

2 Teoria das Opções Reais

2.1. Introdução à Teoria das Opções Reais

A teoria tradicional de avaliação de investimentos afirma que um projeto agrega valor a uma firma desde que apresente VPL maior que zero. A regra de decisão é simples. Caso o VPL do projeto seja maior que zero o investimento deve ser feito, caso contrário não. De acordo com Ross et al (1999), o VPL é definido como o somatório dos fluxos de caixa esperados⁶ descontados para uma mesma data através de uma taxa ajustada ao risco do projeto (equação 2.1).

$$VPL = \sum_{t=1}^T \frac{E(FC_t)}{(1+k)^t} \quad (2.1)$$

Onde FC_t é o fluxo de caixa dado pela diferença entre receitas e dispêndios totais no instante de tempo t e k o custo médio ponderado do capital.

A taxa de desconto, também chamada de taxa mínima de atratividade, geralmente é o custo médio ponderado do capital (CMPC). Ela é obtida através do cálculo de uma média ponderada entre o custo de capital próprio (acionistas) e o custo de capital de terceiros. A equação 2.2 apresenta a fórmula para a obtenção dessa taxa (Ross et al, 1999).

$$CMPC = k_d(1-\tau)\frac{D}{D+E} + k_e\frac{E}{D+E} \quad (2.2)$$

Onde $CMPC$ é o custo médio ponderado do capital, k_d o custo da dívida, τ a alíquota de imposto (utilizado como fator de correção uma vez que os juros

⁶ Fluxo de caixa esperado é a diferença entre as receitas e dispêndios (investimentos, custos operacionais e tributos) esperados. A vantagem de utilizar valores esperados (médios) é advinda das propriedades matemáticas favoráveis, como, por exemplo, a aditividade.

podem ser abatidos da base de cálculo do imposto de renda e da contribuição social), D o valor da dívida, E o valor do capital próprio e k_e o custo do capital próprio.

O retorno esperado de um ativo pode ser obtido através do CAPM. Esse método é o mais utilizado para determinar o custo do capital próprio (equação 2.3).

$$k_e = r + \beta[E(R_m) - r] \quad (2.3)$$

Onde k_e é o custo do capital próprio, r a taxa livre de risco, $E(R_m)$ o valor esperado do retorno do mercado e β uma medida de covariância normalizada dos retornos do ativo em relação ao retorno de mercado, dada pela equação 2.4.

$$\beta = \frac{\text{cov}(R_{ativo}, R_m)}{\text{var}(R_m)} \quad (2.4)$$

Onde $\text{cov}(R_{ativo}, R_m)$ é a covariância entre os retornos da carteira de mercado e do ativo e $\text{var}(R_m)$ a variância do retorno de mercado.

O VPL, a taxa interna de retorno, o tempo de retorno e o tempo de retorno descontado são algumas das técnicas tradicionais de análise de investimento mais utilizadas nas empresas. Apesar da facilidade de aplicação, esses métodos não são os mais completos, pois desconsideram as flexibilidades existentes. Esse problema pode ser solucionado pela teoria das opções reais.

A metodologia do FCD desconsidera a incerteza ao utilizar, na avaliação de projetos, valores esperados para as variáveis aleatórias. Geralmente, é feita uma análise de risco após o cálculo do valor do projeto (VPL na visão tradicional) através da simulação de Monte Carlo, cujo resultado é uma distribuição de VPL, que permite determinar, por exemplo, a probabilidade do mesmo ser menor que zero. Essa é uma postura passiva em relação à incerteza, pois impossibilita a identificação, a valoração e a incorporação de valiosas flexibilidades do projeto. A incerteza no tamanho de uma reserva de petróleo, por exemplo, pode tornar valiosa a inclusão de uma opção de expansão na plataforma. Isso pode ser feito

através de um desenho da plataforma que facilite a incorporação futura de poços adicionais ou por meio da construção de uma plataforma com maior capacidade de processamento de óleo. Obviamente, nem sempre a decisão ótima seria a inclusão de tal opção. Por isso é necessária a valoração da opção de expansão, a qual só pode ser feita a partir da modelagem da incerteza no tamanho da reserva.

Um excelente exemplo de flexibilidade, estudado por Bastian-Pinto et al (2008), é o do carro *flex*. O consumidor pode escolher o combustível de acordo com o preço, mas levando em consideração o rendimento de cada um – o álcool combustível tem um rendimento 30% inferior ao da gasolina. Essa opção é extremamente valiosa para os consumidores e foi fundamental para consolidar o mercado de álcool combustível no Brasil. Os choques do petróleo da década de setenta estimularam o governo brasileiro a implantar um programa, chamado Proalcool, que, com sucesso, impulsionou o mercado do carro movido a etanol combustível. Entretanto, na década de noventa, enquanto o preço do óleo se encontrava historicamente baixo, o preço do açúcar no mercado internacional aumentou sensivelmente, o que levou o produtor de cana de açúcar exercer a opção de *switch*, passando a produzir mais açúcar e, conseqüentemente, menos álcool. Este fato tornou o mercado de álcool combustível frágil. A solução para o problema foi disponibilizar uma opção real também para o usuário, através do carro *flex*. Atualmente, o mercado de etanol combustível está consolidado, sendo que a maior parte dos automóveis produzidos no Brasil é do tipo *flex*.

Segundo Dixit e Pindyck (1994), investimento é o ato de incorrer num custo imediato na *expectativa* de receber uma recompensa (prêmio) futuro. Três características importantes de um investimento e que são ignoradas pelo método do FCD são a incerteza, a irreversibilidade e o *timing*.

Há incerteza principalmente em relação às receitas, as quais estão atreladas às condições futuras do mercado. A irreversibilidade tem a ver com o fato de não ser possível, em caso de condições desfavoráveis, recuperar toda a quantia investida, mas no máximo uma parte dela. O *timing* se refere à possibilidade, existente na maioria das vezes, de adiar a decisão de investimento. De fato, na maioria das vezes, uma decisão de investimento não é do tipo agora ou nunca.

Existem três tipos de incerteza. As incertezas econômicas ou de mercado são exógenas ao projeto, como, por exemplo, preço do petróleo ou demanda de um produto e são correlacionadas aos movimentos da economia. As incertezas

técnicas são endógenas e específicas ao projeto e não são correlacionadas com a economia, como, por exemplo, o tamanho e a qualidade de uma reserva de petróleo. O terceiro tipo de incerteza é a estratégica, a qual está relacionada com o comportamento de outros agentes, como a entrada de firmas concorrentes no mercado.

As incertezas de mercado incentivam a espera por melhores condições de mercado, enquanto as incertezas técnicas, geralmente, incentivam o investimento em informação, segregando o investimento total em parcelas. Enquanto as condições do mercado se revelam pela simples passagem do tempo de modo que a espera tenha valor, as incertezas técnicas só podem ser reduzidas através de investimentos. Na área de E&P de petróleo, por exemplo, investimentos em testes de longa duração e pilotos permitem a obtenção de informações técnicas úteis para melhor adequar o projeto definitivo de desenvolvimento da produção.

Considerando o fato de o investimento ser pelo menos parcialmente irreversível e a possibilidade da firma adiar a decisão de investir, é possível afirmar que, na realidade, uma empresa possui uma opção de investimento e não uma obrigação. O conceito de opção de investimento é similar ao conceito de opção financeira de compra de uma ação, entretanto, no caso da opção real, o ativo básico é o projeto de investimento desenvolvido. Desse modo, principalmente nos casos de muita incerteza, poderia valer a pena uma firma esperar e obter informações importantes sobre a evolução do mercado e realizar o investimento apenas no caso de um cenário favorável se revelar. Essa é a chamada opção de espera ou de *timing*.

Intuitivamente, uma opção possui maior valor do que uma obrigação, pois permite maior flexibilidade frente às incertezas existentes. De fato, no mercado financeiro uma opção de compra americana vale pelo menos o mesmo que uma opção de compra européia⁷. Na área de análise de investimentos, o valor dessa flexibilidade não é capturado pela metodologia tradicional. Por isso, o valor de um projeto ou da oportunidade de investir num projeto por opções reais é pelo menos igual ao determinado pelo método do FCD. Entretanto, isso não significa dizer que a teoria das opções reais recomenda o investimento em um número maior de projetos em relação à técnica tradicional. Apesar de um projeto possuir maior

⁷ As opções americanas podem ser exercidas a qualquer momento, enquanto as opções européias só podem ser exercidas na expiração.

valor por opções reais, já que, geralmente, não é do tipo agora ou nunca e possui pelo menos o ganho adicional da possibilidade de espera, a regra de decisão por opções reais é mais exigente em relação à regra tradicional do VPL.

De acordo com a teoria tradicional, um projeto deve ser feito caso apresente VPL maior que zero. Segundo a teoria das Opções Reais, entretanto, não basta que o valor da opção real ou da oportunidade de investimento⁸ seja maior do que zero. Para que valha a pena investir, o projeto deve estar *deep-in-the-money* ou muito dentro do dinheiro. Segundo Dixit e Pindyck (1994), esse fato era percebido intuitivamente por algumas firmas, as quais apesar de utilizarem a técnica do FCD, adotavam uma taxa mínima de atratividade significativamente maior em relação ao custo da dívida. Essa taxa, denominada *hurdle rate*, aproxima a regra de decisão da abordagem por opções reais.

Considerando a existência da opção de espera, é possível afirmar que um projeto está maduro ou *deep-in-the-money* num instante de tempo t qualquer, quando o valor da opção de investir é igual ou maior que o gatilho. Ou seja, o gatilho de uma opção é o valor a partir do qual o investimento deve ser feito. Geralmente, o que se obtém é uma curva de gatilho decrescente com o tempo, uma vez que quanto maior o prazo para a expiração da opção maior a incerteza existente. Ou seja, à medida que o tempo passa há revelação de informações que podem ser muito valiosas. Daí a maior a exigência no período inicial. No momento da expiração, entretanto, vale a regra de decisão tradicional, uma vez que não há a possibilidade de espera. A figura 1 apresenta um exemplo hipotético que permite comparar a regra de decisão da teoria de opções reais com a regra tradicional para o caso de expiração da opção de investimento no ano 2014. Pela teoria do FCD, o projeto é viável economicamente desde que o preço seja maior que 30 US\$/barril independente do prazo para a expiração da oportunidade de investimento. Por opções reais, é possível observar que a regra de decisão se modifica com a passagem do tempo, tornando-se igual à tradicional apenas no momento da expiração.

⁸ Valor da opção real de investir = Valor da oportunidade de investimento = VPL tradicional + Prêmio da opção. O prêmio da opção é o valor adicional ao encontrado pelo FCD e se deve à quantificação da flexibilidade existente.

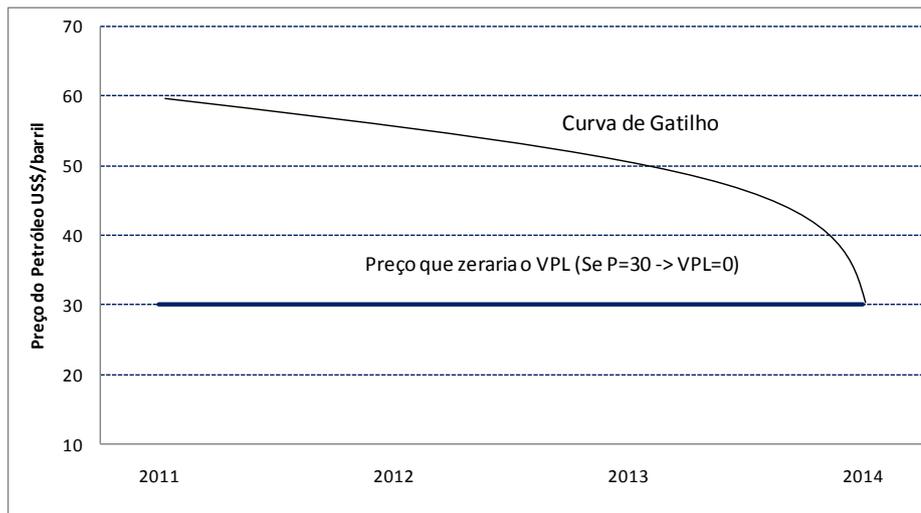


Figura 1 – Exemplo de Curva de Gatilho

A regra de decisão por opções reais é intuitiva no sentido de que é necessário um projeto com valor bem acima de zero para evitar perdas no caso de ocorrência de cenários negativos. É possível ainda ver esse fato de outra maneira. Uma firma que decide fazer um investimento estaria na verdade “matando” a opção de realizá-lo em condições futuras que poderiam ser melhores. Esse custo de oportunidade, de “matar” a opção, deve ser incorporado aos demais custos, levando a uma mudança na regra de decisão tradicional. Segundo Dixit e Pindyck (1994), a receita do projeto deve ser suficiente para pagar os custos de investimento, operacionais e tributários somados ao valor de manter a opção viva. De fato, na prática, o que se observa é que uma firma investe num projeto caso os preços dos produtos estejam significativamente maiores que os custos unitários e não apenas um pouco maior como poderia sugerir a teoria tradicional. Por outro lado, geralmente, uma firma não abandona um projeto logo que o preço do produto se torna menor que o custo, já que, na maioria das vezes, há pelo menos a possibilidade, devido à incerteza, desse cenário se reverter. No caso de haver custo de parada e reentrada, o incentivo para não abandonar logo o projeto fica ainda maior.

Moszkowicz (2003) comparou os resultados que teriam sido obtidos caso um grupo de projetos de investimento já realizados tivesse sido aprovado de acordo com a teoria das opções reais e não pela teoria do FCD. Esse estudo ilustra a existência do valor da opção de espera, considerada por um ano apenas. A única incerteza apreciada foi o preço do petróleo, que seguiu um movimento geométrico

browniano. Inicialmente os projetos foram divididos em dois grupos de acordo com o resultado pelo FCD: VPL muito superior a zero e VPL apenas um pouco maior que zero. A conclusão obtida foi a de que pela abordagem por opções reais haveria um ganho de 16,6% no VPL acumulado com os projetos que estavam muito atrativos e um ganho ainda mais significativo com os projetos que estavam com VPL apenas um pouco maior que zero. O conjunto dos projetos menos atrativos apresentou VPL (acumulado) negativo. Entretanto, caso tivessem sido aprovados considerando a abordagem por opções reais, alguns projetos não teriam sido feitos ou então teriam sido realizados num momento mais adequado e o VPL acumulado seria positivo.

A tabela 1 apresenta uma analogia entre a opção de compra de uma ação no mercado financeiro e a opção real de desenvolver campos de petróleo. Essa analogia, apresentada em Paddock, Siegel e Smith (1988), pode ser facilmente estendida para projetos de investimento que não pertencem à área de petróleo. O valor da opção financeira é similar ao valor da opção real de desenvolver um campo de petróleo no sentido de dar o direito ao detentor da opção de exercer a opção obtendo assim o ativo básico. No caso da opção financeira o ativo básico financeiro é a ação e no caso da opção real o ativo básico real é a reserva desenvolvida. Para obter a ação é necessário pagar o preço de exercício da opção, enquanto que para obter a reserva desenvolvida é necessário realizar o investimento. A obtenção da ação e o investimento no projeto dão direito, respectivamente, aos dividendos gerados pela posse da ação e ao fluxo de caixa líquido do projeto. A volatilidade do preço da ação é análoga à variância do valor do projeto líquido dos investimentos, assim como o tempo para a expiração do exercício da opção é similar ao tempo de expiração dos direitos de investir num projeto. No caso dos investimentos na área de E&P de petróleo no Brasil, a ANP determina o prazo máximo para a declaração de comercialidade de uma oportunidade de investimento.

Tabela 1 - Analogia entre a Opção Financeira de Compra e a Opção Real de Desenvolver um Campo de Petróleo

Opção Financeira	Opção Real
Valor da opção financeira	Valor da opção real de desenvolver uma reserva
Preço corrente da ação	Valor da reserva desenvolvida
Volatilidade da ação	Volatilidade da reserva desenvolvida
Preço de exercício da opção	Custo de investimento para desenvolver a reserva
Tempo para a expiração	Tempo de expiração dos direitos de investimento
Taxa de juros livre de risco	Taxa de juros livre de risco
Taxa de dividendos	Fluxo de caixa líquido de depleção como proporção de V

Fonte: Paddock, Siegel e Smith (1988).

Apesar de a analogia ser útil e conseguir esclarecer o conceito de opções reais, é importante ressaltar que o cálculo da regra de decisão ótima faz sentido na área de análise de investimentos. Por exemplo, no caso de uma opção europeia de compra que dê o direito de comprar uma ação por cinquenta reais, a regra de decisão é simples: exerça a opção de compra caso o preço da ação esteja acima de cinquenta reais na data de vencimento da opção. Esse valor, definido como preço de exercício (“gatilho” da opção financeira) é determinado e conhecido no momento da compra da opção. Já na abordagem por opções reais, na maioria das vezes, a opção é do tipo americana e o objetivo é calcular o valor da opção e a curva de gatilho que fornece a regra de decisão ótima.

A tabela 2 apresenta o impacto nos valores da opção real de espera e no gatilho decorrente de variações positivas na incerteza (volatilidade ou desvio padrão), taxa de juros, tempo de expiração e taxa de dividendos, que geralmente é dada pela divisão entre o fluxo de caixa e o valor do projeto desenvolvido, ou seja, após a execução do investimento.

Tabela 2 - Impacto das Variáveis no Valor do Gatilho e da Opção Real

Variável	Gatilho	Opção Real
Incerteza nos fluxos de caixa	+	+
Taxa de juros	+	+
Tempo de expiração	+	+
Taxa de dividendos	-	-

O aumento da incerteza nos fluxos de caixa do projeto torna a espera mais valiosa devido à opção e não a obrigatoriedade de investir. O impacto na regra de decisão também é positivo, ou seja, é exigido um valor de gatilho maior já que um aumento na incerteza representa maior chance da ocorrência de cenários muito negativos. A variação positiva na taxa de juros diminui o incentivo para exercer o investimento imediatamente, aumentando o valor da espera, já que a opção de obter o rendimento da taxa de juros se torna mais valiosa. A taxa de juros pode ser vista como o custo de oportunidade de exercer imediatamente a opção real. Por isso, no caso de um aumento na taxa de juros há uma alteração na regra de decisão aumentando o valor do gatilho. O acréscimo no tempo de expiração da opção provoca o mesmo efeito no valor da opção e do gatilho. Quanto maior o tempo para a expiração, maior a possibilidade de variações no valor do ativo básico até o momento do vencimento e, portanto, maior o valor da opção. Por exemplo, um projeto que apresenta VPL menor que zero numa data anterior à expiração pode se tornar valioso ao ser considerado o tempo para a expiração, aliado aos efeitos da incerteza e da opção de investir. Ao mesmo tempo, o maior prazo para a expiração exige maior valor do gatilho devido à maior incerteza existente até o momento da expiração da opção. Por último, a taxa de dividendos pode ser definida como o custo de oportunidade da opção de espera e por isso, tem efeito contrário à taxa de juros. Quanto maior a taxa de dividendos menor o valor da opção de espera e menor o gatilho exigido para o investimento, pois o exercício da opção permite capturar os dividendos (fluxo de caixa).

O valor de um projeto por opções reais é no mínimo o valor do VPL tradicional. Esse fato foi abordado intuitivamente, mas pode ser explicado matematicamente. O ganho se deve à desigualdade de Jensen (equação 2.5).

$$E(f(x)) \geq f(E(x)) \quad (2.5)$$

Onde x é uma variável aleatória, $f(x)$ uma função convexa de x e E o operador de valor esperado.

O valor da opção de investir em um projeto é geralmente convexo em relação ao valor do projeto desenvolvido. Por analogia, no mercado financeiro é observada uma relação convexa entre os valores da opção de compra e da ação. A figura 2 apresenta intuitivamente o ganho devido à convexidade. Supondo que V seja uma variável aleatória discreta que pode assumir no instante $t+1$ apenas os valores V^- e V^+ com 50% de probabilidade respectivamente e que $V(t) = E[V(t+1)]$, pode ser observado na figura 2 que $E[F(V)]$ é maior que $F[E(V)]$, sendo a diferença o ganho devido à convexidade.

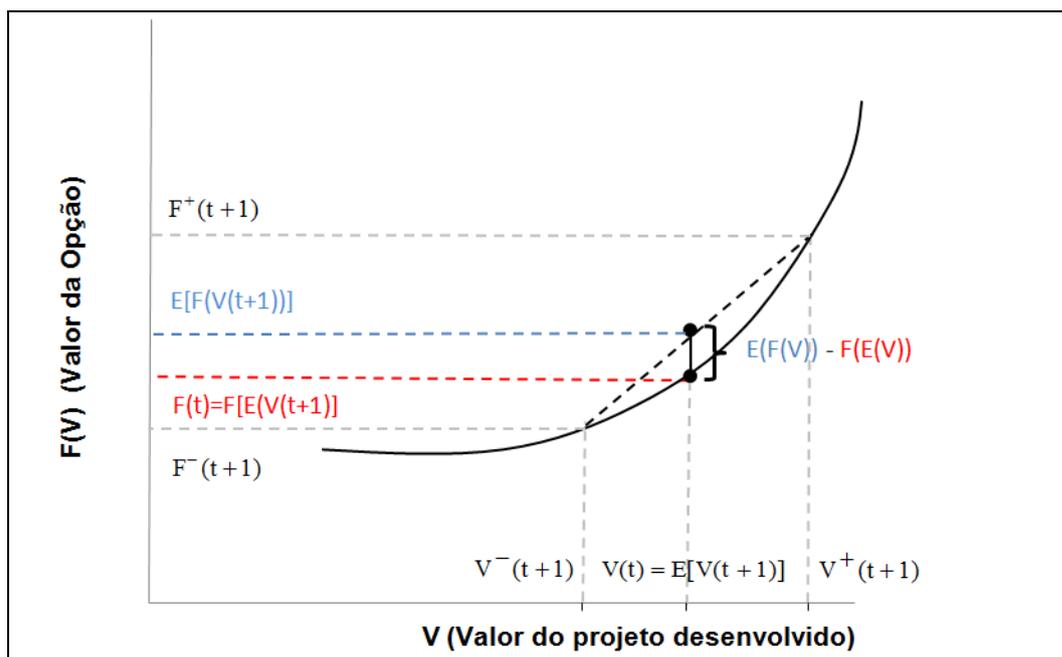


Figura 2 - Efeito da Convexidade no Valor das Opções Reais

De acordo com Trigeorgis (1996), existem diversos tipos de opções reais. Algumas estão naturalmente dentro dos projetos restando apenas identificá-las, enquanto outras precisam ser planejadas e incorporadas com um custo adicional. O valor das opções está diretamente relacionado com o tamanho da incerteza e a liberdade gerencial existentes, ou seja, quanto maior a variabilidade do futuro e a

possibilidade de responder a esta, maior o valor da flexibilidade. Dentre os diversos tipos de opções podem ser destacadas as seguintes:

a) Opção de espera ou de adiar o investimento:

Essa opção, existente de forma natural na maioria dos investimentos – exceto para aqueles cujo prazo para a realização expirou ou então os que estão inseridos num mercado com grande competição – permite ao investidor obter informações que podem mais do que compensar o custo do adiamento da decisão. É análoga à opção de compra americana.

b) Opção de aprendizagem:

Esse tipo de opção possibilita uma mudança de estratégia através do investimento em etapas, ou seja, da segregação dos investimentos em parcelas menores. Tal opção permite a aquisição de informações úteis para o desenho e até dimensionamento do projeto. No segmento de E&P de petróleo, por exemplo, investimentos em pilotos de produção ou testes de longa duração reduzem algumas das incertezas técnicas existentes. Dias (2005) desenvolveu uma técnica para a valoração desses projetos, cujo objetivo é o ganho de informação.

c) Opção de expansão:

A definição da capacidade de uma fábrica ou de uma plataforma de petróleo é realizada a partir de determinadas expectativas que dificilmente irão se concretizar exatamente conforme planejado. Nesse caso, desenhar o projeto tornando-o flexível para futuras expansões pode ser uma estratégia adequada. Por exemplo, o tamanho de uma reserva pode ter sido subestimado inicialmente ou então as condições de mercado podem evoluir de modo mais favorável do que se previa, tornando essa flexibilidade muito valiosa.

d) Opção de abandono:

Quando o projeto se encontrar numa situação muito desfavorável mesmo levando em consideração uma possível melhora futura do

cenário, a opção de abandonar o projeto pode ser muito importante. Dependendo dos equipamentos escolhidos, por exemplo, pode haver ou não a possibilidade de vendê-los no mercado. No setor de E&P de petróleo, por exemplo, uma plataforma móvel que estava sendo utilizada em um campo que foi abandonado, provavelmente será aproveitada em outro.

e) Opção de parada temporária:

Essa flexibilidade é valiosa quando se acredita que o projeto poderá voltar a operar economicamente. A existência de custos de parada e reentrada deve ser considerada e podem ser determinantes para a tomada de decisão entre parar temporariamente ou abandonar o projeto. Para projetos com baixa lucratividade e elevado percentual de terceirização e aluguel de equipamentos, essa opção tende a ser mais interessante.

f) Opção de *switch* (troca):

Nesse caso pode ser considerada tanto a flexibilidade de *input* quanto a de *output*. Um bom exemplo para esse tipo de opção é o mercado de automóveis *flex*. Os automóveis possuem flexibilidade de *input*, uma vez que podem ser abastecidos com álcool combustível ou gasolina e os produtores de cana de açúcar têm flexibilidade de *output*, podendo vender no mercado tanto a cana de açúcar quanto o etanol combustível.

Na área de E&P de petróleo, existe uma seqüência de opções reais que vão desde o momento do investimento exploratório até o fim da operação do campo. A figura 3 ilustra esse fato. Inicialmente, há a opção de perfurar o poço pioneiro com o objetivo de descobrir óleo. No caso de descoberta, existe a opção de delimitar a reserva. Posteriormente há a opção de investir em novas informações através de testes de longa duração e pilotos antes de desenvolver o campo. Após a obtenção ou não das informações há a opção de desenvolver o campo. No caso de desenvolvimento do campo, durante a operação é possível exercer a opção de expansão (adicionar novos poços, por exemplo), de *shut-down* (interromper a produção, com a opção de reabrir os poços) e de abandono.

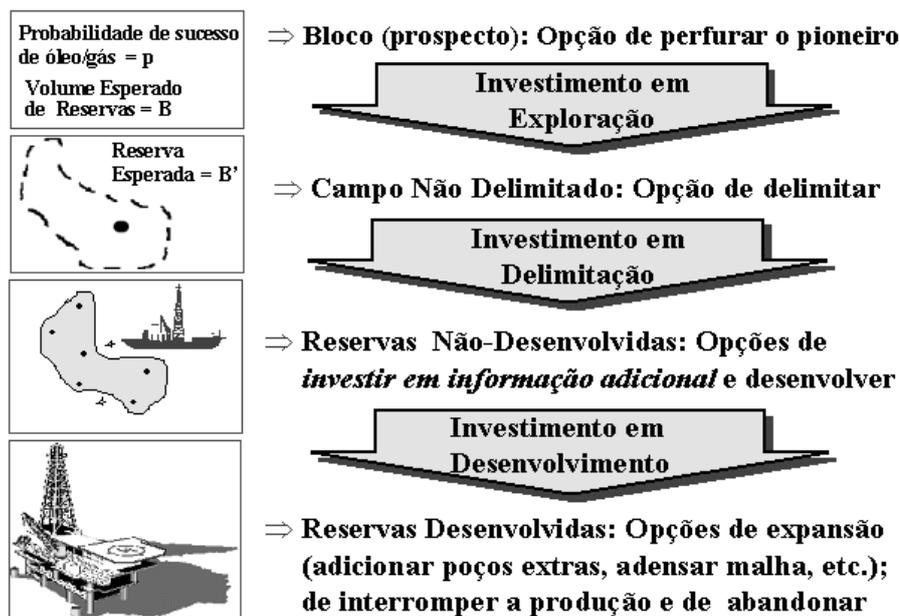


Figura 3 – Opções Reais em Petróleo

Fonte: Dias (2005).

As opções reais citadas na figura 3 foram objeto de estudo de outros autores. Paddock, Siegel e Smith (1988) criaram um modelo clássico para avaliação de campos de petróleo. Bjerksund e Ekern (1990) concluíram ser possível ignorar o valor da opção de abandono e de parada temporária para os investimentos iniciais nos campos de petróleo na presença da opção de adiar o investimento. De fato, para um projeto que está dentro do dinheiro e para o qual foi analisada a viabilidade de postergá-lo, faria pouco sentido um valor expressivo para as opções de abandono ou parada temporária. Laughton (1998) mostrou que o aumento da incerteza no preço do petróleo e no tamanho da reserva aumenta o valor do campo. Entretanto, enquanto a incerteza no preço aumenta o valor da espera por novas informações, a incerteza no tamanho da reserva estimula o investimento em novas informações. Dias (2005) propôs uma nova abordagem para o cálculo do valor de informação, a qual pode ser utilizada para a avaliação econômica de testes de longa duração e pilotos de produção.

Em geral, essas aplicações abordaram as opções de perfurar o poço exploratório, investir em novas informações, desenvolver o campo, abandoná-lo ou parar a produção temporariamente com a opção de reentrada. Esta dissertação avalia a viabilidade de incorporar ao projeto uma sonda dedicada na plataforma, a

qual permite a realização de intervenções para a manutenção da produção nos poços.

2.2. Processos Estocásticos

No método do FCD são utilizados apenas valores esperados para as variáveis que compõem o fluxo de caixa. Já a abordagem por opções reais é mais realista por considerar a incerteza nas variáveis. A modelagem da incerteza é feita através de processos estocásticos. Na maioria das aplicações, a variável modelada (ativo básico) é o preço do produto ou o valor do projeto desenvolvido (V). No caso da área de E&P de petróleo, seriam, respectivamente, o preço do petróleo e o valor da reserva desenvolvida.

Um processo estocástico pode ser definido como uma seqüência de variáveis aleatórias indexadas, na maioria dos casos⁹, ao instante de tempo. Desse modo, um processo envolve tempo e aleatoriedade. Quando os intervalos de tempo são contáveis o processo estocástico é discreto, caso contrário, contínuo.

O processo de Itô é um caso particular de uma classe de processos mais geral, chamado processo de difusão forte, o qual é uma classe particular de outra classe ainda mais geral, chamada processo de Markov. Um processo de Markov assume que toda a informação relevante está contida no valor corrente da variável. O processo de Itô, para uma variável V qualquer, pode ser definido pela equação 2.6.

$$dV = a(V, t)dt + b(V, t)dz \quad (2.6)$$

Onde, dV representa a variação de V durante o período de tempo infinitesimal dt , $a(V, t)dt$ é o termo não estocástico de tendência ou valor esperado e $b(V, t)dz$ representa o termo aleatório, chamado de termo de variância. O incremento ou processo de Wiener dz é o termo estocástico e é definido pela equação 2.7.

$$dz = \varepsilon_t \sqrt{dt} \quad (2.7)$$

⁹ A modelagem da incerteza técnica deve ser feita através da indexação a eventos e não ao tempo.

Onde $\varepsilon_t \sim N(0,1)$, ou seja, ε_t é uma distribuição normal padrão com média zero e variância igual a um, e, portanto, $dz \sim N(0,dt)$.

O movimento browniano ou processo de Wiener pode ser visto como a versão contínua de um *random walk* (“passeio aleatório”) e possui três propriedades. Os incrementos aleatórios são independentes, é um processo de Markov, ou seja, toda informação relevante já está contida no valor corrente da variável e as variações no processo são normalmente distribuídas e com variância tendendo ao infinito com o passar do tempo.

Os principais processos estocásticos utilizados em estudos que envolvem a aplicação de opções reais são o MGB e o MRM. Esses dois são detalhados nas próximas seções.

2.2.1. Movimento Geométrico Browniano

O MGB é o processo mais utilizado atualmente. De acordo com esse modelo, toda variação na variável aleatória representa um choque permanente na tendência de longo prazo projetada. Desse modo, os valores tendem para longe do ponto de partida e não para um valor de equilíbrio pré-definido. Uma característica importante desse modelo é que os preços futuros são modelados através de distribuições de probabilidade lognormal, evitando assim que assumam valores negativos. A equação 2.8 representa esse processo para o caso de P ser, por exemplo, o preço do petróleo.

$$\frac{dP}{P} = \alpha dt + \sigma dz \quad (2.8)$$

Onde $\frac{dP}{P}$ representa a taxa de variação do preço do petróleo, a qual possui uma tendência α e um desvio-padrão σ (chamado de volatilidade) em torno dessa tendência.

A média e a variância desse processo são proporcionais ao tempo. Essa característica é geralmente desejável, já que quanto maior o horizonte de tempo maior a incerteza existente. Sob a hipótese de MGB, o valor esperado da variável

P (preço do petróleo, por exemplo) no instante de tempo t pode ser obtido através da equação 2.9.

$$E(P_t) = P_0 e^{\alpha t} \quad (2.9)$$

Onde $E(P_t)$ é o valor esperado do preço no instante de tempo t , P_0 o preço no instante inicial e α a tendência.

Sob a hipótese de MGB, a variância da variável P no instante de tempo t pode ser obtida através da equação 2.10.

$$Var(P_t) = P_0^2 e^{2\alpha t} \cdot (e^{\sigma^2 t} - 1) \quad (2.10)$$

Onde $Var(P_t)$ representa a variância do preço no instante de tempo t , P_0 o preço no instante inicial, α a tendência e σ a volatilidade.

De acordo com as equações 2.9 e 2.10, respectivamente, a tendência de crescimento é exponencial e $\lim_{t \rightarrow \infty} Var(P_t) = \infty$, ou seja, quando o tempo tende ao infinito a variância do processo também tende ao infinito. A figura 4 ilustra esse processo.

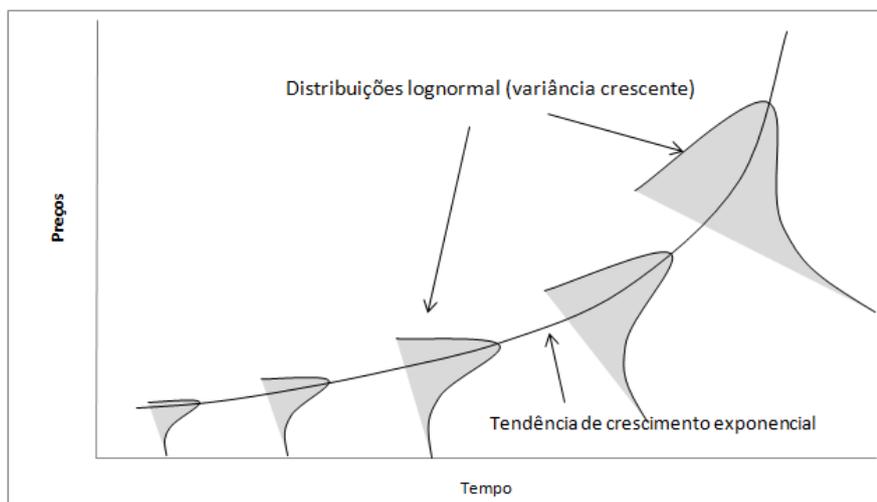


Figura 4 – Movimento Geométrico Browniano

A estimativa da volatilidade anual de uma variável P modelada através de um MGB pode ser feita de acordo com a equação 2.11. Considerando que $\ln(P_t)$ segue distribuição normal e que todos os pressupostos da regressão linear são atendidos tem-se que:

$$\ln(P_t) = \ln(P_{t-1}) + \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \Delta t + \sigma N(0,1)\sqrt{\Delta t} \rightarrow$$

$$Var[\ln(P_t)] = Var[\ln(P_{t-1})] + Var\left[\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \Delta t\right] + Var[\sigma N(0,1)\sqrt{\Delta t}] \rightarrow$$

$$Var\left[\ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)\right] = \frac{\sigma^2}{n} \rightarrow$$

$$\hat{\sigma}^2 = n Var\left[\ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)\right] \quad (2.11)$$

Onde $\hat{\sigma}^2$ é o estimador da variância, Var é o operador da variância, $N(0,1)\sqrt{\Delta t} = \varepsilon_t$, $\Delta t = 1/n$ e n igual a 1, 12 e 252 para dados anuais, mensais e diários, respectivamente.

A variância do estimador da volatilidade é inversamente proporcional à quantidade de dados utilizados. Desse modo, para realizar uma boa estimativa o ideal é que sejam utilizados dados diários.

2.2.2. Movimento de Reversão à Média

O MRM se baseia na hipótese de que há uma média para a qual o valor da variável modelada tende no longo prazo. Por isso, cada choque na variável estocástica seria apenas um desvio temporário em relação ao nível de equilíbrio de longo prazo. Segundo alguns autores, para preços de commodities, incluindo o petróleo, a utilização desse processo seria mais realista.

Do ponto de vista econômico, caso o preço seja maior ou menor que a média de longo prazo, forças de mercado agiriam para que este retornasse ao ponto de equilíbrio entre oferta e demanda. De acordo com a teoria econômica, preços altos estimulariam os investimentos, os quais levariam ao aumento da oferta do produto e, em consequência, a uma redução do preço. Pelo lado da demanda, preços altos diminuiriam o consumo, o que também provocaria uma diminuição do preço. Já o contrário (preços baixos) reduziria a oferta do produto, uma vez que empresas exerceriam suas opções de abandono ou parada temporária, aumentando os preços. Além disso, preços baixos aumentariam a demanda e, conseqüentemente, os preços.

No caso do setor de petróleo, a atuação dos países da OPEP deve ser considerada devido a sua capacidade de controlar o mercado. Outra característica do preço do petróleo é que sua velocidade de reversão é baixa. Uma possível explicação para esse fato é o tempo de maturação dos investimentos. O período de tempo entre a decisão de desenvolver um campo de petróleo e o início da produção deste é de aproximadamente três a quatro anos.

O processo estocástico de reversão à média também é um processo de Markov, de modo que a distribuição de probabilidade num instante de tempo depende apenas da distribuição anterior e não de todas as informações passadas. A equação 2.12 representa o movimento de reversão à média mais simples, chamado Ornstein-Uhlenbeck, para a variável x , sendo $x = \ln(P)$. Para evitar que os preços assumam valores negativos, pode ser feita a reversão em P usando a relação $x = \ln(P)$. Desse modo, a variável x possui distribuição normal e a variável P apresenta distribuição lognormal.

$$dx = \eta(\bar{x} - x)dt + \sigma dz \quad (2.12)$$

Onde η é a velocidade de reversão à média de longo prazo, \bar{x} a média de longo prazo, σ a volatilidade e dz o incremento de Wiener.

O sentido da tendência depende do valor corrente da variável sob análise e da média de longo prazo. Já a intensidade da reversão depende da velocidade de reversão e da diferença entre o preço corrente e a média de longo prazo, sendo que quanto mais distante o preço estiver da média de longo prazo, mais rápido seria o

retorno ao equilíbrio. Um conceito que representa a velocidade de reversão e que é bastante utilizado é o de meia-vida. A meia-vida de um processo é definida como o tempo esperado que a variável aleatória leva até atingir a metade do caminho entre o valor corrente e a média de longo prazo.

As figuras 5 e 6 ilustram esse tipo de processo estocástico para os casos dos preços iniciais serem, respectivamente, maior e menor que o preço médio de longo prazo. No caso do preço ser maior a tendência é de redução, caso contrário a tendência é de crescimento. É possível observar que a variância aumenta no período inicial, mas tende a se estabilizar posteriormente. Essa característica pode ser explicada intuitivamente pelo próprio comportamento do processo, em que há uma força de reversão à média, o que impediria ou reduziria a chance da variável se distanciar muito da média de longo prazo. Como foi discutido, quanto maior a diferença entre o preço corrente e o preço médio de longo prazo, maior a intensidade de reversão.

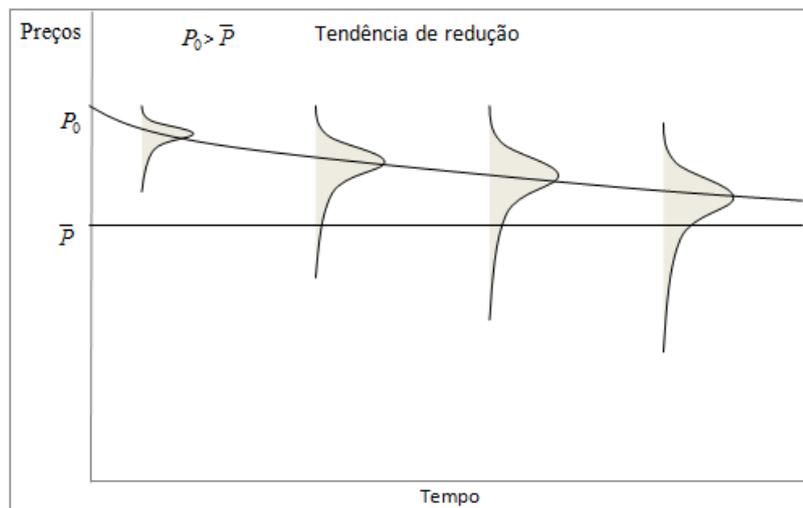


Figura 5 – Movimento de Reversão à Média: Preço Inicial Maior que o Preço de Longo Prazo

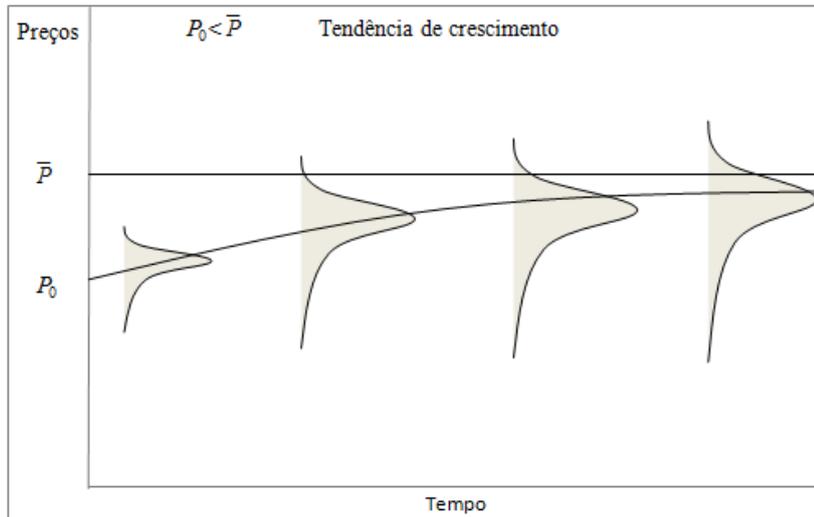


Figura 6 – Movimento de Reversão à Média: Preço Inicial Menor que o Preço de Longo Prazo

A equação 2.13 apresenta o valor esperado de uma variável que segue o processo aritmético de reversão à média (Ornstein-Uhlenbeck). O valor esperado num instante de tempo qualquer é uma média ponderada entre o valor corrente da variável e a média de longo prazo. Essa ponderação leva em consideração a velocidade de reversão e o tempo.

$$E(x(t)) = x(0)e^{-\eta t} + \bar{x}(1 - e^{-\eta t}) \quad (2.13)$$

Onde $E(x(t))$ é o valor esperado de x no instante t , $x(0)$ é o valor corrente da variável, η a velocidade de reversão e \bar{x} a média de longo prazo.

A equação 2.14 apresenta a variância, num instante de tempo qualquer, de uma variável que segue o processo aritmético de reversão à média.

$$Var(x(t)) = (1 - e^{-2\eta t}) \cdot \frac{\sigma^2}{2\eta} \quad (2.14)$$

Onde $Var(x(t))$ é a variância de x no instante de tempo t , η a velocidade de reversão e σ a volatilidade. Ao contrário do movimento geométrico browniano, a

variância cresce inicialmente e após determinado período se estabiliza. De acordo

com a equação 2.14, $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}(x(t)) = \frac{\sigma^2}{2\eta}$.

Há uma discussão a respeito de qual seria o modelo mais adequado para o preço do petróleo. Pindyck (1999) realizou testes de raiz unitária para séries de diferentes tamanhos coletadas entre 1875 e 1996 e a maioria dos resultados indicou não ser possível rejeitar a hipótese de MGB. Apenas para séries muito longas o teste rejeitou a hipótese de MGB. Dias (2005) utilizou uma série entre janeiro de 1970 e outubro de 2004 e o teste de raiz unitária de *Dickey-Fuller* também indicou a não rejeição da hipótese de MGB para o preço do petróleo. Entretanto, alguns autores questionam a utilização de séries tão longas devido à presença de quebras estruturais.

Pindyck (1999) sugeriu a utilização de modelos de reversão à média com preço de equilíbrio estocástico, mas afirmou que em aplicações de opções reais seria improvável que a utilização do MGB levasse a grandes erros na regra de decisão. Para processos com velocidade de reversão pequena, como é o caso de preço do petróleo, a regra de decisão ótima seria menos prejudicada. Além disso, em algumas aplicações, como, por exemplo, Schwartz (1997), o MGB apresentou melhor desempenho em relação ao MRM puro.

2.2.3. Processo de Poisson

O processo de Poisson é um processo estocástico que conta o número de eventos ao longo do tempo, sendo muito utilizado na modelagem da ocorrência de eventos raros, como, por exemplo, crises econômicas. Caso o processo de Poisson seja homogêneo, o número de eventos segue uma distribuição de Poisson e o tempo entre a ocorrência dos eventos segue uma distribuição exponencial com média igual a $1/\lambda$, sendo λ a frequência de ocorrência de um evento ou taxa de falha no caso de equipamentos (inclusive poços de petróleo). A probabilidade de ocorrência de um evento durante um período de tempo Δt é fornecida pela equação 2.15.

$$P[N_{t+\Delta t} - N_t = 1] = \lambda \Delta t \quad (2.15)$$

Onde $P[N_{t+\Delta t} - N_t = 1]$ representa a probabilidade de um evento ocorrer entre o intervalo de tempo Δt e λ é a frequência de ocorrência de um evento.

Existem dois tipos de processo de Poisson. No processo de Poisson homogêneo a taxa de falha λ é constante, enquanto no não-homogêneo a frequência de ocorrência dos eventos é função do tempo. Neste estudo, foi utilizado um processo de Poisson não-homogêneo para determinar a probabilidade de ocorrência de falhas nos poços produtores de petróleo.

A distribuição de Weibull já foi utilizada em outros estudos na modelagem da falha dos poços petrolíferos, como, por exemplo, Frota (2003) e Accioly (2005) e se mostrou bastante aderente aos dados históricos de falha. Essa distribuição é bastante flexível, pois possibilita a inclusão de taxas de falha crescentes, constantes e decrescentes com o tempo. A equação 2.16 apresenta a função densidade de probabilidade para essa distribuição, a qual é definida por dois parâmetros. O parâmetro de escala η representa, grosso modo, o tempo entre a ocorrência dos eventos, enquanto o parâmetro de forma β determina o comportamento da taxa de falha ao longo do tempo. No caso de $\beta=1$ a taxa de falha é constante, sendo obtida uma distribuição exponencial. Quando $\beta>1$ a taxa de falha é crescente com a passagem do tempo e, por último, se $\beta<1$ a taxa de falha diminui com o tempo.

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta\right] \quad (2.16)$$

Onde $f(t)$ é a função densidade de probabilidade, η é o parâmetro de escala, β é o parâmetro de forma e t é o instante de tempo.

A taxa de falha de um equipamento qualquer representa a frequência de ocorrência das falhas e é definida pela equação 2.17.

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \quad (2.17)$$

Onde $\lambda(t)$ é a taxa de falha no instante de tempo, $f(t)$ é a função densidade de probabilidade e $F(t)$ é a função de distribuição acumulada.

A partir das equações 2.16 e 2.17 é possível deduzir a equação 2.18, a qual foi utilizada para determinar a taxa de falha dos poços produtores utilizada nesse estudo e, conseqüentemente, a probabilidade de ocorrência das falhas (equação 2.15).

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \quad \rightarrow \quad \lambda(t) = \frac{\frac{\beta \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta\right]}{\eta \left(\frac{t}{\eta}\right)}}{1 - \left(1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta\right]\right)} \quad \rightarrow$$

$$\lambda(t) = \frac{\beta \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}}{\eta \left(\frac{t}{\eta}\right)} \quad (2.18)$$

Onde $\lambda(t)$ é a taxa de falha no instante de tempo t , η é o parâmetro de escala e β é o parâmetro de forma.

2.3. Métodos de Cálculo das Opções Reais

Uma opção real é o direito e não a obrigação de um agente tomar decisões sobre um ativo real. Apesar de o valor da opção estar relacionado ao valor do ativo, o risco do derivativo é diferente do risco do ativo básico. Desse modo, a taxa de desconto da opção também é diferente. O problema da determinação dessa taxa de desconto pode ser solucionado por meio de dois métodos: construção de um portfólio sem risco e método da neutralidade ao risco.

Caso seja possível a construção de uma carteira livre de risco composta pelo derivativo (opção real) e por determinada quantidade do ativo básico, a taxa de desconto adequada para calcular o valor presente desse portfólio deve ser a taxa livre de risco, de modo a não permitir arbitragem. Geralmente, nesse caso o valor da opção real é obtido a partir de solução analítica ou numérica da equação parcial diferencial, a qual fornece uma relação livre de arbitragem entre o ativo básico e o

derivativo. São consideradas ainda as condições de contorno que definem o momento de expiração da opção, o tipo da opção (européia ou americana) e o resultado de exercício da opção.

O segundo método se baseia na mudança de probabilidade. Para isso o valor esperado do ativo básico é penalizado através da redução da sua tendência por um prêmio de risco. Em outras palavras, a probabilidade de ocorrência dos cenários favoráveis diminui, enquanto a probabilidade de ocorrência dos cenários desfavoráveis do ativo básico aumenta. Essa probabilidade, neutra ao risco, é exatamente a que torna o retorno do ativo igual à taxa livre de risco e é utilizada em diversas abordagens metodológicas, como, por exemplo, método binomial e programação dinâmica. Realizando essa transformação torna-se possível provar que a taxa de desconto livre de risco deve ser utilizada para calcular o valor presente de qualquer derivativo do ativo básico. Portanto, em aplicações de opções reais são utilizados processos neutros ao risco para o cálculo das opções de modo que a taxa de desconto utilizada seja a livre de risco, já que a taxa de desconto da opção não é conhecida a princípio.

2.3.1. Simulação de Monte Carlo

A simulação de Monte Carlo é um dos métodos de cálculo para a valoração de opções reais baseado na medida de probabilidade neutra ao risco, tem aplicação em diversas áreas de estudo e tornou-se popular com o desenvolvimento computacional. Devido a sua flexibilidade, é uma ferramenta particularmente útil quando se trabalha com diversas fontes de incerteza, a qual é a situação desse estudo. Outra vantagem é que a utilização desse método torna desnecessária a obtenção da equação diferencial da opção real, pois resolve o problema simulando diretamente o processo.

O funcionamento desse método é simples. Primeiramente devem ser definidas as distribuições de probabilidade das variáveis de entrada e as equações que ligam as entradas ao resultado. Posteriormente são amostrados diversas combinações dos valores das distribuições de entrada e o resultado (*output*) para cada iteração é calculado. Esse procedimento pode ser repetido milhares de vezes, resultando numa distribuição de resultados. O valor da opção real é obtido a partir

do cálculo da média da distribuição dos resultados. Em aplicações de opções reais são utilizados processos estocásticos neutros ao risco e, geralmente, é necessário definir a regra de exercício da opção.

Essa metodologia pode ser aplicada para a valoração de opções reais européias ou americanas, as quais podem ser exercidas, respectivamente, apenas na expiração ou a qualquer momento até a expiração. Apesar de ser relativamente fácil realizar a simulação, no caso de opções americanas torna-se necessário obter a regra de decisão ou a curva de gatilhos ótima. Uma metodologia popular para a aplicação em opções reais americanas é o de Longstaff & Schwartz (2001), conhecido como método dos mínimos quadrados. Entretanto, nessa dissertação o problema foi tratado como uma seqüência de opções reais européias.

Para realizar a simulação é necessária a equação de *discretização* do processo estocástico utilizado. A equação 2.19 descreve o comportamento de uma variável, por exemplo, o petróleo *Brent*¹⁰, para o caso de seguir um MGB.

$$dP = \alpha P dt + \sigma P dz \quad (2.19)$$

Onde dP representa a variação de P num período de tempo infinitesimal, α o termo de tendência, σ o desvio-padrão e dz o processo de Wiener.

Fazendo $p = \ln P$, lembrando que $(dP)^2 = \sigma^2 P^2 dt$ ¹¹ e aplicando o Lema de Itô (equação 2.20) para p é possível obter a equação 2.21.

$$dp = \frac{\partial p}{\partial P} dP + \frac{\partial p}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial P^2} (dP)^2 \quad (2.20)$$

$$dp = \frac{\partial p}{\partial P} dP + \frac{\partial p}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial P^2} (dP)^2 \rightarrow dp = \frac{1}{P} dP - \frac{1}{2P^2} (dP)^2 \rightarrow$$

¹⁰ O óleo *Brent* possui determinadas características técnicas específicas, como, por exemplo, grau API de 39,4° e é uma referência para a cotação dos diversos tipos de óleo no mercado. Esse óleo era originalmente produzido no campo de Brent no Mar do Norte.

¹¹ A prova de que $(dP)^2 = \sigma^2 P^2 dt$ é simples. Os termos dt^2 e $dt^{3/2}$ são desprezíveis. Já o termo dz^2 , apesar de dz ser estocástico, é determinístico e igual a dt . A prova passa pelo cálculo do valor esperado $E(dz^2) = dt$ e da variância $Var(dz^2) = 0$.

$$dp = \frac{1}{P}(\alpha P dt + \sigma P dz) - \frac{1}{2P^2} \sigma^2 P^2 dt \rightarrow$$

$$dp = \left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dz \quad (2.21)$$

A partir da equação 2.21 é possível obter a equação 2.22. No caso da equação 2.1 a discretização é exata (independe do Δt).

$$\ln(P_t) = \ln(P_{t-1}) + \left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t + \sigma N(0,1) \sqrt{\Delta t} \quad (2.22)$$

Onde $\ln(P_t)$ é o logaritmo natural do óleo *Brent* no instante de tempo t , α o termo de tendência, σ volatilidade de P , Δt a variação do tempo e $N(0,1)$ a distribuição normal padrão.

Aplicando o exponencial à equação 2.22 é possível obter a equação 2.23, que representa o processo real.

$$P_t = P_{t-1} \exp \left[\left(\alpha - 0,5 \sigma^2 \right) \Delta t + \sigma N(0,1) \sqrt{\Delta t} \right] \quad (2.23)$$

Para a obtenção do MGB neutro ao risco, a tendência real α é penalizada por um prêmio de risco π como pode ser visto na equação 2.24¹². A idéia é contornar o difícil problema de obter a taxa de desconto ajustada ao risco da opção através de uma mudança de medida de probabilidade e o uso da taxa de desconto livre de risco (ver item 2.3). Para tal, penaliza-se a tendência do processo estocástico por um prêmio de risco.

¹² A taxa de retorno total é igual à soma da taxa de ganho de capital mais a taxa de dividendos, ou seja, $\mu = \alpha + \delta$. Entretanto, a taxa de retorno total pode ser definida, em equilíbrio, como a taxa ajustada ao risco que é igual à soma da taxa livre de risco e o prêmio de risco, ou seja, $\mu = r + \pi$. Desse modo, $\alpha + \delta = r + \pi$ e, portanto, $\alpha - \pi = r - \delta$.

$$P_t = P_{t-1} \exp \left[\left(r - \delta - 0,5\sigma^2 \right) \Delta t + \sigma N(0,1) \sqrt{\Delta t} \right] \quad (2.24)$$

Onde δ pode ser interpretado como taxa de conveniência (*convenience yield*) de P.

Em muitas análises é feita a suposição de que as variáveis modeladas através dos processos estocásticos são independentes. Entretanto, essa hipótese pode não ser verdadeira. No caso do MGB e do MRM, simular processos correlacionados significa gerar variáveis aleatórias com distribuição normal padrão correlacionadas.

A simulação de vários processos estocásticos correlacionados pode ser feita de maneira simples através da decomposição de Cholesky. Para isso, as correlações são incorporadas entre as distribuições normal padrão sorteadas para os processos. Para dois processos apenas, como, por exemplo, o óleo *Brent* e a taxa de sonda devem ser sorteadas duas distribuições normal padrão independentes. A distribuição normal padrão fornecida pela equação 2.25 é uma combinação entre outras duas sorteadas e deve ser utilizada no processo correlacionado, no caso, o MGB ou o MRM da taxa de sonda. Para o petróleo *Brent* a normal padrão sorteada deve ser utilizada diretamente.

$$N(0,1)_S = \rho \cdot N(0,1)_P + \sqrt{1-\rho^2} \cdot N(0,1) \quad (2.25)$$

Onde $N(0,1)_S$ é a normal padrão correlacionada (usada para a taxa de sondas), ρ é a correlação entre as séries, $N(0,1)_P$ é a normal padrão sorteada para o óleo *Brent* e $N(0,1)$ é outra normal padrão independente.

Para a obtenção da equação 2.25 foram utilizadas as equações 2.26 (válida para a distribuição normal padrão) e 2.27.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} \\ \rho_{21} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Onde Σ é a matriz de variância e covariância de uma normal padrão bivariada, σ^2 é a variância, σ_{12} é a covariância e ρ_{12} é a correlação, que no caso da normal padrão é igual à covariância.

$$Z = \begin{bmatrix} N(0,1)_P \\ N(0,1) \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Onde Z possui distribuição normal padrão bivariada.

Aplicando a decomposição de Cholesky ($\Sigma = C^T C$) à matriz de variância e covariância foi obtida a equação 2.28.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} \\ \rho_{21} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ 0 & c_{22} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Onde Σ é a matriz de variância e covariância da normal bivariada, σ^2 é a variância, σ_{12} é a covariância e ρ_{12} é a correlação, que no caso da normal padrão é igual à covariância.

A partir das equações 2.26 e 2.28 é possível obter a equação 2.29.

$$C^T = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Onde C^T é uma matriz triangular inferior obtida pela decomposição de Cholesky, e ρ é a correlação entre as séries.

A partir das equações 2.27 e 2.29 é possível encontrar a equação 2.30, a qual fornece a equação que deve ser utilizada para a distribuição normal padrão correlacionada.

$$C^T Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(0,1)_P \\ N(0,1) \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$C^T Z = \begin{bmatrix} N(0,1)_P \\ \rho \cdot N(0,1)_P + \sqrt{1-\rho^2} \cdot N(0,1) \end{bmatrix} \quad (2.30)$$