

6 Modelo Gamma-Cetuc (GC)

Um modelo de sintetização de séries temporais de atenuação por chuva envolve a geração de dados aleatórios que satisfaçam especificações de estatísticas de primeira e de segunda ordem.

Séries temporais com distribuição Gaussiana são simples de serem sintetizadas uma vez que basta gerar sequências aleatórias de amostras independentes com distribuição Gaussiana e submeter estas sequências a um filtro linear que será responsável por correlatar as sequências com as estatísticas de segunda ordem desejadas. Como o filtro é linear, a saída continuará com distribuição Gaussiana uma vez que qualquer transformação linear de um processo gaussiano produz outro processo gaussiano [33, 44].

No caso da especificação de uma distribuição diferente da Gaussiana para a sequência de saída a solução pode ser obtida através um procedimento descrito por Sondhi [45] para a geração de processos aleatórios não-gaussianos com características espectrais especificadas.

O modelo GC proposto neste trabalho é um caso particular de geração de processos aleatórios em que o processo gerado tem distribuição Gamma com as estatísticas de primeira e de segunda ordem especificadas de acordo com as características dos enlaces. A implementação do modelo foi realizada utilizando parte do procedimento descrito por Sondhi [45].

O diagrama de blocos do modelo está apresentado na Figura 6.1.

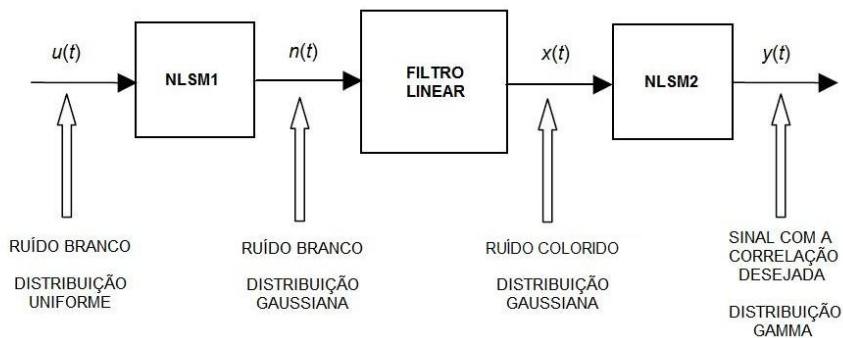


Figura 6.1 – Diagrama de blocos do modelo Gamma-Cetuc (GC)

Um ruído branco $u(t)$ uniformemente distribuído no intervalo $(0, 1)$ é transformado num ruído branco gaussiano $n(t)$ após passar por uma não-linearidade sem memória (NLSM). O ruído branco gaussiano $n(t)$ é transformado em ruído colorido gaussiano $x(t)$ após a filtragem. O espectro de frequências que ele ocupa é pré-distorcido de acordo com as características do filtro, mas sua distribuição gaussiana é mantida. A segunda NLSM transforma o ruído colorido gaussiano em um sinal com distribuição Gamma. Entretanto, esta segunda NLSM também altera as características de correlação do sinal. Sendo assim, o filtro linear precisa correlatar o ruído branco gaussiano de uma forma tal que ao passar pela segunda NLSM a saída tenha as estatísticas Gamma de primeira e de segunda ordem especificadas.

É possível observar que a estrutura do modelo proposto é a mesma do modelo MB indicando que ambos são casos particulares de modelo para a geração de processos aleatórios não-Gaussianos com características espectrais especificadas. O mesmo é possível afirmar sobre os modelos EMB e TMB cuja particularidade é a presença do bloco de calibração (A_{offset}).

A implementação do modelo GC foi feita através de funções do Matlab e as etapas do modelo estão descritas a seguir.

6.1. Geração de ruído branco gaussiano

A implementação desta etapa corresponde à parte do modelo ilustrada na Figura 6.2.

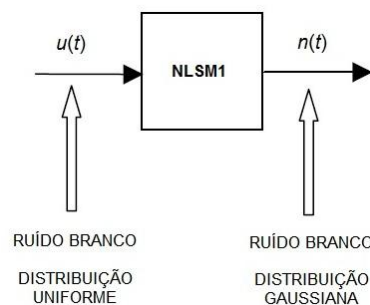


Figura 6.2 – Modelo GC (1ª etapa): geração de ruído branco gaussiano

A geração do ruído branco $u(t)$ uniformemente distribuído no intervalo $(0,1)$ é implementada pela geração de uma sequência de números aleatórios inteiros

entre 0 e M e a divisão de cada elemento da sequência por M . Algumas técnicas para implementação de geradores de número aleatórios são apresentadas em [44].

A geração do ruído branco gaussiano $n(t)$ é feita através da NLSM1. Sendo conhecida a PDF que $n(t)$ precisa ter, diferentes métodos podem ser utilizados [44].

Como a implementação do modelo GC foi realizada através de funções do Matlab, esta etapa de geração do ruído branco gaussiano é realizada por uma função de sua biblioteca (*randn*). A sequência de números aleatórios produzidos pela função é determinada pelo estado interno do gerador no momento do início de sua execução. Este estado inicial pode ser configurado de modo a possibilitar o retorno ao valor inicial depois da execução. Isto permite que uma mesma sequência aleatória possa ser reproduzida novamente caso desejado. Esta característica faz com os números gerados sejam denominados pseudo-aleatórios, embora isto não signifique que deixem de ter as estatísticas especificadas.

Com o objetivo de comparar as séries temporais sintetizadas de atenuação por diferentes modelos, o gerador foi sempre configurado para o estado inicial antes de produzir a primeira série temporal de cada modelo.

Esta etapa gera uma sequência aleatória com distribuição Gaussiana com média igual a zero e desvio padrão igual a um. A quantidade de dados da sequência é especificada de acordo com o comprimento da série temporal de atenuação a ser gerada. Para cada amostra da sequência aleatória haverá uma amostra na série temporal gerada na saída do modelo.

A filtragem da sequência aleatória gaussiana é a etapa a seguir e tem a finalidade de correlatar a sequência gaussiana. Como esta correlação precisa levar em consideração a segunda NLSM do modelo, esta etapa será descrita depois de ser apresentada a etapa final que transforma a sequência gaussiana correlatada em uma sequência com distribuição Gamma com a correlação especificada.

6.2. Geração da sequência gamma correlatada

A implementação desta etapa corresponde à parte do modelo ilustrada na Figura 6.3.

No item 6.1 foi apresentada uma forma de gerar uma sequência aleatória com distribuição Gaussiana a partir de uma sequência aleatória com distribuição

Uniforme utilizando uma NLSM. O mesmo procedimento pode ser realizado para gerar sequências aleatórias com distribuições não-Gaussianas, a diferença está nos métodos utilizados [44].

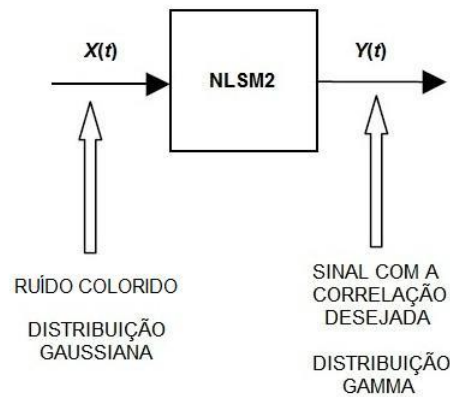


Figura 6.3 – Modelo GC (3ª etapa): geração da sequência com distribuição Gamma e correlação especificada

No caso do modelo GC a distribuição cumulativa desejada na sequência de saída é conhecida através das estatísticas dos dados experimentais o que possibilita a utilização do método da Transformada Inversa. Este método permite transformar uma sequência aleatória uniformemente distribuída em uma sequência tendo uma função distribuição de probabilidade (*cumulative distribution function* – CDF) de acordo com o tipo de distribuição desejada. O método é implementado fazendo com que a sequência uniformemente distribuída seja a CDF da sequência a ser gerada. Se a CDF for inversível, é possível obter a sequência aleatória desejada através da função inversa da CDF, denominada função quantil.

Para aplicar o método, portanto, é necessário que uma sequência uniformemente distribuída $X_U(t)$ seja obtida a partir da sequência gaussiana colorida $X(t)$ e seja a sequência de entrada da função quantil Gamma $Q(x)$. Esta etapa pode ser representada pelo diagrama de blocos da Figura 6.4.

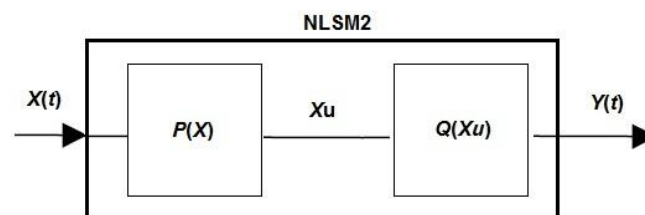


Figura 6.4 – Detalhes da etapa de geração da sequência com distribuição Gamma e correlação especificada

A sequência $X_U(t)$ pode ser obtida através da CCDF (que é igual a um menos a CDF) da sequência $X(t)$. Como $X(t)$ tem distribuição gaussiana, temos [46]:

$$X_U = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{x'^2}{2}} dx' = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(X/\sqrt{2}) \quad (6.1)$$

onde $\operatorname{erfc}(x)$ é a função erro complementar [47].

A sequência $Y(t)$ é obtida através da função quantil complementar Q_c [46]:

$$Y = Q_c(X_U) = Q_c\left(\frac{1}{2} \operatorname{erfc}(X/\sqrt{2})\right) \quad (6.2)$$

A função quantil complementar, entretanto, não tem uma expressão analítica para o caso da distribuição Gamma. Neste caso foram utilizadas funções para Matlab baseadas em algoritmos numéricos [48] e desenvolvidas pelo grupo WAFO (*Wave Analysis for Fatigue and Oceanography*) [49].

6.3. Relação entre as autocovariâncias das sequências gaussianas e gamma

A segunda NLSM do modelo transforma a sequência aleatória gaussiana correlatada em uma sequência aleatória gamma, como foi descrito no item anterior, mas também altera suas propriedades espectrais. Sendo assim, é preciso identificar a relação entre estas propriedades o que pode ser feito no domínio do tempo através das funções autocovariância (*autocovariance function* – ACF) das duas sequências [45].

Denominando $R_G(\tau)$ a ACF da sequência gaussiana, a ACF da sequência gamma $\eta(\tau)$ na saída é dada por [46]:

$$\eta(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} \eta(x_1) \cdot \eta(x_2) \cdot P_G(x_1, x_2, R_G(\tau)) dx_2 \quad (6.3)$$

onde $P_G(\tau)$ é a PDF gaussiana bidimensional de média igual a 0 e desvio padrão igual a 1 dada pela seguinte expressão [47]:

$$P_G(x_1, x_2, R_G(\tau)) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-R_G^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2 - 2x_1 \cdot x_2 \cdot R_G + x_2^2}{1-R_G^2}\right)} \quad (6.4)$$

Usando a expansão de Mehler, a Equação 6.4 pode ser escrita da seguinte forma [46]:

$$P_G(x_1, x_2, R_G(\tau)) = \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x_1/\sqrt{2}) \cdot H_n(x_2/\sqrt{2})}{2^n \cdot n!} \cdot R_G^n \quad (6.5)$$

onde H_n é o polinômio de Hermite definido em [47].

Esta expansão da PDF P_G em séries de potência da ACF da sequência gaussiana $R_G(\tau)$ leva a uma representação da ACF da sequência gamma $\eta(\tau)$ que pode ser resolvida computacionalmente através de seguinte relação [46]:

$$\eta(\tau) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_G^n}{2^n \cdot n!} \times \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cdot H_n(x) \cdot Q_c(\operatorname{erfc}(x)/2) dx \right)^2 \quad (6.6)$$

Uma vez resolvida a integral da Equação 6.6, a relação entre as ACFs é obtida da seguinte forma:

$$\eta(\tau) = f(R_G(\tau)) \quad (6.7)$$

A implementação computacional para a obtenção desta relação foi feita utilizando funções desenvolvidas para Matlab pelo grupo Radar Works [50] e pelo grupo WAFO [49].

A equação da PDF da distribuição Gamma está apresentada novamente na Equação 6.9.

$$p_{Gamma}(x) = \frac{1}{b^c \Gamma(c)} x^{c-1} e^{-\frac{x}{b}}, \quad x \geq 0, \quad b > 0, \quad c > 0 \quad (6.9)$$

O parâmetro b é denominado parâmetro de escala e não tem nenhuma influência na relação entre as ACFs.

O parâmetro c é denominado parâmetro de forma e sua influência nas estatísticas de segunda ordem é ilustrada no gráfico da Figura 6.5 que apresenta a relação entre as ACFs para diferentes valores deste parâmetro.

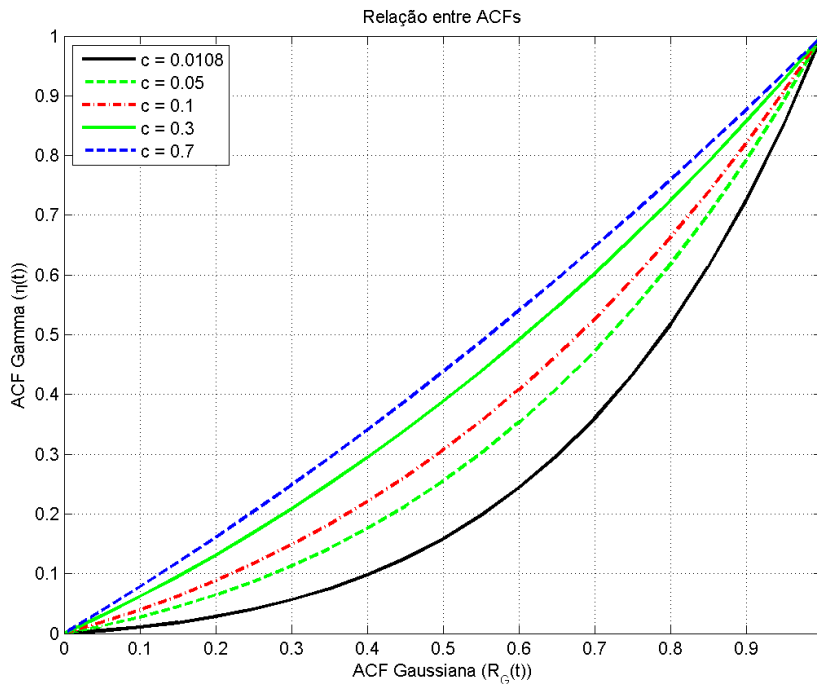


Figura 6.5 – Gráfico da ACF gamma como função da ACF gaussiana

É possível observar que quanto menor é o valor do parâmetro de forma c , maior é o efeito da não-linearidade sobre a correlação da sequência gaussiana.

A curva relativa ao parâmetro de forma c igual a 0,0108 é a curva da relação entre as ACFs para o enlace Bradesco.

Os valores do parâmetro de forma c que foram extraídos dos ajustes dos dados experimentais através de distribuição Gamma nos cinco enlaces analisados estão na faixa entre 0,0092 e 0,0230 o que indica que em todos eles a não-linearidade atua de forma intensa na ACF gaussiana.

Uma vez obtida a relação entre as ACFs da forma apresentada na Equação 6.7 e conhecendo a ACF gamma dos dados experimentais, é possível determinar a ACF da sequência gaussiana correlatada que deverá ser submetida à NLSM2.

$$R_G(\tau) = f^{-1}(\eta(\tau)) \quad (6.8)$$

Para isto, é necessário, portanto, que $\eta(\tau)$ seja uma função monotonicamente crescente. O gráfico da Figura 6.6 mostra que esta condição é satisfeita e que a função inversa pode ser extraída, mas as simulações realizadas indicaram que a inversão só é possível através de ajuste de curva.

O gráfico referente ao ajuste realizado para a inversão da função no caso do enlace Cenesp15 está apresentado na Figura 6.6.

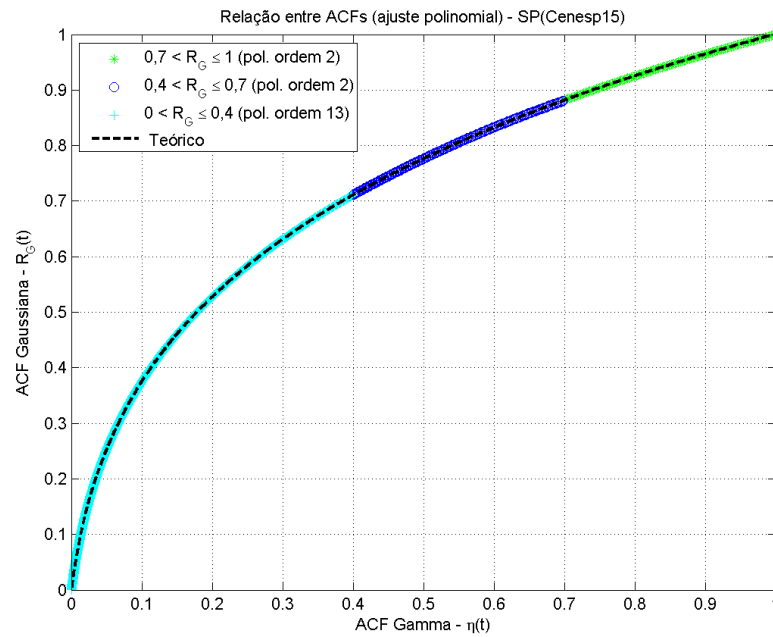


Figura 6.6 – Gráfico da ACF gaussiana como função da ACF gamma – Cenesp15

A partir da relação entre as ACFs e da ACF gamma dos dados experimentais é possível determinar a ACF gaussiana para cada enlace. A Figura 6.7 apresenta um gráfico para ilustrar.

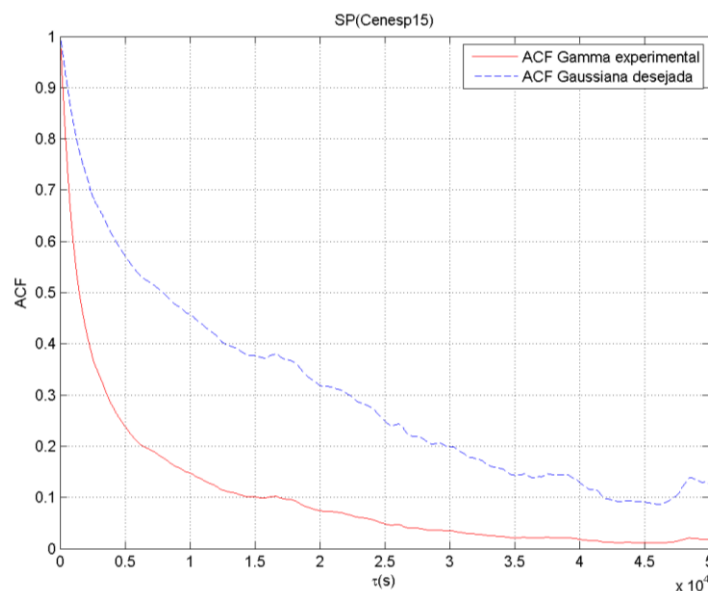


Figura 6.7 – ACF Gamma experimental e ACF Gaussiana desejada – Cenesp15

Uma vez determinada a função autocovariância necessária para a sequência gaussiana, é possível sintetizar o filtro linear do modelo GC.

6.4. Geração da sequência gaussiana correlatada

A implementação desta etapa corresponde à parte do modelo ilustrada na Figura 6.8.

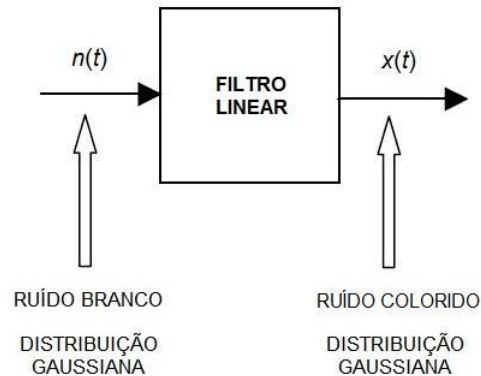


Figura 6.8 – Modelo GC (2ª etapa): geração da sequência gaussiana colorida

Sondhi [45] propõe que o filtro linear seja implementado através de sua resposta em frequência que é calculada através da transformada de Fourier da autocorrelação da sequência gaussiana. Este procedimento, entretanto, não permite a parametrização do modelo que é necessária para aplicação em enlaces com características diferentes operando em condições climáticas também diferentes.

Para permitir a parametrização do modelo foi escolhido o mesmo método utilizado nos modelos MB, EMB e TMB que foram apresentados no Capítulo 4: o uso de um filtro linear passa-baixa de primeira ordem. Esta escolha permite que a comparação entre os modelos seja feita levando em consideração apenas os ajustes estatísticos e os tipos de distribuição utilizados e leva o modelo GC a ter a mesma premissa dos modelos citados que consideram que a atenuação por chuvas pode ser modelada por um processo estacionário de Markov de primeira ordem.

Um algoritmo adequado para simulação em computador pode ser obtido a partir das propriedades de uma sequência de um processo estacionário de Markov de primeira ordem [03]:

$$X(t_k) = \rho \cdot X(t_{k-1}) + \sqrt{1 - \rho^2} \cdot n_k \quad (6.9)$$

onde n_k é uma sequência de números aleatórios independentes, normalmente distribuídos com média igual a 0 e desvio padrão igual a 1, ρ é igual a $\exp(-\beta \cdot T_s)$, T_s é o tempo de amostragem e t_k é dado pela seguinte expressão:

$$t_k = t_{k-1} + \Delta t = t_{k-1} + T_s \quad (6.10)$$

A função de transferência do filtro $H(z)$ é apresentada na Equação 6.11.

$$H(z) = \frac{\sqrt{1 - e^{-2\beta T_s}}}{1 - z^{-1}e^{-\beta T_s}} \quad (6.11)$$

Como a entrada do filtro é uma sequência gaussiana com média igual a zero e desvio padrão igual a um, não é necessário normalizar o filtro.

Para executar a filtragem é necessário, enfim, extrair o parâmetro β .

Os modelos MB, EMB e TMB realizam a extração do parâmetro através do momento condicional de segunda ordem da atenuação [03, 07, 11].

No modelo GC, como a determinação da ACF da sequência gaussiana é parte da implementação do modelo e o modelo também considera que a atenuação por chuva pode ser modelada por um processo de Markov de primeira ordem, o procedimento escolhido para extração do parâmetro β é um ajuste de curva do tipo $e^{-\beta\tau}$ diretamente na ACF gaussiana.

A Figura 6.9 mostra um gráfico com ajuste de curva da ACF gaussiana para diferentes faixas de intervalos de tempo para extração do β .

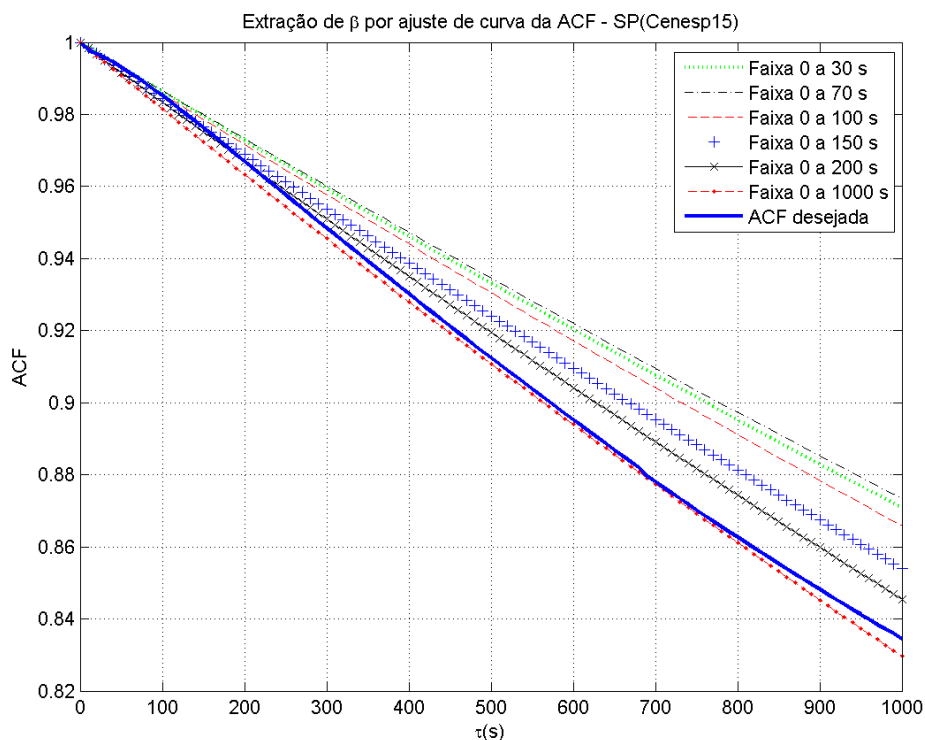


Figura 6.9 – Ajuste de curva para extração do parâmetro β – Cenesp15

Dependendo do valor da faixa de intervalo de tempo considerado no ajustes de curva, o valor do parâmetro pode variar de maneira significativa.

Foram feitas simulações do modelo com parâmetros extraídos a partir de diferentes valores de faixas de intervalos de tempo: 30, 70, 150, 200 e 1000 segundos. A faixa de 0 a 150 segundos foi escolhida, pois foi ela a faixa que proporcionou os melhores resultados no conjunto de enlaces.