463	761,0	122.361.810	0
12	0	0	0	434,1	37.674.487	762,0	126.961.141	0
13	0	0	0	429,1	34.214.478	763,0	131.516.445	0
14	0	0	0	424,0	30.794.958	764,0	136.028.252	0
15	0	0	0	419,1	27.415.452	765,0	140.497.082	0
16	0	0	0	414,2	24.075.492	766,0	144.923.451	0
17	0	0	0	409,3	20.774.616	767,0	149.307.871	0
18	0	0	0	404,5	17.512.367	768,0	153.650.843	0
19	0	0	0	399,8	14.288.291	769,0	157.952.868	0
20	0	0	0	395,1	11.101.943	770,1	162.214.435	0
Output Simul.						Output Simul.		
VPFCXs simul.=					R\$ 1.635.000.000	VPFCXIs simul.=	R\$ 1.263.000.000	
Valor da Opcao de Troca de Produto =							R\$ 759.956.000	



## Opção de Troca de Tecnologia em Usinas Integradas - MRM.

## a) Dados do Projeto - Alto Forno

Investimento Inicial (I <sub>0</sub> )	4140	Milhões R\$
Capacidade Instalada (Cap)	2800	Mil Ton. Ano
Uso da Cap.Instalada (UC)	90%	
Rec.Liq.porTon.de Aço em 0 (S <sub>0</sub> )	500	US\$
Taxa de Câmbio (TC)	1,80	R\$/US\$
Custo do Min.de Ferro por Ton. (C <sub>s</sub> )	45	US\$
Outros Custos Prod.por Ton (OCP)	255	US\$
Depreciacao e Amortizacao (DA)	0,05	de I <sub>0</sub> ao ano
Despesas Gerais (DG)	200	Milhões R\$/ano
Alíquota de Impostos (AI)	34%	
Período de Tempo - Trimestre (Δs)	0,25	ano
Custo de Capital	10%	ao ano (real)
Taxa Livre de Risco (r)	5%	ao ano (real)
Peíodo.de Cresc.Extraordinário	5	anos
Nível de Equilibrio dos Precos	551,10	US\$

## b) Fluxo de Caixa do Projeto (FCXs):

$$FCX_s = [Cap \times UC \times (S_s - M_s - OCP) \times TC - DA - DG](1 - AI)\Delta s$$

s	InSs	Ss em US\$	FCXs em R\$
0	6,21	500,00	-
1	6,23	507,56	87.682.094
2	6,24	514,04	92.097.801
3	6,25	519,59	95.876.502
4	6,26	524,33	99.104.255
5	6,27	528,37	101.857.182
6	6,28	531,82	104.202.101
7	6,28	534,75	106.197.302
8	6,29	537,24	107.893.373
9	6,29	539,35	109.334.033
10	6,29	541,15	110.556.937
11	6,30	542,67	111.594.417
12	6,30	543,96	112.474.173
13	6,30	545,06	113.219.884
14	6,30	545,98	113.851.761
15	6,30	546,77	114.387.027
16	6,31	547,44	114.840.344
17	6,31	548,00	115.224.179
18	6,31	548,48	115.549.127
19	6,31	548,88	115.824.181
20	6,31	549,22	116.056.973
21	6,31	549,51	116.253.976
22	6,31	549,76	116.420.678
23	6,31	549,96	116.561.728
24	6,31	550,14	116.681.067
25	6,31	550,29	116.782.031
26	6,31	550,41	116.867.444
27	6,31	550,52	116.939.701
28	6,31	550,61	117.000.824
29	6,31	550,68	117.052.529
30	6,31	550,75	117.096.265
31	6,31	550,80	117.133.260
32	6,31	550,85	117.164.552
33	6,31	550,89	117.191.020
34	6,31	550,92	117.213.408
35	6,31	550,95	117.232.344
36	6,31	550,97	117.248.360
37	6,31	550,99	117.261.907
38	6,31	551,01	117.273.365
39	6,31	551,02	117.283.057
40	6,31	551,03	117.291.253

## c) Valor e VPL

<b>VP dos FCXs (VPFCX) =</b>	1.679.168.774
<b>VP Perpetuidade (VPP) =</b>	3.016.970.436
<b>Valor (Vo) = VPFCX+VPP =</b>	4.696.139.210
<b>VPLo =</b>	556.139.210

## d) Parâmetros do MRM:

Parametros	Simb. Parametros	Ss - Placas	Ss* - Lam.Quente
Velocidade de Reversão	$\kappa$	0,67	0,18
Volatilidade	$\sigma$	35,10%	9,94%
Prêmio de Risco Normalizado	$\lambda$	0,047	0,112
Nível de Equilíbrio dos Preços	$\bar{S}$	551,10	845
	$\sigma_{raiz}$	0,162	0,049

## e) Dados do Projeto - Laminador a Quente

Investimento Inicial (Io)	2880	Milhões R\$
Capacidade Instalada (Cap)	2800	Mil Ton. Ano
Uso da Cap.Instalada (UC)	90%	
Rec.Líq/Ton.Placa Aço em 0 (So*)	750	US\$
Taxa de Câmbio (TC)	1,80	R\$/US\$
Rec.Líq/Ton.Lam.Quente em 0 (So)	500	US\$
Outros Custos Lam./Ton (OCP*)	100	US\$
Deprec. e Amort.Incremental (DA*)	0,05	de Io ao ano
Despesas Gerais Increm..(DG*)	120	Milhões R\$/ano
Alíquota de Impostos (AI)	34%	
Período de Tempo - Trimestre ( $\Delta s$ )	0,25	ano
Custo de Capital	10%	ao ano (real)
Taxa Livre de Risco (r)	5%	ao ano (real)
Período.de Cresc.Extraordinário	5	anos
Nível de Equilíbrio dos Precos	845,00	US\$



## f) Fluxo de Caixa Incremental do Projeto do Laminador (FCXIs):

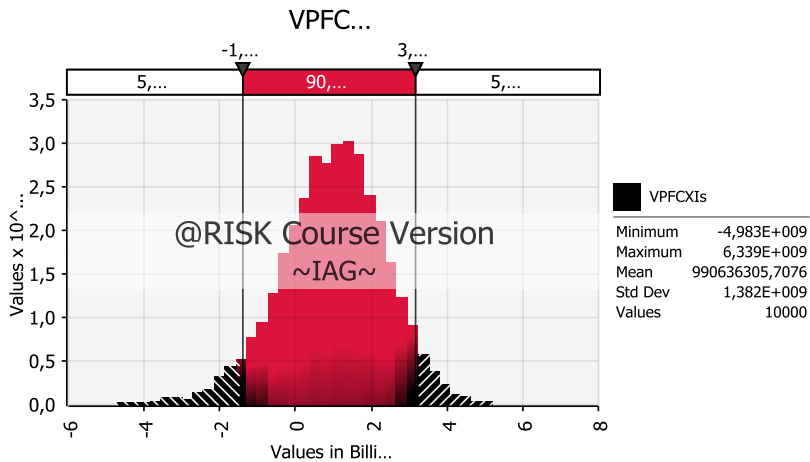
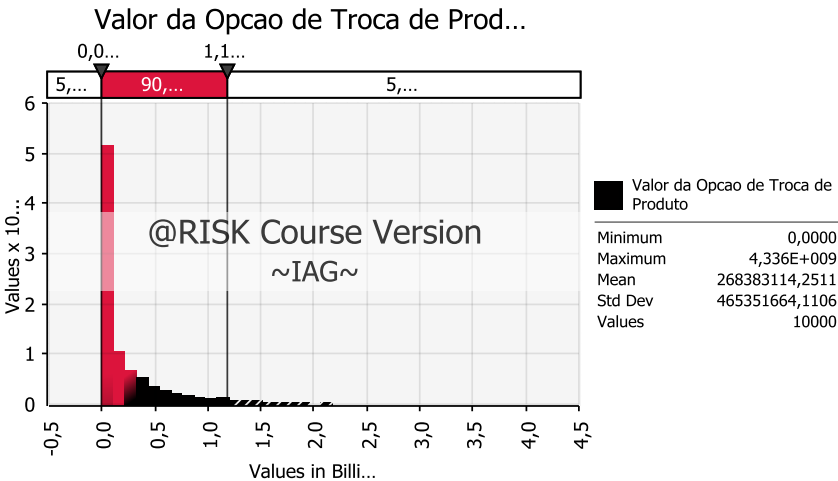
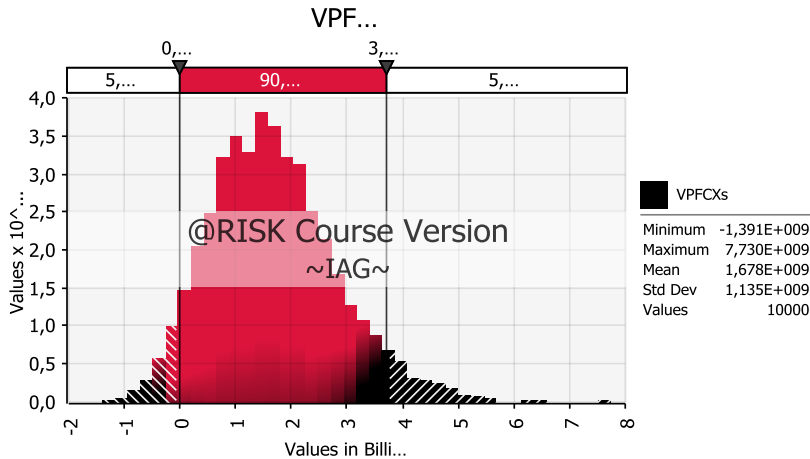
s	lnSs	Ss* em US\$	FCXIs em R\$
0	6,62	750,00	-
1	6,63	753,95	66.001.197
2	6,63	754,18	61.321.211
3	6,63	757,96	60.000.141
4	6,64	761,59	59.173.198
5	6,64	765,08	58.760.547
6	6,64	768,44	58.692.492
7	6,65	771,65	58.908.626
8	6,65	774,74	59.356.919
9	6,66	777,71	59.992.797
10	6,66	780,55	60.778.265
11	6,66	783,28	61.681.082
12	6,67	785,90	62.674.009
13	6,67	788,41	63.734.131
14	6,67	790,82	64.842.254
15	6,68	793,13	65.982.377
16	6,68	795,34	67.141.221
17	6,68	797,47	68.307.831
18	6,68	799,50	69.473.221
19	6,69	801,45	70.630.078
20	6,69	803,32	71.772.498
21	6,69	805,11	72.895.768
22	6,69	806,82	73.996.175
23	6,70	808,47	75.070.845
24	6,70	810,04	76.117.607
25	6,70	811,55	77.134.874
26	6,70	812,99	78.121.547
27	6,70	814,37	79.076.930
28	6,70	815,70	80.000.659
29	6,71	816,97	80.892.643
30	6,71	818,18	81.753.012
31	6,71	819,34	82.582.078
32	6,71	820,45	83.380.295
33	6,71	821,52	84.148.233
34	6,71	822,54	84.886.552
35	6,71	823,51	85.595.979
36	6,71	824,45	86.277.291
37	6,72	825,34	86.931.305
38	6,72	826,20	87.558.858
39	6,72	827,02	88.160.806
40	6,72	827,80	88.738.007

## c) Valor e VPL

VP dos FCXIs (VPFCXI) =	990.867.583
VP Perpetuidade (VPPI) =	2.209.499.308
Valor (Vo) = VPFCXI+VPPI =	3.200.366.891
VPLo =	320.366.891

e) Simulacao

s	Z(s)	Z(W)	Z(S*)	lnSs	lnSs*	Ss	FCXs em R\$	Ss*	FCXIs em R\$	FCXIs* em R\$
0	-	-	-	6,21	6,62	500,00		750,00		
1	0	0	0	6,22	6,62	497,34	80.723.644	749,35	70.210.932	0
2	0	0	0	6,23	6,62	495,95	79.776.920	748,77	70.817.418	0
3	0	0	0	6,23	6,62	495,39	79.389.988	748,25	70.853.582	0
4	0	0	0	6,24	6,62	495,34	79.357.619	747,79	70.540.714	0
5	0	0	0	6,24	6,62	495,61	79.541.082	747,37	70.027.417	0
6	0	0	0	6,25	6,62	496,06	79.847.300	747,00	69.412.483	0
7	0	0	0	6,25	6,62	496,60	80.214.628	746,67	68.760.479	0
8	0	0	0	6,25	6,62	497,17	80.603.051	746,37	68.112.499	0
9	0	0	0	6,25	6,62	497,73	80.987.375	746,11	67.493.612	0
10	0	0	0	6,26	6,62	498,27	81.352.482	745,88	66.918.057	0
11	0	0	0	6,26	6,62	498,76	81.690.024	745,67	66.392.849	0
12	0	0	0	6,26	6,62	499,21	81.996.133	745,49	65.920.284	0
13	0	0	0	6,26	6,62	499,61	82.269.825	745,33	65.499.663	0
14	0	0	0	6,26	6,62	499,97	82.511.914	745,19	65.128.480	0
15	0	0	0	6,26	6,62	500,28	82.724.271	745,07	64.803.213	0
16	0	0	0	6,26	6,62	500,55	82.909.326	744,96	64.519.864	0
17	0	0	0	6,26	6,62	500,79	83.069.746	744,87	64.274.298	0
18	0	0	0	6,26	6,62	500,99	83.208.222	744,79	64.062.464	0
19	0	0	0	6,26	6,62	501,17	83.327.346	744,72	63.880.525	0
20	0	0	0	6,26	6,62	501,32	83.429.532	744,66	63.724.928	0
Output Simul.								Output Simul.		
VPFCXs simul.=							R\$ 1.679.168.774	VPFCXIs simul.=	R\$ 990.867.583	
Valor da Opcao de Troca de Produto =									R\$ 268.383.114	



## ANEXO VII

Opção de Troca de Tecnologia em Usinas Integradas – MRM com tendência.

### a) Dados do Projeto - Alto Forno

Investimento Inicial (I <sub>0</sub> )	4140	Milhões R\$
Capacidade Instalada (Cap)	2800	Mil Ton. Ano
Uso da Cap.Instalada (UC)	90%	
Rec.Líqu.porTon.de Aço em 0 (S <sub>0</sub> )	500	US\$
Taxa de Câmbio (TC)	1,80	R\$/US\$
Custo do Min.de Ferro por Ton. (C <sub>s</sub> )	45	US\$
Outros Custos Prod.por Ton (OCP)	255	US\$
Depreciação e Amortização (DA)	0,05	de I <sub>0</sub> ao ano
Despesas Gerais (DG)	200	Milhões R\$/ano
Alíquota de Impostos (AI)	34%	
Período de Tempo - Trimestre (Δs)	0,25	ano
Custo de Capital	10%	ao ano (real)
Taxa Livre de Risco (r)	5%	ao ano (real)
Período.de Cresc.Extraordinário	5	anos
Crescimento da Rec.Líqu.por Ton,	2,50%	ao ano (real)

### b) Fluxo de Caixa do Projeto (FCXs):

$$FCX_s = [Cap \times UC \times (S_s - M_s - OCP) \times TC - DA - DG](1 - AI)\Delta s$$

s	C <sub>s</sub>	X <sub>s</sub>	S <sub>s</sub> em US\$	FCXs em R\$
0	6,21	0,00	500,00	-
1	6,22	0,00	503,13	84.668.041
2	6,23	0,00	506,29	86.816.468
3	6,23	0,00	509,46	88.978.365
4	6,24	0,00	512,66	91.153.816
5	6,25	0,00	515,87	93.342.906
6	6,25	0,00	519,11	95.545.721
7	6,26	0,00	522,36	97.762.347
8	6,26	0,00	525,64	99.992.869
9	6,27	0,00	528,93	102.237.377
10	6,28	0,00	532,25	104.495.956
11	6,28	0,00	535,58	106.768.696
12	6,29	0,00	538,94	109.055.684
13	6,30	0,00	542,32	111.357.012
14	6,30	0,00	545,72	113.672.767
15	6,31	0,00	549,14	116.003.041
16	6,31	0,00	552,59	118.347.925
17	6,32	0,00	556,05	120.707.511
18	6,33	0,00	559,54	123.081.890
19	6,33	0,00	563,04	125.471.156
20	6,34	0,00	566,57	127.875.401

### c) Valor e VPL

VP dos FCXs (VPFCX) =	1.636.092.773
VP Perpetuidade (VPP) =	3.292.758.847
Valor (V <sub>0</sub> ) = VPFCX+VPP =	4.928.851.621
VPL <sub>0</sub> =	788.851.621

## d) Parâmetros do MRM:

Parâmetros	Simb. Parâmetros	Ss - Placas	Ss* - Lam.Quente
V.Inicial da Tendência de CP	$\chi_0$	0,00	0,00
V.Inic.Nível Equil.L.Prazo	$C_0$	6,21	6,62
Drift de Tendência	c	2,50%	2,50%
Média de $\chi_t$	$\alpha$	0,00	0,00
Velocidade de Reversão	$\kappa$	2,40	0,321
Volatilidade	$\sigma$	36,40%	10,01%
Prêmio de Risco Normalizado	$\lambda$	0,0670	0,071
	$\sigma_{raiz}$	0,139	0,048

## e) Dados do Projeto - Laminador a Quente

Investimento Inicial (Io)	2880	Milhões R\$
Capacidade Instalada (Cap)	2800	Mil Ton. Ano
Uso da Cap.Instalada (UC)	90%	
Rec.Liq/Ton.Placa Aço em 0 (So*)	750	US\$
Taxa de Câmbio (TC)	1,80	R\$/US\$
Rec.Liq/Ton.Lam.Quente em 0 (So)	500	US\$
Outros Custos Lam./Ton (OCP*)	100	US\$
Deprec. e Amort.Incremental (DA*)	0,05	de Io ao ano
Despesas Gerais Increm..(DG*)	120	Milhões R\$/ano
Alíquota de Impostos (AI)	34%	
Período de Tempo - Trimestre ( $\Delta s$ )	0,25	ano
Custo de Capital	10%	ao ano (real)
Taxa Livre de Risco (r)	5%	ao ano (real)
Período.de Cresc.Extraordinário	5	anos
Crescimento da Rec.Liq.por Ton,	2,50%	ao ano (real)

## f) Fluxo de Caixa Incremental do Projeto do Laminador (FCXIs):

$$FCX_s = [S_s \times Cap \times TC \times UC \times (1 - CSF) - OCD](1 - AI)\Delta s$$

s	$C_s$	$\chi_s$	$S_s$ em US\$	FCXIs em R\$
0	6,62	0,00	750,00	-
1	6,63	0,00	754,70	69.879.100
2	6,63	0,00	759,43	71.059.554
3	6,64	0,00	764,20	72.247.409
4	6,65	0,00	768,99	73.442.712
5	6,65	0,00	773,81	74.645.509
6	6,66	0,00	778,66	75.855.847
7	6,66	0,00	783,54	77.073.773
8	6,67	0,00	788,45	78.299.335
9	6,68	0,00	793,40	79.532.581
10	6,68	0,00	798,37	80.773.558
11	6,69	0,00	803,38	82.022.316
12	6,70	0,00	808,41	83.278.903
13	6,70	0,00	813,48	84.543.369
14	6,71	0,00	818,58	85.815.762
15	6,71	0,00	823,71	87.096.133
16	6,72	0,00	828,88	88.384.530
17	6,73	0,00	834,07	89.681.006
18	6,73	0,00	839,30	90.985.610
19	6,74	0,00	844,57	92.298.393
20	6,75	0,00	849,86	93.619.407

## c) Valor e VPL

VP dos FCXIs (VPFCXI) =	1.266.154.067
VP Perpetuidade (VPPI) =	2.410.675.774
Valor (Vo) = VPFCXI+VPPI =	3.676.829.841
VPLo =	796.829.841

e) Simulacao

s	z(s)	z(w)	Z(S*)	C <sub>s</sub>	χ <sub>s</sub>	C <sub>s</sub> <sup>*</sup>	χ <sub>s</sub> <sup>*</sup>	S <sub>s</sub>	FCXs em R\$	S <sub>s</sub> <sup>*</sup>	FCXIs em R\$	FCXIs* em R\$
0	-	-	-	6,21	0,00	6,62	0,00	500,00		750,00		
1	0	0	0	6,22	-0,03	6,63	-0,01	483,47	71.272.939	749,70	80.851.715	0
2	0	0	0	6,23	-0,05	6,63	-0,01	485,09	72.376.251	749,78	79.705.300	0
3	0	0	0	6,23	-0,06	6,64	-0,02	487,70	74.156.861	750,23	78.085.502	0
4	0	0	0	6,24	-0,06	6,65	-0,02	490,63	76.151.315	751,02	76.480.715	0
5	0	0	0	6,25	-0,06	6,65	-0,02	493,67	78.219.658	752,11	75.025.797	0
6	0	0	0	6,25	-0,07	6,66	-0,03	496,75	80.319.568	753,49	73.750.060	0
7	0	0	0	6,26	-0,07	6,66	-0,03	499,86	82.438.281	755,13	72.651.906	0
8	0	0	0	6,26	-0,07	6,67	-0,03	502,99	84.571.985	757,02	71.721.298	0
9	0	0	0	6,27	-0,07	6,68	-0,04	506,15	86.719.585	759,14	70.946.482	0
10	0	0	0	6,28	-0,07	6,68	-0,04	509,32	88.880.806	761,47	70.315.937	0
11	0	0	0	6,28	-0,07	6,69	-0,04	512,51	91.055.624	764,00	69.818.896	0
12	0	0	0	6,29	-0,07	6,70	-0,04	515,73	93.244.093	766,71	69.445.436	0
13	0	0	0	6,30	-0,07	6,70	-0,05	518,96	95.446.286	769,60	69.186.451	0
14	0	0	0	6,30	-0,07	6,71	-0,05	522,21	97.662.288	772,65	69.033.588	0
15	0	0	0	6,31	-0,07	6,71	-0,05	525,49	99.892.183	775,85	68.979.187	0
16	0	0	0	6,31	-0,07	6,72	-0,05	528,78	102.136.059	779,20	69.016.216	0
17	0	0	0	6,32	-0,07	6,73	-0,05	532,10	104.394.003	782,68	69.138.218	0
18	0	0	0	6,33	-0,07	6,73	-0,05	535,43	106.666.103	786,28	69.339.258	0
19	0	0	0	6,33	-0,07	6,74	-0,06	538,79	108.952.449	790,00	69.613.881	0
20	0	0	0	6,34	-0,07	6,75	-0,06	542,17	111.253.129	793,84	69.957.066	0
Output Simul.								Output Simul.				
VPFCXs simul.= R\$ 1.636.092.773								VPFCXIs simul.= R\$ 1.266.154.067				
Valor da Opcao de Troca de Produto =								R\$ 48.267.177				

