

### 3

## Processos Estocásticos e Aplicações em Projetos na Indústria Siderúrgica

### 3.1

#### Introdução

As decisões de investimento tanto em ações e derivativos financeiros, como em projetos corporativos, são afetadas por incertezas de diversos tipos. Uma forma de tratar tais incertezas é através do estudo dos processos estocásticos que descrevem o comportamento dos preços desses ativos no tempo.

É possível definir processos estocásticos como variáveis que evoluem discretamente ou continuamente no tempo de forma imprevisível ou, no mínimo, parcialmente aleatória.

De maneira mais formal, considere-se  $\Omega$  um conjunto representando a aleatoriedade, onde  $w \in \Omega$  consiste de um estado da natureza e seja  $f$  uma função que representa um processo estocástico. Tem-se então que  $f : R \times \Omega \rightarrow R$  ou  $f(x, w)$ , sendo  $x \in R$  e  $w \in \Omega$ , com a propriedade que dado  $w \in \Omega$ ,  $f(\cdot, w)$  torna-se função de  $x$ . Tal definição implica que definido  $w \in \Omega$  e  $x \in R$  representando o tempo, então  $f(x, w_1)$  e  $f(x, w_2)$  consistem de trajetórias (ou realizações do processo) que dependentes dos estados da natureza que forem revelados, como exemplificado na figura 2:

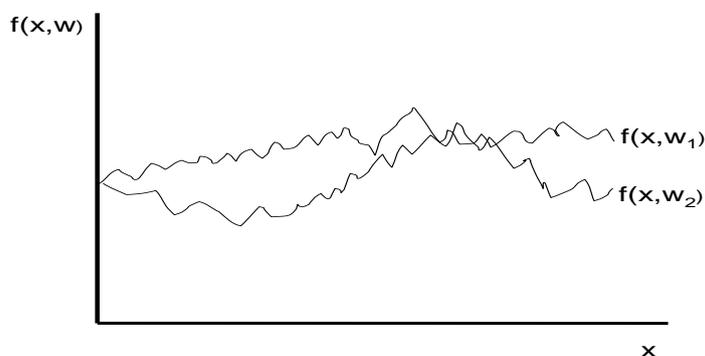


Figura 2 - Realizações de um Processo Estocástico.  
Fonte: Autor

Existem formas distintas de classificar os processos estocásticos. Há processos que evoluem em Tempo Contínuo e outros que evoluem em Tempo Discreto. Os processos podem ser Estacionários, que são aqueles que possuem propriedades estatísticas (1º e 2º momentos da distribuição) que não se modificam no tempo; Estritamente Estacionários, onde todos os momentos da distribuição se mantêm constantes no tempo; ou ainda Não-Estacionários, que justamente não possuem constância nos momentos da distribuição. Existe ainda uma 3ª forma de classificar que se relaciona ao Estado que pode ser Contínuo, nos casos em que a variável objeto possa assumir valores num intervalo contínuo, ou Discreto, quando a variável objeto pode assumir somente valores pontuais.

Uma questão chave para muitos modelos de avaliação em Finanças é a escolha do processo que melhor descreva a trajetória dos preços do ativo objeto que estiver sendo avaliado. Nesta análise devem ser levadas em consideração questões como: as características econômicas e o tempo de vida do ativo, as dificuldades na estimação de parâmetros do modelo estocástico escolhido, a aplicabilidade do processo escolhido nas soluções (analíticas ou numéricas) dos modelos usados para valoração, entre outros fatores.

De uma forma geral, se o tempo de vida do ativo (ou derivativo) for relativamente curto, o aprofundamento na pesquisa para determinação do processo estocástico pode ser considerado uma questão de menor relevância, permitindo sua escolha em função da facilidade de obtenção de parâmetros e da construção do modelo de avaliação. Em outros casos, porém, principalmente quando a vida do ativo for longa, a busca por um processo que mais se fidedigno ao desempenho do ativo será crucial na determinação do seu valor, podendo, no entanto, existir um preço a ser pago pela dificuldade na estimação de parâmetros e na determinação de soluções para valoração do ativo.

Neste capítulo serão tratados os principais modelos de processos estocásticos utilizados em finanças, apresentando suas características e discutindo sua aplicabilidade na avaliação de projetos no setor siderúrgico. Inicialmente serão comentados modelos mais simples e gerais, como o Movimento Browniano e Movimento de Reversão à Média Aritmética, e na sequência serão apresentados modelos mais recentes e sofisticados, que incorporam mais de um fator

estocástico, como os modelos propostos nos artigos Schwartz (97) e Schwartz & Smith (2000). Na seção final deste capítulo, após uma breve discussão sobre os modelos abordados, serão avaliadas alternativas para aplicação na análise de opções reais em projetos do setor siderúrgico.

### 3.2

#### Processos Markovianos e o Processo de Wiener

Processos de Markov são processos estocásticos onde unicamente o último valor observado do processo tem relevância na previsão dos valores futuros, característica consistente com a Forma Fraca da Eficiência de Mercado. Comumente, na modelagem do preço de ativos financeiros (como cotações de ações, metais preciosos, etc.) utilizam-se Processos Markovianos.

Dentre os Processos Markovianos, um dos mais populares em finanças é o Processo de Wiener, também conhecido como Movimento Browniano, tipo específico de processo onde os incrementos são imprevisíveis e ocorrem de forma contínua no tempo. Inicialmente usado na física, passou posteriormente a ser utilizado em finanças na modelagem do comportamento do preço de ativos financeiros.

Segundo Dixit & Pindyck (94), o Processo de Wiener possui três importantes propriedades:

1. É um Processo Markoviano, o que implica que toda informação necessária para elaboração de previsões futuras está no valor atual da variável e sua distribuição de probabilidade. Dessa forma, considerando que  $w(t)$  seja um Processo de Wiener, temos que a relação entre  $\Delta w$  e  $\Delta t$  é dada por  $\Delta w = \varepsilon_t (\Delta t)^{1/2}$ , onde  $\varepsilon_t \sim N(0,1)$ .
2. Os incrementos do processo são independentes, implicando na não correlação serial entre  $\varepsilon_t$  e  $\varepsilon_s$  para  $t \neq s$  e ainda que para dois quaisquer intervalos de tempo os valores de  $\Delta w$  são independentes.
3. Normalidade nas variações do processo sobre qualquer intervalo de tempo, com variância crescendo linearmente proporcional ao tamanho do intervalo de tempo:  $dw \sim N(0, dt^{1/2})$  e  $w_T \sim N(w_0, T)$ .

### 3.3

#### Movimento Aritmético Browniano (MAB)

O Movimento Aritmético Browniano determina que o processo de uma variável  $x$  pode ser definido em termos de um incremento de Wiener e um termo de tendência, como definido na equação abaixo:

$$dx = \alpha dt + \sigma dz$$

Onde:

$$dz = \varepsilon dt^{1/2};$$

$$\varepsilon \sim N(0,1);$$

$\alpha$  é o parâmetro drift;

$\sigma$  é o parâmetro de variância;

Sendo ambos,  $\alpha$  e  $\sigma$ , constantes no tempo.

Considerando um intervalo infinitesimal de tempo  $dt$ , a variação em  $x$  ( $dx$ ) terá distribuição normal, sendo os dois primeiros momentos da distribuição:

$$E(dx) = \alpha dt;$$

$$Var(dx) = \sigma^2 dt.$$

Dessa forma, considerando a data  $t=0$ , a previsão (valor esperado) para o valor de  $x_T$  (em  $t=T$ ) e a variância correspondente são dados por:

$$E(x_T) = x_0 + \alpha T;$$

$$Var(x_T) = \sigma^2 T.$$

Caso tenhamos um derivativo escrito sobre um ativo  $x$  que segue um MAB, o seu diferencial estocástico pode ser determinado por intermédio da aplicação do Lema de Itô. Seja  $F(x,t)$  um derivativo escrito sobre  $x(t)$ , temos pelo Lema de Itô que:

$$dF = \partial F / \partial x dx + \partial F / \partial t dt + 1/2 \partial^2 F / \partial x^2 dx^2$$

O problema da utilização do *MAB* na determinação de trajetória do valor de ativos é que ele possibilita o surgimento de valores negativos, o que seria uma característica indesejável para os preços.

### 3.4

#### Processos de Itô e Movimento Geométrico Browniano (MGB)

O Processo de Itô consiste da generalização do Movimento Browniano, o qual permite o estabelecimento de parâmetros de drift e variância variando no tempo, conforme apresentado na equação abaixo:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$$

Temos que  $dz$  é um incremento de Wiener e  $a(x,t)$  e  $b(x,t)$  funções determinísticas do tempo e estado atuais, correspondentes aos parâmetros drift e variância do processo.

Um caso particular do Processo de Itô é o Movimento Geométrico Browniano (*MGB*), o qual é muito utilizado na modelagem do preço de ativos como ações, produtos e outras variáveis econômicas taxas de juros e índices de preço (inflação), por exemplo.

Os parâmetros drift e variância do *MGB* são dados pelas fórmulas:

$$a(x,t) = \alpha x;$$

$$b(x,t) = \sigma x.$$

O que determina a seguinte equação para o modelo:

$$dx = \alpha x dt + \sigma x dz$$

O grande problema do *MGB* é o fato de que ele pode divergir, fazendo com que os preços tendam para o infinito à medida que o intervalo de tempo seja aumentado, propriedade indesejável quando se está lidando com ativos de longa maturidade.

Quando se assume que o preço de um ativo ( $x$ ) segue um *MGB*, comumente efetua-se o uso do diferencial do logaritmo natural do preço ( $d\ln x$ ), que pode ser facilmente obtido por intermédio do Lema de Itô, conforme demonstrado abaixo:

$$d\ln x = \partial F/\partial x dx + \partial F/\partial t dt + \frac{1}{2} \partial^2 F/\partial x^2 dx^2$$

$$d\ln x = 1/x dx + 0 dt + \frac{1}{2} (-1/x^2) \sigma^2 x^2 dt$$

$$d\ln x = (\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2) dt + \sigma dz$$

É trivial observar que  $d\ln x$  é um *MAB* com o parâmetro de drift  $(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2)$ , que possui como 2 primeiros momentos:

$$E[d\ln x] = (\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2) dt;$$

$$Var[d\ln x] = \sigma^2 dt$$

Prova-se que os 2 primeiros momentos de  $x(T)$  são:

$$E(x_T) = x_0 e^{\alpha T};$$

$$Var(x_T) = x_0^2 e^{2\alpha T} (e^{\sigma^2 T} - 1).$$

Temos então que:

$$x_T \sim LN(x_0 e^{\alpha T}, x_0^2 e^{2\alpha T} (e^{\sigma^2 T} - 1))$$

Como facilmente pode ser verificado nas fórmulas do valor esperado e variância do *MGB*, à medida que o tempo cresce,  $E(x(t))$  e  $Var(x(t))$  tendem ao infinito, conforme havia sido comentado anteriormente.

O procedimento adotado para estimação dos parâmetros do *MGB* inicia com a obtenção da série de  $\ln(x_t)$ , sobre a qual é aplicada uma regressão linear para obtenção dos parâmetros da equação:

$$\ln(x_t) = a + b \ln(x_{t-1}) + \varepsilon_t$$

De posse do erro padrão da série serão utilizadas as seguintes fórmulas para estimação dos parâmetros:

$$Var[\ln(x_t) - \ln(x_{t-1})] = Var[\varepsilon_t] = \sigma^2/N$$

$$\alpha = N\{\text{Média}[\ln(x_t/x_{t-1})] + \frac{1}{2} \sigma^2/N\}$$

O teste padrão para o processo é efetuado a partir da análise da hipótese nula ( $H_0$ ) de que o coeficiente ( $b$ ) de  $\ln(x_{t-1})$  na regressão seja unitário, procedimento conhecido como teste da raiz unitária de Dickey-Fuller.

A prática demonstra que normalmente é difícil rejeitar  $H_0$  e, por conseguinte, a hipótese que o processo segue um MGB, o que não significa, porém, que não exista outro processo mais adequado para descrever o comportamento dos preços. Um caso de interesse ocorre quando  $b < 1$ , o que, mesmo sem a rejeição do MGB, indicaria a possibilidade de presença de um Movimento de Reversão à Média.

Outra forma de efetuar o teste de Dickey-Fuller é através da regressão:

$$\ln(x_t) - \ln(x_{t-1}) = a + (b-1)\ln(x_{t-1}) + \varepsilon_t$$

Nesse caso a hipótese nula ( $H_0$ ) do teste seria que o coeficiente ( $b-1$ ) na regressão seria igual a zero, equivalente a dizer que  $b=1$ .

O MGB Neutro ao Risco pode ser obtido a partir de uma das duas formulações apresentadas abaixo:

$$dx/x = (r-\delta)dt + \sigma dz^*$$

ou

$$dx/x = (\alpha-\pi)dt + \sigma dz^*$$

Onde:

$\alpha$  – é o drift de um processo real;

$\delta$  – é o dividend (ou convenience) yield;

$\pi$  – é o prêmio pelo risco do ativo;

$r$  – é a taxa livre de risco da economia;

$dz^*$  – é um processo de Wiener sob a medida equivalente martingal

No caso em que se trabalha com  $d\ln x$ , a formulação do MGB neutro ao risco será dada por:

$$d\ln x = (\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 - \pi)dt + \sigma dz$$

### 3.5

#### Processos de Reversão à Média

Comumente em finanças quando se tenta descrever o comportamento de preços de ativos financeiros como ações e metais preciosos, por exemplo, o modelo preferencialmente escolhido é o Movimento Geométrico Browniano. O MGB é o caso base utilizado na maioria dos modelos de opções financeiras e opções reais e tem entre outras características desejáveis uma pequena quantidade de parâmetros a serem estimados. Em algumas situações, porém, esse processo pode não ser considerado uma boa alternativa. Um dos problemas na utilização do MGB é o fato de que este processo pode divergir levando os preços para o infinito, gerando modelos eventualmente não muito realistas em caso de ativos de longa duração comuns nas opções reais. Adicionalmente, estudos realizados como o de Schwartz (97), apontam que preços de commodities como o cobre e o petróleo, por exemplo, podem vagar aleatoriamente no curto prazo, mas no longo prazo tendem a convergir para o custo marginal de produção. Nesses casos pode ser considerada mais adequada a utilização de outra “família” de Processos de Itô que seriam os Processos de Reversão à Média. Na sequência serão apresentados alguns dos modelos mais conhecidos de Processos de Reversão à Média.

#### 3.5.1

##### Movimento de Reversão à Média Aritmético (MRA) de Ornstein-Uhlenbeck

O modelo mais básico de reversão a média é o MRA de Ornstein-Uhlenbeck, que comumente é definido pela equação abaixo:

$$dx = \eta(\hat{x} - x)dt + \sigma dz$$

Onde:

$dz$  é um incremento de Wiener;

$\eta$  é o parâmetro que indica a velocidade da reversão;

$\dot{x}$  é o nível normal ou média de longo prazo de  $x$ .

Apesar do *MRA* de Ornstein-Uhlenbeck ser um Processo de Markov ele não possui incrementos independentes, dado que a variação esperada em  $x$  é função da diferença entre a média de longo prazo e a última observação do processo.

Prova-se que os 2 primeiros momentos de  $x(t)$  são:

$$E(x_t) = \dot{x} - (x_0 - \dot{x}) e^{-\eta(t-t_0)};$$

$$Var(x_t) = \sigma^2 / 2\eta (1 - e^{-2\eta(t-t_0)}).$$

Na comparação do *MRA* com o *MGB* é interessante observar os efeitos do tempo e da magnitude do parâmetro de reversão ( $\eta$ ), nos 2 primeiros momentos de sua distribuição. Tem-se que quando  $t \rightarrow \infty$ , o valor esperado e a variância de  $x(t)$  tendem para:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(x_t) = \dot{x}$$

$$t \rightarrow \infty$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Var(x_t) = \sigma^2 / 2\eta$$

$$t \rightarrow \infty$$

Também se verifica que quando  $\eta \rightarrow \infty$ , serão encontrados:

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} E(x_t) = \dot{x}$$

$$\eta \rightarrow \infty$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} Var(x_t) = 0$$

$$\eta \rightarrow \infty$$

E quando  $\eta \rightarrow 0$ , serão encontrados:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} E(x_t) = x_0$$

$$\eta \rightarrow 0$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \text{Var}(x_t) = \sigma^2 T$$

$$\eta \rightarrow \infty$$

Com base nas equações apresentadas, pode-se concluir que quando  $t \rightarrow \infty$  o valor esperado do processo MRA de Ornstein-Uhlenbeck irá convergir para  $\hat{x}$  e a variância para um valor constante,  $\sigma^2/2\eta$ , diferente do MGB cujo valor esperado e a variância de  $x(t)$  tendem a crescer indefinidamente. Quando  $\eta \rightarrow \infty$  valor esperado do MRA também irá convergir para  $\hat{x}$ , sua variância, no entanto, irá convergir para zero. Já quando  $\eta \rightarrow 0$ , o MRA tende para o Movimento Browniano Simples. Outra maneira de verificar este resultado é substituir  $\eta$  por zero na equação do MRA e com isso será obtida a equação do Movimento Browniano.

A estimação dos parâmetros do modelo de Ornstein-Uhlenbeck pode ser efetuada a partir de informações em tempo discreto do histórico de preços pela regressão:

$$x_t - x_{t-1} = a + bx_{t-1} + \epsilon_t$$

De posse dos valores de  $a$ ,  $b$  e  $\sigma_\epsilon$  (erro padrão da regressão) é possível obter os parâmetros da fórmula  $dx = \eta(\hat{x} - x)dt + \sigma dz$  por intermédio das equações:

$$\hat{x} = -a/b;$$

$$\eta = -\ln(1+b);$$

$$\sigma = \sigma_\epsilon \sqrt{\frac{2 \ln(1+b)}{(1+b)^2 - 1}}$$

O teste para um Processo de Reversão à Média segue um procedimento similar adotado para o MGB.

A partir da série  $\ln(x_t)$  será aplicada a regressão:

$$\ln(x_t) = a + b \ln(x_{t-1}) + \epsilon_t$$

Como comentado anteriormente, nos casos em que se tem  $0 < b < 1$  observa-se indícios de um movimento de reversão a média.

Conforme comentado anteriormente o teste também pode ser efetuado pela regressão:

$$\ln(x_t) - \ln(x_{t-1}) = a + (b-1)\ln(x_{t-1}) + \varepsilon_t$$

Nesse caso, verificam-se indícios de reversão à média no caso do coeficiente  $(b-1) < 0$ .

Outra análise comumente efetuada em processos de reversão à média é a chamada meia vida do processo (H), que consiste do tempo necessário para que o processo percorra metade da diferença do seu valor atual e da média de longo prazo. Essa medida pode ser calculada pela equação:

$$H = \frac{\ln(2)}{\eta}$$

### 3.5.2

#### **Modelo de Reversão à Média Geométrico (MRG) de Dixit & Pindyck (1994)**

Este modelo foi apresentado no livro de Dixit & Pindyck (1994) e consiste de uma alternativa ao MRA.

$$dx = \eta x(\bar{x} - x)dt + \sigma x dz$$

Todos os parâmetros do modelo são similares aos apresentados no MRA de Ornstein-Uhlenbeck.

Para obtenção da média e variância do processo é mais conveniente o trabalho com o logaritmo do preço ( $\ln(x)$ ), o que trivialmente pode ser obtido com o uso do Lema de Itô e, por conseguinte, permite a conversão do MRG em um MRA.

Um ponto positivo do modelo é que esse não permitirá o surgimento de valores negativos no processo. No entanto, a parametrização do modelo é problemática, dado que nas fórmulas dos parâmetros de reversão e média de longo prazo do MRA do  $\ln(x)$  teríamos funções com termos em  $x/\ln x$  que não são

constantes, condição essencial para estimação. Uma alternativa para solução desse problema é sugerida por Dias (2008), que indica o uso de um valor médio para o preço  $x$ .

### 3.5.3

#### Modelos de Schwartz (1997)

Schwartz (1997) propõe e compara 3 modelos que objetivam retratar o comportamento estocástico de preços baseados em movimentos de reversão à média, ressaltando a relevância da análise dos processos dos preços das commodities na determinação do valor de contratos de derivativos escritos sobre essas e na avaliação de projetos de ativos de produção.

O primeiro modelo contém apenas 1 fator estocástico que é o logaritmo do preço, que consiste de um processo de reversão à média. O segundo modelo possui 2 fatores estocásticos correlacionados: convenience yield, que obedece um processo de reversão à média, e preço seguindo um MGB. O terceiro modelo possui 3 fatores estocásticos correlacionados: convenience yield e taxas de juros obedecendo processos de reversão à média e preço seguindo um MGB.

Modelo de 1 Fator Estocástico de Schwartz (1997) – O modelo consiste de um MRG que usa como termo para reversão à média o logaritmo do preço no interior dos parênteses:

$$dS = \kappa S(\mu - \ln S)dt + \sigma Sdz$$

Usando o lema de Itô podemos encontrar  $dX$ , sendo  $X = \ln S$ :

$$dX = \kappa(\alpha - X)dt + \sigma dz$$

Sendo:

$$\alpha = \mu - \sigma^2/2\kappa;$$

$\kappa > 0$  é o parâmetro de reversão à média;

$\alpha$  é a média de longo prazo do log do preço;

$dz$  é um incremento de Wiener.

O modelo não apresenta o problema de estimação dos parâmetros de velocidade de reversão e média de longo prazo ( $\kappa$  e  $\alpha$  no caso), ocorrido no MRG de Pindyck e ainda preserva a propriedade de não gerar valores negativos para o preço do ativo (S). O desenvolvimento e demais formulações do Modelo de 1 Fator Estocástico de Shwartz estão disponíveis no Apêndice V.

Modelo de 2 Fatores de Schwartz (1997) – Neste modelo temos a presença de 2 fatores estocásticos correlacionados: o preço spot da commodity (S) seguindo um MGB e o convenience yield ( $\delta$ ) seguindo um MRA. As equações apresentadas a seguir apresentam os processos e descrevem seu relacionamento:

$$dS = (\mu - \delta)Sdt + \sigma_1 S dz_1$$

$$d\delta = \kappa(\alpha - \delta)dt + \sigma_2 dz_2$$

$$dz_1 \cdot dz_2 = \rho dt$$

Sendo:

$\mu$  é o parâmetro de crescimento dos preços da commodity;

$\sigma_1$  é o parâmetro da volatilidade do processo de preços da commodity;

$dz_1$  é o incremento de Wiener do processo de preços da commodity;

$\kappa > 0$ , parâmetro de reversão para à média do convenience yield estocástico;

$\alpha$  a média de longo prazo do log convenience yield estocástico;

$\sigma_2$  é o parâmetro da volatilidade do processo do convenience yield;

$dz_2$  é o incremento de Wiener do processo de preços do convenience yield;

$\rho$  é o parâmetro da correlação entre os incrementos dos 2 fatores.

O desenvolvimento e demais formulações do Modelo de 2 Fatores Estocástico de Shwartz estão disponíveis no Apêndice V.

Modelo de 3 Fatores de Schwartz (1997) – Neste modelo Schwartz contempla a presença de 3 fatores estocásticos correlacionados, sendo 2 os

mesmos apresentados no Modelo de 2 Fatores e o 3º a taxa de juros estocástica, seguindo também um MRA:

$$dS = (r-\delta)Sdt + \sigma_1 S dz_1^*$$

$$d\delta = \kappa(\alpha^*-\delta)dt + \sigma_2 dz_2^*$$

$$dr = a(m^*-r)dt + \sigma_3 dz_3^*$$

Sendo:

$$dz_1^*.dz_2^* = \rho_1 dt; \quad dz_1^*.dz_3^* = \rho_2 dt; \quad dz_2^*.dz_3^* = \rho_3 dt$$

Onde:

**a** é o coeficiente de ajuste da velocidade de reversão;

**m\*** é a média da taxa de juros de curto prazo ajustada ao risco do processo da taxa de juros.

Todos os demais parâmetros são semelhantes aos apresentados no Modelo de 2 Fatores. O desenvolvimento e demais formulações do Modelo de 3 Fatores Estocástico de Schwartz estão disponíveis no Apêndice V.

Um ponto extremamente relevante tratado no artigo é referente à dificuldade da implementação empírica de modelos de preços de commodities em função da existência de fatores não diretamente observáveis. Em muitos casos o próprio preço spot da commodity não é perfeitamente observável obrigando a utilizados de preços de contratos futuros com maturidade mais próxima como proxy. Outras variáveis, entre elas o convenience yield instantâneo, são ainda mais difíceis de serem estimadas. De forma diversa, contratos futuros são negociados em várias moedas e seus preços são mais facilmente observáveis.

Para solucionar o problema apresentado, partindo de séries históricas de contratos futuros e das formulações apresentadas, Schwartz utilizou o Filtro de Kalman para obtenção de estimativas das séries das variáveis de estado e dos parâmetros relativos aos modelos. Para tanto, primeiramente precisou conseguir representações em Espaço-Estado dos modelos propostos. Essa abordagem é a ferramenta adequada para lidar com situações que variáveis de estado não são

observáveis, porém é sabido que são geradas por um processo de Markov. Uma vez que o modelo foi colocado na abordagem Espaço-Estado, o filtro de Kalman, combinado com estimadores de máxima verossimilhança, pode ser utilizado para estimar os parâmetros do modelo e as séries temporais das variáveis de estado não observáveis. No artigo em questão o método foi aplicado para estimação dos 3 modelos em preços de 3 commodities distintas: cobre, petróleo e ouro. As formulações do Modelo Espaço-Estado Linear estão disponíveis no Apêndice V. As análises efetuadas revelaram uma forte reversão à média nos preços do cobre e petróleo, o mesmo não ocorrendo nos preços do ouro. A partir dos parâmetros estimados foram analisadas implicações de cada modelo na precificação de contratos futuros, derivativos financeiros e ainda possíveis decorrências na montagem de estratégias de cobertura (hedging) de entregas futuras. Foram avaliadas também as implicações da escolha do processo estocástico assumido para a commodity subjacente na valoração de projetos de ativos detentores de opções reais. Para tanto, foram efetuadas comparações do valor e a regra de decisão para projetos simples, assumindo diferentes premissas sobre os processos estocásticos para os preços. O estudo sugere que é bastante importante considerar a reversão à média dos preços na avaliação de projetos, pois o critério do fluxo de caixa induz a investimentos muito cedo e a abordagem das opções reais implica em investimentos muito tardios quando a reversão à média é negligenciada nos preços.

#### 3.5.4

#### **Modelo de 2 Fatores de Schwartz & Smith (2000)**

Schwartz & Smith (2000) propõem um modelo com 2 fatores estocásticos correlacionados não observáveis para descrição do comportamento dos preços de commodities, que somados formam o logaritmo do preço do ativo ( $\ln S_t$ ). O 1º fator, identificado por  $\chi$ , refletiria no modelo os desvios de curto prazo dos preços sendo esse um Movimento de Reversão à Média Aritmético com média nula. O 2º fator do modelo, identificado por  $\xi$ , seguiria por sua vez um MAB, tendo o papel de refletir a evolução para o nível de equilíbrio dos preços. Em termos econômicos, a presença do 1º fator definido como um MRA de Ornstein-

Uhlenbeck se justificaria, por exemplo, pelo fato de que no curto prazo os preços das commodities seriam influenciados por variações na demanda devidas a mudanças climáticas ou choques na oferta por conta de interrupções de suprimento, afetados ainda pela capacidade de resposta dos agentes no ajuste dos níveis de estoques às novas condições de mercado. O racional para inclusão do 2º fator, deriva da idéia que aspectos como expectativas de exaustão na oferta da commodity, melhorias nas técnicas utilizadas na sua exploração ou ainda questões como a inflação e eventuais incertezas políticas e regulatórias definiriam a tendência para os níveis de preços para o longo prazo. De forma diversa a outros modelos, não é utilizado como fator nessa proposição o convenience yield estocástico, como nos modelos de 2 e 3 fatores de Schwartz (1997).

As principais formulações apresentadas no artigo foram:

$$\ln S_t = \chi_t + \xi_t$$

Onde:

$S_t$  o preço spot da commodity;

$\chi_t$  o fator que representa os desvios de curto prazo nos preços;

$\xi$  o fator que determina a tendência de longo prazo dos preços.

Por sua vez, as formulações correspondentes aos processos estocásticos seriam:

$$d\chi_t = -\kappa\chi dt + \sigma_\chi dz_\chi$$

$$d\xi_t = \mu_\xi dt + \sigma_\xi dz_\xi$$

$$dz_\xi dz_\chi = \rho dt.$$

Onde:

$\kappa$  é o parâmetro de reversão à média do MRA;

$\sigma_\chi$  é a volatilidade do desvio de curto prazo nos preços;

$dz_\chi$  é o incremento de Wiener do desvio de curto prazo nos preços;

$\mu_\xi$  é o parâmetro do drift da tendência de longo prazo dos preços;

$\sigma_\xi$  é a volatilidade da tendência de longo prazo dos preços;

$dz_\xi$  é o incremento de Wiener da tendência de longo prazo dos preços;

$\rho$  é o parâmetro da correlação entre os incrementos dos 2 fatores.

O desenvolvimento e demais formulações do modelo de Schwartz & Smith (2000) estão disponíveis no Apêndice VI. Pelo fato dos 2 fatores do modelo não serem observáveis, os autores adotaram o mesmo expediente utilizado por Schwartz (1997): após conseguirem formulações que permitiram a colocação do modelo em uma representação espaço de estado, utilizando o Filtro de Kalman e estimadores de máxima verossimilhança foi possível estimação das séries temporais das variáveis de estado e dos parâmetros correspondentes aos processos definidos. Testes empíricos do modelo foram efetuados utilizando bases de preços futuros e contratos à termo de petróleo, utilizadas também no artigo de Schwartz (1997). Adicionalmente foram elaborados exemplos ilustrativos do uso do modelo em projetos com opções reais, que demonstram sua praticidade em termos de aplicação.

### 3.5.5

#### Modelos de Pindyck (1999)

Pindyck (1999) analisa o comportamento dos preços de 3 tipos de commodities do setor de energia – petróleo, carvão e gás natural – utilizando séries de 127 anos de dados e propõe, baseado no desempenho histórico, formas alternativas para sua modelagem estocástica. O autor comenta que idealmente o comportamento dos preços dessas commodities deveria poder ser explicado em termos estruturais – pelos movimentos de oferta e demanda no mercado e as variáveis que os determinam – no entanto pondera que os modelos estruturais não são devidamente aplicáveis para elaboração de previsões de longo prazo, em função da dificuldade inerente a projeção das variáveis explicativas dos modelos.

Como resultado, as projeções de longo prazo de preços de energia são efetuadas muitas vezes assumindo que esses preços crescem em termos reais a taxas fixas, buscando refletir a depleção das reservas desses recursos naturais. Tipicamente nesses casos, adicionalmente a tendência de crescimento, são incorporados choques estocásticos com a intenção de refletir a incerteza dos preços futuros, o que, em termos práticos corresponderia assumir que os preços se assemelhariam a um Passeio ao Acaso com Tendência ou um MGB. Alternativamente, em muitos casos é assumido que no curto prazo os preços possam vagar aleatoriamente em função de pressões momentâneas de oferta e demanda, mas que no longo prazo tendam a convergir para seu custo marginal de produção, o que por sua vez seria equivalente a dizer que os preços se assemelhariam a um MRM. A identificação e escolha do processo que melhor represente o comportamento dos preços de tais commodities têm sérias implicações na avaliação de investimentos, principalmente nos casos em que estiverem sendo consideradas opções reais nos projetos. Os testes efetuados com as séries preços apontaram – apesar da dificuldade de negar a presença de uma raiz unitária (equivalente a negar o MGB) – a presença de componentes de reversão à média no comportamento dos preços. Dessa forma, o autor propõe um modelo de reversão à média com tendência determinística para descrever o comportamento de preços de tais commodities, e ainda o estende para um modelo de múltiplos fatores estocásticos, onde a tendência de longo prazo seria também considerada estocástica. Pindyck propõe o Filtro de Kalman como modelo adequado para estimação de parâmetros no caso do modelo multifatorial.

A formulação abaixo foi apresentada na seção 4 do artigo corresponde ao modelo de reversão a média com tendência quadrática para o log do preço de commodities do setor de energia, sobre o qual posteriormente foram efetuadas extensões para modelos multifatoriais:

$$dp = [-\gamma(p - \alpha_0 - \alpha_1 t - \alpha_2 t^2) + \alpha_1 + 2\alpha_2 t]dt + \sigma dz$$

Onde:

$p$  é o log do preço da commodity;

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  são parâmetros da tendência quadrática do log dos preços;

$t, dt$  são respectivamente o tempo e a variação infinitesimal do tempo

$\sigma$  é o parâmetro de volatilidade;

$dz$  é um incremento de Wiener.

Para melhor entendimento do modelo e comparações e desenvolvimentos futuros ainda nesta tese, podemos simplificá-lo para:

$$dp = \gamma(A - p)dt + dA + \sigma dz$$

Onde:

$$A = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$$

$$dA = (\alpha_1 + 2\alpha_2 t)dt$$

Nesta equação o termo  $A$  corresponde a tendência quadrática de longo prazo de preços e a inclusão do termo  $dA$ , correspondente ao diferencial de  $A$ , se faz necessária para que o processo reverta para o correto nível de equilíbrio de preços como demonstrado por Dornier e Queruel (2000).

### 3.6

#### Processos de Poisson

Processos de Poisson são processos Markovianos (não são Processos de Itô) nos quais temos a ocorrência de saltos discretos e infreqüentes no tempo, muito utilizados na modelagem de eventos raros como, por exemplo, a ocorrência de sinistros na indústria de seguros, o efeito de crises gerando salto nos preços do petróleo, etc. Nesse processo a chegada dos saltos segue uma distribuição de Poisson, sendo possível trabalhar com saltos de tamanho fixo ou variável (seguindo uma determinada distribuição). É comum em finanças a combinação de Processos de Poisson com Processos de Itô.

Definição Formal: Seja  $x$  um processo estocástico de Poisson, no qual toda a aleatoriedade do processo é concentrada na chegada de saltos que possuem

tamanho determinado pela função  $g(x,t)$ . O Processo de Poisson pode ser descrito pela equação diferencial:

$$dx = f(x,t)dt + g(x,t)dq$$

Sendo:

$f(x,t)$  e  $g(x,t)$  funções determinísticas e conhecidas;

$dq$  um incremento de Poisson.

Os parâmetros típicos do Processo de Poisson são:

$\lambda$  que corresponde a taxa média da ocorrência do salto por período de tempo;

$\lambda dt$  correspondente a probabilidade de ocorrência do salto;

$1 - \lambda dt$  a probabilidade de não-ocorrência do salto;

$u$  indicando o tamanho do salto;

$q$  representando a aleatoriedade do Processo de Poisson.

Existem diferentes tipos de processos de Poisson. Os processos de Poisson podem ser Homogêneos, que consistem de processos de Markov com eventos aleatórios e incrementos independentes e estacionários, que somente dependem da variação do tempo. O número de saltos tem distribuição de Poisson e o tempo de ocorrência de eventos em  $\Delta t$  tem distribuição exponencial com média  $1/\lambda$ .

Outro tipo seria os processos de Poisson Não-Homogêneos, nos quais é dispensado o suposto estacionariedade dos incrementos, sendo ainda a frequência de ocorrência dos saltos uma função do tempo.

Existem também os processos de Poisson Compostos, nos quais verificam-se, adicionalmente a aleatoriedade na ocorrência dos saltos (seguindo um processo de Poisson), saltos com tamanho estocástico obedecendo a uma determinada distribuição de probabilidade.

Por fim, dentre os processos mencionados, encontram-se os processos de Poisson Compensados, que são obtidos pela subtração da tendência do processo determinando a sua conversão num martingal.

### 3.7

#### Processos Mistos de Difusão com Saltos

É possível fazer uma combinação de um Processo de Itô e um Processo de Poisson, considerando que  $dx$  comporte-se da maneira:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz + g(x,t)dq$$

Sendo:

$dz$  um Processo de Wiener;

$dq$  um Processo de Poisson independente de  $dz$ .

Merton (1976) justificou esse modelo para ações, considerando que em caso de notícias normais  $x$  segue um processo de difusão MGB e no caso de notícias anormais (raras e com muito impacto) ocorreria um salto de Poisson, encontrando uma solução analítica para opções europeias, considerando uma distribuição lognormal para o tamanho dos saltos. Utilizou-se ainda um Processo de Poisson Compensado para transformar o diferencial em um martingal:

$$dx = [a(x,t) - \lambda k]dt + b(x,t)dz + g(x,t)dq$$

Sendo:

$$E[dq] = E[\Phi]\lambda dt = k\lambda dt;$$

$$a(x,t) = \alpha x.$$

Dias & Rocha (1998) desenvolveram um modelo similar substituindo o MGB por um MRG:

$$dx/x = [\eta(\dot{x} - x) - \lambda k]dt + \sigma dz + dq$$

Neste modelo, de forma similar ao modelo anterior de Merton (1976), notícias normais causam ajustes marginais no preço, enquanto notícias anormais causam saltos discretos.

De acordo com Dias (2008), um dos principais benefícios no uso de processos de difusão com saltos, é que estes parecem descrever melhor a realidade, por explicarem fenômenos empíricos encontrados em séries temporais, tais como assimetria de retornos e distribuição com caudas longas. Adicionalmente, evitam o excesso de previsibilidade no caso da combinação com um processo de reversão à média. Como desvantagem, é citado que a existência de saltos teoricamente impossibilita a construção de um portfólio sem risco, a menos que os saltos sejam descorrelacionados com a economia (sem risco sistemático) como suposto por Merton (1976). Outra desvantagem seria o aumento do número de parâmetros a ser estimado (taxa de ocorrência e tamanho dos saltos), o que no caso de eventos raros, torna-se um problema adicional pela escassez de informações.

### 3.8

#### **Discussão sobre Processos Estocásticos e a Análise de Opções Reais em Projetos no Setor Siderúrgico**

Como definido no início deste capítulo, o objetivo deste estudo é de analisar os principais processos estocásticos utilizados em finanças, com intuito de definir um modelo adequado e aplicável à avaliação de projetos no setor siderúrgico. Na escolha desse modelo, entende-se que diversos aspectos devem ser considerados, com destaque para as características econômicas do setor siderúrgico e os impactos nos preços do aço; a vida útil dos projetos na siderurgia; a disponibilidade de informações para estimação de parâmetros do modelo estocástico; e a aplicabilidade do processo escolhido nas soluções (analíticas ou numéricas) dos modelos usados para valoração.

De uma forma geral, se o tempo de vida do ativo for relativamente curto, o aprofundamento na pesquisa para determinação do processo estocástico pode ser considerado uma questão de menor relevância, permitindo sua escolha em função

da facilidade de obtenção de parâmetros e da construção do modelo de avaliação. Dixie & Pindyck (1994) demonstram que em períodos curtos de tempo, processos de preços são dominados prioritariamente por choques estocásticos, enquanto, à medida que o tempo passa o processo passa a ser mais influenciado pelo componente que determina sua tendência. Dessa forma, como em grande parte dos modelos apresentados a aleatoriedade está representada por incrementos de Wiener, a busca de um processo estocástico mais adequado ao comportamento de preços pode ser considerada uma tarefa de alto custo frente aos benefícios a serem obtidos. De certa maneira, esta pode ser considerada uma das principais razões da popularidade do Movimento Geométrico Browniano nos modelos adotados na precificação de derivativos financeiros, como futuros e opções escritos sobre ações. As grandes vantagens do MGB frente aos demais modelos são: sua simplicidade matemática, o reduzido número de parâmetros para estimação e a maior facilidade de obtenção de soluções analíticas na valoração de ativos. O fato, porém, de seus dois primeiros momentos poderem divergir à medida que o tempo evolui, pode acarretar a geração de cenários não-realísticos para preços no longo prazo, o que consistiria de um problema no caso de projetos de longa maturação.

O aço é uma commodity de grande variabilidade de preços. Como verificado em outras commodities como petróleo, cobre, açúcar e álcool, entende-se que seus preços possam ser guiados parcialmente por um componente de reversão à média, que faz com que estes (preços) vaguem aleatoriamente no curto prazo em função de pressões de oferta e demanda, mas no longo prazo tendem a convergir para o custo marginal de produção. Esta análise pode ser determinante para avaliação de projetos, pois, como comentado em Schwartz (1997), a abordagem das opções reais pode implicar em investimentos muito tardios quando a reversão à média é negligenciada nos preços.

Ocorre, porém, como considerado por Dias (2008), que um processo puro de reversão à média para um nível fixo pode se demonstrar demasiadamente previsível e por isso ser eventualmente pior que o MGB. Como alternativa, para melhoria do Movimento de Reversão à Média, sugere combiná-lo com outros processos, por exemplo: com o MGB para o nível de equilíbrio, como feito nos modelos 2 e 3 de Schwartz (1997), Pindyck (1999) e Schwartz & Smith (2000) ou

com um Processo de Poisson, como efetuado por Dias & Rocha (1998). Dias & Rocha classificam tais modelos como “Modelos Estocásticos Mais Realistas”.

A análise de algumas questões econômicas ligadas à produção de aço leva a acreditar que além do componente de reversão à média, os processos de preços dos produtos siderúrgicos podem possuir também componentes de tendência ascendente, que em termos práticos elevaria a média de longo prazo à medida que o tempo evolui. Importantes insumos para produção do aço, como minério de ferro, carvão e energia vêm no decorrer dos últimos anos sofrendo progressivas elevações de preço, o que conseqüentemente altera o custo marginal de produção do aço. Estes aumentos possuem razões adicionais aos descompassos momentâneos de oferta e demanda (capturados pelo MRM), sendo devidos também a mudanças estruturais nos mercados produtores dos insumos, a progressiva escassez dos recursos naturais e ainda em função de custos incrementais provenientes do aumento de exigências das legislações ambientais. Tal fato pode ser observado no gráfico 14, referente à evolução índice de preço da placa de aço divulgado no período de janeiro de 2000 a julho de 2009.



Gráfico 13 - Placas de aço - Índice de Preços de Placas de Aço.  
Fonte: IBS, elaborado pelo autor.

Dessa forma, após a análise comparativa dos diversos modelos apresentados, entende-se que os modelos 2 e 3 de Schwartz (1997) e Schwartz & Smith (2000), que combinam fatores MGB e MRM, possuem características que o tornariam bons candidatos para descrever o comportamento dos preços do aço na

modelagem das opções reais em projetos de investimento na siderurgia. No entanto, existe uma dificuldade na adoção desses modelos no caso dos preços dos produtos siderúrgicos, em função da carência de dados estatísticos de boa qualidade para estimação de seus parâmetros. Conforme comentado anteriormente, para obtenção da estimativa dos parâmetros Schwartz (1997) e Schwartz & Smith (2000) seriam necessários preços futuros de commodities, utilizando a abordagem espaço-estado/filtro de Kalman. Ocorre, porém, que a existência de preços futuros de aço em mercados organizados é extremamente recente, sendo esses contratos definidos para rotas e especificações muito restritas e com poucas opções de maturidade. Mais especificamente, dois contratos à termo de aço, um com vencimento em 3 meses e outro com 15 meses, são negociados desde maio de 2008 na Bolsa de Metais de Londres (London Metal Exchange – LME), para as regiões do Mediterrâneo e Extremo Oriente. Cabe ainda observar, que no processo de estimação de parâmetros de tendência recomenda-se geralmente o uso de séries longas de tempo. Dias (2008) justifica tal procedimento apontando que a variância do estimador do drift é inversamente proporcional ao tempo, o que determina que com períodos mais extensos os estimadores tendem a ser mais eficientes. Adicionalmente, Dias comenta que muitos trabalhos tem sido efetuados utilizando dados de períodos curtos (2 a 5 anos) para estimação de parâmetros reversão à média, o que o autor considera um erro, chamando tais estimadores de “não-confiáveis”. No caso em questão, além do período ser extremamente curto, pouco mais de 2 anos até a presente data, os dados poderiam estar viesados tendo em vista a crise econômica que assolou o mundo no 3º trimestre de 2008 e que ainda não teve seus efeitos totalmente dissipados. Como é possível observar no gráfico 14, a tendência estimada para o período considerado seria fortemente negativa, o que contrariaria a teoria de que os preços tenderiam a subir à medida que o tempo passa e os próprios resultados obtidos a partir de séries de preço spot mais longas.

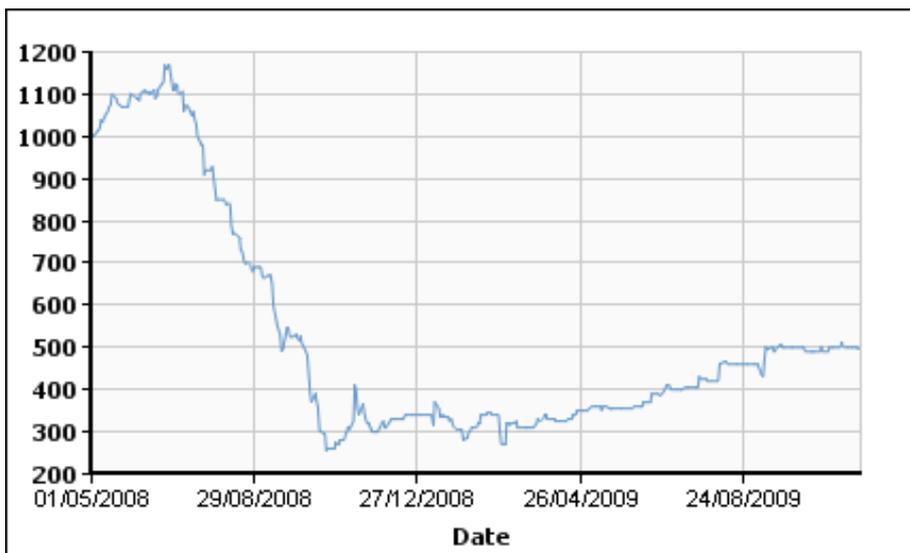


Gráfico 14 - LME Steel Billet – Far Fast – 3 months seller.  
 Fonte: LME – London Metal Exchange

É possível, porém, obter uma alternativa no que se refere à incorporação de uma tendência ascendente ao MRM, partindo de preços spot históricos de produtos siderúrgicos e sem a utilização do modelo Espaço-Estado/Filtro de Kalman, como efetuado para preços de petróleo e carvão em Pyndick (1999)). Essa abordagem alternativa corresponderia a inclusão de um componente de tendência determinístico no modelo 1 de Schwartz (1997), sendo possível a estimativa dos parâmetros a partir de séries de preços spot por intermédio do método dos Mínimos Quadrados Não-Lineares e se diferencia fundamentalmente do modelo de Schwartz & Smith (2000) no fato de que nesse último o drift consiste de um processo estocástico (MGB).

Na sequência (seções 3.8.1 e 3.8.2) serão apresentadas as formulações do modelo proposto, bem como os passos para sua discretização e obtenção de parâmetros. Na seção 3.8.3 são descritos 3 tipos de Medidas de Aderência, que serão utilizadas posteriormente para análise comparativa dos processos. Na seção 3.8.4 será apresentada a base de dados de preços de produtos siderúrgicos. Na seção 3.8.5 serão apresentados os resultados das estimações dos parâmetros de três modelos distintos de processos estocásticos: MGB, MRM (modelo 1 de Schwartz (1997)) e a nova abordagem que será denominada de MRM com Tendência. Por fim, ainda na seção 3.8.5, serão apresentados testes comparativos

e análises das performances dos 3 modelos na previsão de preços de produtos siderúrgicos.

### 3.8.1

#### Proposição de Modelo

Nesta seção será proposto um modelo que denominarei Movimento de Reversão à Média com Tendência. De maneira similar a Pyndick (1999)<sup>1</sup> neste modelo o nível para qual o processo reverte é crescente no tempo de forma determinística. A maior vantagem desta abordagem é a possibilidade da estimação de seus parâmetros a partir de preços spot históricos, não havendo a necessidade da utilização modelo Espaço-Estado/Filtro de Kalman.

Seja  $S_t$  o preço spot da commodity um processo estocástico cujo logaritmo será denominado  $Y_t$  cuja formulação do diferencial é dada por:

$$dY_t = \kappa(C_t - Y_t)dt + dC_t + \sigma dz$$

Onde:

$C_t$  é a tendência de longo prazo linear em  $t$ , determinística e não observável de  $Y_t$ ;

$\kappa$  é o parâmetro da velocidade de reversão;

$\sigma$  é o parâmetro da volatilidade do processo;

$dz$  é um incremento de Wiener.

Como mostrado por Dornier e Queruel (2000), a inclusão do termo  $dC_t$  se faz necessária para que o processo realmente reverta para o nível de equilíbrio de preços  $C_t$ . Este tratamento é análogo ao utilizado por Pyndick (1999). Considerando que  $C_t$  é linear em  $t$ , temos que  $dC_t = cdt$  o que possibilita ainda

---

<sup>1</sup> Pyndick (1999) propõe um modelo de reversão à média para preços de commodities como petróleo e carvão, cujo nível de equilíbrio do logaritmo dos preços apresenta uma tendência quadrática no tempo.

simplificar a expressão do diferencial de  $Y_t$ , conforme demonstrado na formulação abaixo;

$$dY_t = -\kappa X_t dt + c dt + \sigma dz$$

Onde:

$$X_t = Y_t - C_t$$

Como  $Y_t$  tem distribuição normal com média e variância dadas por:

$$E_0[Y_T] = e^{-\kappa T} X_0 + C_0 + cT$$

$$Var_0[Y_T] = (1 - e^{-2\kappa T}) \frac{\sigma^2}{2\kappa}$$

O preço spot  $S_t$  terá, por conseguinte, distribuição log-normal, o que implica que seu valor esperado será dado por:

$$E_0[S_T] = \exp(E_0[Y_T] + \frac{1}{2} Var_0[Y_T])$$

$$E_0[S_T] = \exp\left(e^{-\kappa T} X_0 + C_0 + cT + \frac{1}{2} (1 - e^{-2\kappa T}) \frac{\sigma^2}{2\kappa}\right)$$

ou na forma de log:

$$\ln E_0[S_T] = e^{-\kappa T} X_0 + C_0 + cT + \frac{1}{2} (1 - e^{-2\kappa T}) \frac{\sigma^2}{2\kappa}$$

### 3.8.2

#### Modelo Empírico: Discretização, Estimação de Parâmetros e Simulação Neutra ao Risco

De forma distinta aos modelos de Schwartz (1997) e Schwartz & Smith (2000), nos quais os parâmetros foram estimados a partir de preços futuros de commodities, por intermédio da aplicação do Filtro de Kalman em conjunto com Estimadores de Máxima Verossimilhança, no caso em questão os parâmetros

serão estimados pelo método dos Mínimos Quadrados Não-Lineares, a partir de preços spot.

Os seguintes parâmetros deverão ser estimados:

$C_0$  - o valor inicial da tendência de longo prazo dos preços;

$c$  - o parâmetro de drift de  $C_t$ ;

$\sigma$  - o parâmetro da volatilidade do processo;

$\kappa$  - o parâmetro da velocidade de reversão à média do processo  $X_t$ .

Considerando que:

$$Y_t = X_{t-1}e^{-\kappa\Delta t} + C_{t-1} + c\Delta t + \varepsilon_t$$

$$Y_{t-1} = X_{t-1} + C_{t-1}$$

Pode-se chegar às seguintes expressões referentes à diferença do logaritmo dos preços em tempo discreto:

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = (e^{-\kappa\Delta t} - 1)X_{t-1} + c\Delta t + \varepsilon_t$$

$$\Delta Y_t = (e^{-\kappa\Delta t} - 1)(Y_{t-1} - C_{t-1}) + c\Delta t + \varepsilon_t$$

$$\Delta Y_t = (e^{-\kappa\Delta t} - 1)(Y_{t-1} - C_0 - c\Delta t \times (t-1)) + c\Delta t + \varepsilon_t$$

$$E(\Delta Y_t | Y_{t-1}) = (e^{-\kappa\Delta t} - 1)(Y_{t-1} - C_0 - c\Delta t \times (t-1)) + c\Delta t$$

A estimação dos parâmetros, de maneira simultânea, pode ser feita mediante Mínimos Quadrados Não-Lineares (vide, por exemplo, Greene (2000), cap. 10), método que é implementado pela escolha numérica dos valores dos parâmetros que minimizam a soma dos quadrados dos resíduos.

Clarificando: Seja  $\psi = (\alpha; c; C_0; \kappa)$  o vetor de parâmetros do modelo presentes em  $E(\Delta Y_t | Y_{t-1})$ . A estimativa de mínimos quadrados de  $\psi$ , denotada por  $\hat{\psi}$ , é, por definição, o ponto de mínimo da seguinte função:

$$Q(\psi) = \sum_{t=2}^n \varepsilon_t^2 = \sum_{t=2}^n [\Delta Y_t - E(\Delta Y_t | Y_{t-1})]^2.$$

Tal procedimento, nesta Tese, foi implementado pelo software E-Views ([www.eviews.com](http://www.eviews.com)). Por fim, a estimativa do parâmetro da volatilidade do processo  $\sigma$ , pode ser obtida diretamente do erro padrão da regressão ou por intermédio da expressão:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{t=2}^n \varepsilon_t^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{t=2}^n [Y_t - E(Y_t | Y_{t-1})]^2}{n-1}}$$

Para obtenção da equação de simulação neutra ao risco será necessário estimar o prêmio de risco normalizado do processo do logaritmo dos preços ( $\lambda$ ) e posteriormente subtrai-lo do processo real. A estimação do prêmio de risco pode ser efetuada pelo método descrito por Hull (2006) (vide, Hull (2006, cap. 31) e utilizado nos trabalhos de Irwin (2003), Brandão e Saraiva (2007), Blank, Baidya e Dias (2009). O método estima o prêmio a partir da correlação dos retornos do ativo e dos retornos do mercado, da volatilidade dos retornos do ativo, volatilidade dos retornos do mercado e do prêmio de risco de mercado, conforme demonstrado na equação apresentada a seguir:

$$\pi_i = \frac{\rho_{i,m} \sigma_i}{\sigma_m} \pi_m$$

Onde:

$\pi_i$  é o prêmio de risco do processo de preços do ativo i;

$\rho_{i,m}$  é a correlação dos retornos do ativo i com mercado;

$\sigma_i$  é a volatilidade dos retornos do ativo i;

$\sigma_m$  é a volatilidade dos retornos do mercado;

$\pi_m$  é o prêmio de risco do mercado.

De posse dos parâmetros estimados a simulação neutra ao risco do modelo será dada por:

$$S_t = \exp \left[ X_{t-1} e^{-\kappa \Delta t} + C_{t-1} + c \Delta t - (1 - e^{-\kappa \Delta t}) \lambda + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa \Delta t}}{2\kappa}} N(0,1) \right]$$

Onde:

$$\lambda = \frac{\pi}{\kappa} \text{ é o prêmio de risco normalizado.}$$

### 3.8.3

#### Medidas de Aderência

Para análise comparativa do MRM com Tendência com outros modelos mais comumente utilizados na avaliação de opções reais – MGB e MRM – podem ser utilizadas Medidas de Aderência “dentro da amostra”, que partem dos resultados estimados “um passo à frente” dos modelos e das observações das séries de preços correspondentes. Sugere-se a utilização de 3 metodologias: Pseudo  $R^2$ , Erro Médio Quadrático (EQM) e Erro Percentual Absoluto Médio (MAPE).

O Pseudo  $R^2$  consiste do quadrado da correlação entre os valores das séries de preço e as previsões um passo à frente estimadas correspondentes ao mesmo período das observações de preço. Valores maiores (mais próximos a 1) do Pseudo  $R^2$  indicam em tese uma maior aderência do modelo testado. A formulação do Pseudo  $R^2$  é dada por:

$$Pseudo R^2 = [\rho(S_t, E(S_t|S_{t-1}))]^2$$

Onde:

$\rho(a,b)$  - correlação entre a e b;

$S_t$  - observações da série de preços;

$E(S_t|S_{t-1})$  - valores estimados um passo à frente das observações de preço.

A segunda medida de aderência proposta é o Erro Médio Quadrático, que consiste da média dos quadrados da diferença entre os valores estimados um passo à frente e o valor real das observações da série de preços. Menores valores encontrados para o EQM indicariam uma melhor capacidade preditiva do modelo testado. A formulação do EQM é dada por:

$$EQM = Média \left\{ [S_t - E(S_t|S_{t-1})]^2 \right\}$$

Onde:

*EQM* - Erro Médio Quadrático

$S_t$  - observações da série de preços;

$E(S_t|S_{t-1})$  - valores estimados um passo à frente das observações de preço.

A terceira medida de aderência proposta é o e Erro Percentual Absoluto Médio, que consiste da média dos módulos das diferenças dos valores estimados um passo à frente e os valores reais das observações da série de preços padronizados pelos valores reais das observações da série de preços. De forma similar ao EQM, menores valores encontrados para o MAPE indicariam uma melhor capacidade preditiva do modelo testado. A formulação do MAPE é dada por:

$$MAPE = Média \left\{ \frac{|S_t - E(S_t|S_{t-1})|}{S_t} \right\}$$

Onde:

*MAPE* - Erro Percentual Absoluto Médio

$S_t$  - observações da série de preços;

$E(S_t|S_{t-1})$  - valores estimados um passo à frente das observações de preço.

### 3.8.4

#### Descrição da Base de Dados

A base de dados para testes do modelo proposto consiste de séries históricas de índices mensais de preços spot do aço obtidas junto ao IBS e à Bloomberg.

As informações obtidas junto ao IBS compreendem o período que vai de janeiro de 2000 a abril de 2009 e são referentes a 6 tipos distintos de índices de produtos siderúrgicos comercializados no Brasil: Aços Planos Não Revestidos; Placas de Aço; Perfis de Aço; Lingotes, Blocos e Tarugos; Barras de Aço; Aços Planos Revestidos. Os valores dos 6 índices analisados podem ser vistos no gráfico 15:

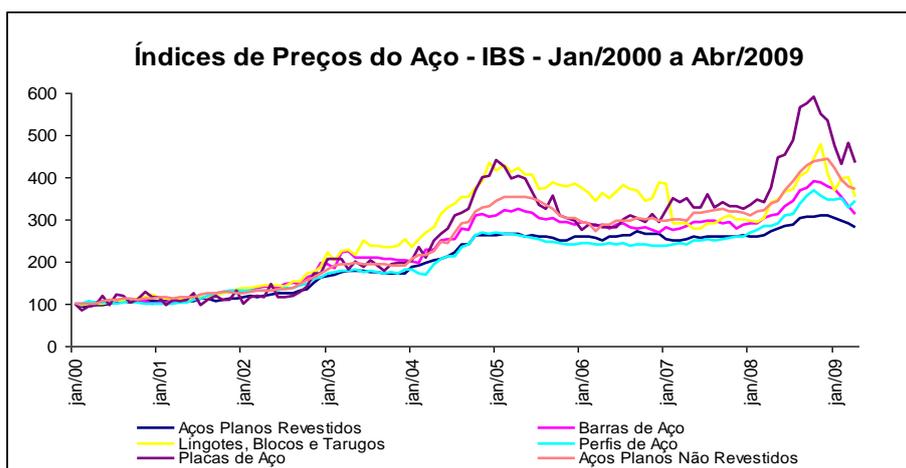


Gráfico 15 - Índices de Preços do Aço no Período de Jan/2000 a Abr/2009.  
Fonte: IBS, elaborado pelo autor.

Para obtenção de retornos em termos reais, as 6 séries do IBS de índices foram deflacionadas pelo IGP-DI, conforme pode ser observado no gráfico 16:

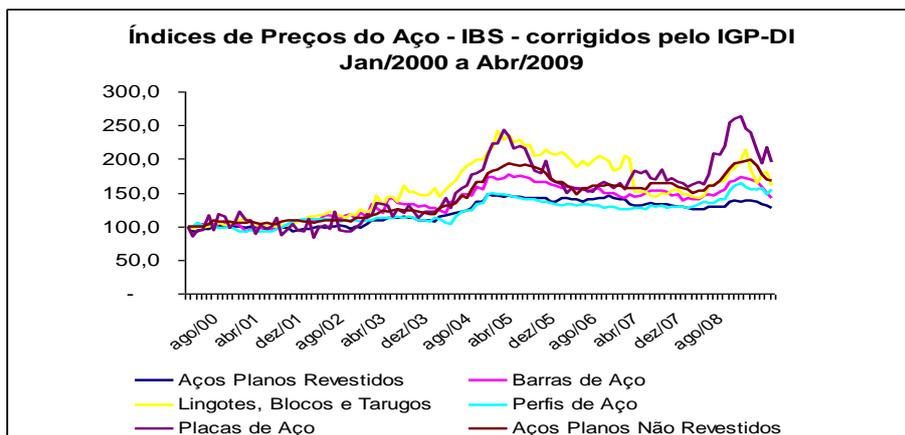


Gráfico 16 - Índices de Preços do Aço deflacionados pelo IGP-DI no Período de Jan/2000 a Abr/2009

Fonte: IBS e BACEN, elaborado pelo autor.

As informações obtidas junto ao Bloomberg compreendem um período mais longo que vai de janeiro de 1996 a dezembro de 2009 e são referentes ao índice de Placas de Aço comercializado na América Latina. Os valores históricos (nominais e deflacionados) do índice analisado podem ser vistos nos gráficos 17 e 18:

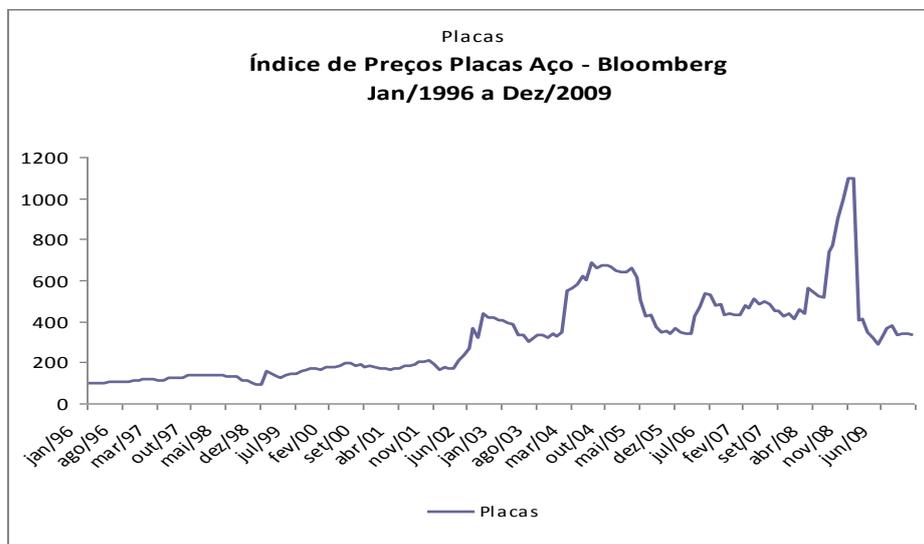


Gráfico 17 - Índice de Preços Placas de Aço no Período de Jan/1996 a Dez/2009. Fonte: Bloomberg, elaborado pelo autor.

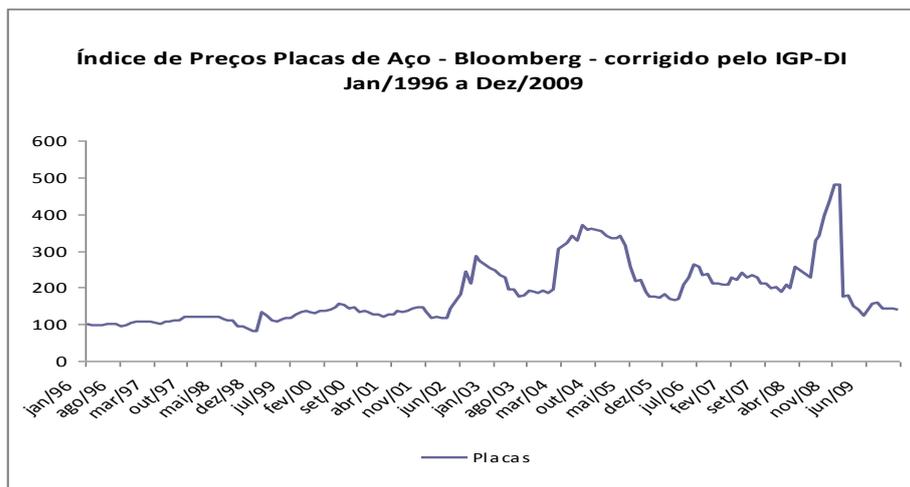


Gráfico 18 - Índice de Preços Placas de Aço deflacionado pelo IGP-DI no Período de Jan/1996 a Dez/2009.

Fonte: Bloomberg e BACEN, elaborado pelo autor.

### 3.8.5

#### Resultados Empíricos: Parâmetros Estimados, Testes do Processo e Análise dos Resultados

Como aplicação da metodologia proposta na seção 3.8.2 foram estimados os parâmetros do Modelo de Reversão à Média com Tendência utilizando as séries de preços deflacionadas dos 6 índices de preços de aços disponíveis. Adicionalmente, utilizando a mesma base de dados, foram estimados os parâmetros supondo que os preços do aço se comportam como MGB e MRM (Modelo 1 de Schwartz (1997)), permitindo que fossem efetuadas comparações entre os 3 modelos analisados.

Utilizando as séries de log-retornos dos 6 tipos de aços com índices preços deflacionados do IBS, foram estimados os parâmetros do drift ( $\mu - \sigma^2/2$ ) e volatilidade ( $\sigma$ ) supondo que os preços do aço seguissem um MGB. Na sequência, supondo que os preços seguissem um MRM (Modelo 1 de Schwartz (1997)) foram estimados os parâmetros (em termos anuais): velocidade de reversão ( $\kappa$ ), volatilidade ( $\sigma$ ), média de longo prazo dos log-retornos ( $\alpha$ ) e meia vida do processo ( $H$ ). Foi aplicado também o Teste de Dickey-Fuller Aumentado com Tendência a partir da regressão dos log-retornos ( $\Delta \ln S_t$ ) sobre os log dos preços defasados ( $\ln S_{t-1}$ ). Os resultados obtidos estão apresentados na tabela 13.

Tabela 13 - Parâmetros dos Modelos MGB e MRM estimados a partir das séries de Índices de Preços do Aço (IBS) deflacionados pelo IGP-DI no Período de Jan/2000 a Abr/2009.

Tipos de Aço	MGB		MRM				Teste Dickey-Fuller
	$\mu - \sigma^2/2$	$\sigma$	$\kappa$	$\alpha$	$\sigma$	H	Stat t
Planos Revestidos	2,59%	8,01%	0,1940	0,0775	8,10%	3,57	-2,800
Barras	3,74%	13,71%	0,3997	0,1583	13,90%	1,73	-1,747
Ling., Blocos e Tarugos	5,06%	19,83%	0,4016	0,1638	20,11%	1,73	-1,399
Perfis	4,74%	9,30%	0,1285	0,0544	9,42%	5,39	-3,129
Placas	7,27%	34,32%	0,6699	0,2615	35,10%	1,03	-3,313
Planos Não Revestidos	5,56%	9,84%	0,1803	0,0770	9,94%	3,84	-1,267

Fonte: Elaborado pelo autor.

Considerando um nível de significância de 90%, valores inferiores a -3.1516 para estatística T (Stat T) sugeririam a rejeição da hipótese nula ( $H_0$ ), caso não ocorrido em 5 das 6 séries testadas. A exceção foi obtida no teste efetuado nas séries de placas de aço, produto com menor nível de valor agregado e diferenciação de todos os casos analisados e também que apresenta o maior parâmetro de velocidade de reversão à média (Gráfico 19).

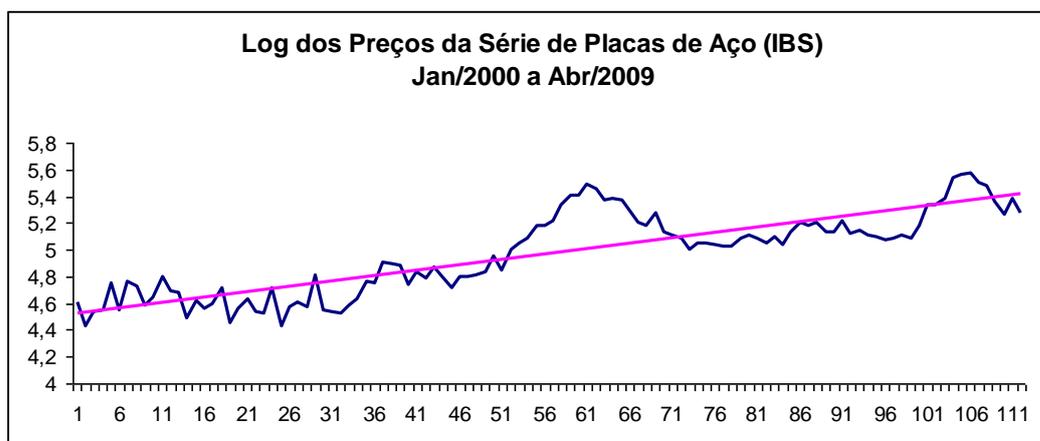


Gráfico 19 - Log dos Preços da Série de Placas de Aço (IBS) deflacionada pelo IGP-DI no Período de Jan/2000 a Abr/2009.

Fonte: Fonte: Elaborado pelo autor.

Aplicando a metodologia proposta na seção 3.8.2 nas 6 séries deflacionadas de índices de preços de aços do IBS disponíveis, foram estimados os parâmetros em termos anuais do Modelo de Reversão à Média com Tendência: o valor inicial da tendência de longo prazo ( $C_0$ ) o drift da tendência de longo prazo dos preços ( $c$ ), a velocidade de reversão ( $\kappa$ ), a volatilidade ( $\sigma$ ) e a meia vida do processo ( $H$ ).

Tabela 14 - Parâmetros do Modelo MRM com Tendência estimados a partir das séries de Índices de Preços do Aço (IBS) deflacionados pelo IGP-DI no Período de Jan/2000 a Abr/2009.

Tipos de Aço	MRM com Tendência				
	$C_0$	$c$	$\kappa$	$\sigma$	$H$
Planos Revestidos	4,6809	2,29%	0,2923	7,96%	2,37
Barras	4,7509	3,27%	0,6622	13,51%	1,05
Ling., Blocos e Tarugos	4,9843	2,01%	0,4714	19,59%	1,47
Perfis	4,5321	5,36%	0,8589	9,13%	0,81
Placas	4,5130	9,60%	2,4003	36,40%	0,29
Planos Não Revestidos	4,7840	4,12%	0,3208	10,01%	2,16

Fonte: Elaborado pelo autor.

Como pode ser verificado pela comparação das tabelas 13 e 14, o parâmetro de tendência do novo modelo apresenta valor inferior ao drift do MGB em 4 das 6 séries de preço, exceto nas séries de Perfis e Placas de aço, onde o inverso ocorre. É possível observar que as o modelo de Reversão à Média com Tendência apresenta parâmetros de velocidade reversão substancialmente superiores que o Reversão à Média, o que por sua vez determina queda em todas as meia-vida dos processos ( $H$ ). Como exemplo, temos o caso dos Aços Planos Não Revestidos, para qual foi estimada uma meia vida de 3,84 anos no modelo de Reversão à Média tendo sido reduzida para 2,37 anos no MRM com Tendência. Pode ser observado também, que os parâmetros de volatilidade ( $\sigma$ ) estimados para o MRM com Tendência se demonstram não muito distintos aos casos do MGB e MRM.

Com o intuito de analisar a capacidade preditiva dos 3 tipos de processos – MGB, MRM e MRM com Tendência – foram aplicadas medidas de aderência descritas na seção 3.8.3 do presente capítulo – Pseudo  $R^2$ , EQM e MAPE. A tabela 15 apresenta os resultados obtidos para as 6 séries de preços de aço das quais foram estimados os parâmetros dos 3 modelos comparados.

Tabela 15 - Resultados das Medidas de Aderência – Pseudo R<sup>2</sup>, EQM e MAPE – dos 3 Tipos de Processo – MGB, MRM e MRM com Tendência – sobre as 6 Série de Preços de Aço (IBS) deflacionadas pelo IGP-DI no Período de Jan/2000 a Abr/2009.

Tipos de Aço	Pseudo R <sup>2</sup>			EQM			MAPE		
	MGB	MRM	MRMc/Tend.	MGB	MRM	MRMc/Tend.	MGB	MRM	MRMc/Tend.
Planos Revestidos	97,718%	97,722%	97,715%	7,536	7,494	7,525	1,587	1,527	1,594
Barras	95,440%	95,449%	95,444%	27,757	27,195	27,240	2,641	2,576	2,608
Ling., Blocos e Tarugos	94,598%	94,626%	94,594%	91,025	88,693	89,208	3,951	3,937	3,924
Perfis	96,581%	96,583%	96,666%	10,909	10,964	10,539	1,836	1,790	1,815
Placas	91,853%	91,840%	91,944%	174,330	172,535	169,017	7,542	7,401	7,355
Planos Não Revestidos	98,017%	98,023%	98,015%	19,172	19,161	19,026	2,073	2,031	2,119

Fonte: Elaborado pelo autor.

De forma geral, nos 3 tipos de medidas aplicadas, os modelos MRM e MRM com Tendência se demonstraram levemente superiores ao MGB o que não permite concluir quanto a inferioridade ou inadequação do MGB como modelo para os preços do aço, havendo necessidade de elaboração de outros tipos de análises para essa confirmação. Porém, especificamente para série de preços de Placas de Aço, justamente a série em que foi rejeitada a hipótese da presença da raiz unitária, foi também demonstrada maior aderência do MRM com Tendência pelos 3 tipos de medidas analisadas.

Adicionalmente à estimação de parâmetros e conjuntos de medidas de aderência efetuadas com as séries provenientes do IBS, foram efetuados os mesmos procedimentos com a série do índice de placas de aço da América Latina proveniente da Bloomberg. Essa última série tem como vantagem a cobertura de um período de tempo mais longo do que as séries anteriores, característica desejável, por exemplo, para estimação do drift do MGB e nível de equilíbrio de preços do MRM. As tabelas 16, 17 e 18 comparam os resultados obtidos com a série da Bloomberg e a série do índice de placas de aço no Brasil do IBS.

Tabela 16 – Comparação entre os Parâmetros dos Modelos MGB e MRM estimados a partir das séries do Índice de Preços de Placa de Aços (Bloomberg) no Período de Jan/1996 a Dez/2009 e do Índice de Preços de Placas de Aço (IBS) no Período de Jan/2000 a Abr/2009, ambos deflacionados pelo IGP-DI.

Períodos	Séries	MGB		MRM				Teste de Dickey-Fuller			
		$\mu - \sigma^2/2$	$\sigma$	$\kappa$	$\alpha$	$\sigma$	H	(b-1)	$\sigma_\epsilon$	Stat t	Valor P
jan/96-dez/09	Bloomberg	2,48%	42,95%	0,6196	0,2476	43,71%	1,12	-0,050	0,123	-2,161	0,032
jan/00-abr/09	IBS	7,27%	34,32%	0,6699	0,2615	35,10%	1,03	-0,054	0,099	-1,775	0,079

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 17 – Comparação entre os Parâmetros do Modelo MRM com Tendência estimados a partir das séries do Índice de Preços de Placa de Aços (Bloomberg) no Período de Jan/1996 a Dez/2009 e do Índice de Preços de Placas de Aço (IBS) no Período de Jan/2000 a Abr/2009, ambos deflacionados pelo IGP-DI.

Períodos	Séries	$C_0$	$c$	$\kappa$	$\sigma$	H
jan/96-dez/09	Bloomberg	4,6390	7,01%	0,9439	44,21%	0,73
jan/00-abr/09	IBS	4,5130	9,60%	2,4003	36,40%	0,29

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 18 – Comparação dos Resultados das Medidas de Aderência – Pseudo  $R^2$ , EQM e MAPE – dos 3 Tipos de Processo – MGB, MRM e MRM com Tendência – sobre séries do Índice de Preços de Placa de Aços (Bloomberg) no Período de Jan/1996 a Dez/2009 e do Índice de Preços de Placas de Aço (IBS) no Período de Jan/2000 a Abr/2009, ambos deflacionados pelo IGP-DI.

Tipos de Aço	Pseudo $R^2$			EQM			MAPE		
	MGB	MRM	MRMc/Tend.	MGB	MRM	MRMc/Tend.	MGB	MRM	MRMc/Tend.
Placas (IBS)	91,853%	91,840%	91,944%	174,330	172,535	169,017	7,542	7,401	7,355
Placas (Bloomberg)	86,284%	86,473%	86,484%	976,614	926,792	928,841	6,843	7,112	7,161

Fonte: Elaborado pelo autor

Comparando os resultados dos parâmetros estimados a partir da série do índice de placas de aço da América Latina proveniente da Bloomberg com a série de índice de placas de aço no Brasil do IBS, visivelmente o parâmetro que apresentou maior diferença nas 2 séries foi o drift de tendência do MGB: 2,48% da série da Bloomberg contra 7,27% da série do IBS. Entende-se que essa diferença seja explicada pelo fato da série do IBS ser referente a um período de forte aumento na demanda do aço, determinando uma expressiva variação positiva nos preços dos produtos siderúrgicos, enquanto a série da Bloomberg, que cobre um período mais extenso, incorpora um período anterior (jan/96 a Dez/99) de maior equilíbrio entre oferta e demanda e, por conseguinte, um drift bastante inferior. A análise efetuada com as medidas de aderência dos 3 modelos testados não demonstram a mesma superioridade do MRM com Tendência como verificado na série do IBS. De forma geral, computando as colocações obtidas pelos 3 modelos nas 3 medidas de aderência apuradas, a modelo de melhor performance com a série da Bloomberg seria o MRM, seguido pelo MRM com Tendência e em último lugar o MGB. Novamente, a pequena diferença observada não nos permite indicar o MGB como inadequado para representar o comportamento dos preços do aço.