PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0813065/CB

# 5 Modelo Teórico

Neste trabalho será adotada a simulação de Monte Carlo para precificar as opções reais do projeto, utilizando o *software* @Risk.

O modelo teórico aplicado é baseado na premissa de que o valor presente do projeto é o melhor estimador do seu valor de mercado. Uma vez que as opções reais têm como ativos subjacentes projetos ou unidades de negócios, o seu valor de mercado não pode ser obtido diretamente. Nesse sentido, Copeland e Antikarov (2001) sugerem que o Valor Presente do projeto sem flexibilidade, obtido mediante o emprego de técnicas tradicionais de VPL, é o melhor estimador do seu valor de mercado.

A modelagem do problema será feita em três etapas onde primeiramente é calculado o valor determinístico do projeto. Em seguida é calculado o prêmio de risco da demanda e definido o seu processo neutro ao risco. Finalmente, o valor das opções do projeto é definido para aplicarmos a simulação de Monte Carlo.

## 5.1. Modelagem determinística

Inicialmente determinamos o Valor Presente Líquido do projeto através do método do Fluxo de Caixa Descontado tradicional. Para tanto, calculamos o valor esperado determinístico dos Fluxos de Caixa do Projeto $\{f_t, t = 1, 2, \ldots, n\}$, sem a inclusão das flexibilidades gerenciais que o projeto possa apresentar. Em seguida, esses fluxos de caixa são descontados à taxa ajustada ao risco (μ) determinada pelo CAPM.

O VPL do projeto no instante inicial então é dado por:

$$V_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{E[f_t]}{(1+\mu)^t} \qquad (14)$$

## 5.2.
## Processo estocástico do tráfego

Neste trabalho considerou-se que a demanda irá variar estocasticamente no tempo seguindo um movimento geométrico browniano, como é usual na literatura. Esta modelagem implica que o tráfego e a receita nunca poderão ser negativos e que a sua volatilidade é constante no tempo. O processo estocástico de difusão da demanda, $S$, ao longo do tempo pode ser representado pela equação (15):

$$dS = \alpha_t S dt + \sigma_S S dz \tag{15}$$

onde $dS$ é a variação incremental do tráfego durante um curto período de tempo $dt$;

$\alpha_t$ é a taxa instantânea de crescimento da demanda;

$\sigma_S$ é a volatilidade do tráfego e;

$dz = \varepsilon\sqrt{dt}$, com $\varepsilon \sim N(0,1)$, é o processo de Wiener padrão.

Tal processo pode ser especificado considerando-se apenas o valor do tráfego inicial, a taxa de crescimento $\alpha_t$ em cada ano e a volatilidade do processo, que assumimos constante ao longo de todo o período da concessão. Para vermos isso, discretizamos o processo (15) para o intervalo de tempo $\Delta t$ :

$$\frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{S_t} = \alpha_t \Delta t + \sigma_S \varepsilon \sqrt{\Delta t} \tag{16}$$

O processo determinístico da demanda, $d\hat{S}$ implicitamente considerado na seção 5.1 que gera os fluxos $E[f_t]$, é portanto:

$$\frac{\hat{S}_{t+\Delta t} - \hat{S}_t}{\hat{S}_t} = \alpha_t \Delta t \tag{17}$$

Visto que a taxa de crescimento é anual, obtém-se $\alpha_t$ de cada ano considerando $\Delta t = 1$ ano.

Para obtermos os valores da demanda estocástica em cada ano, aplicamos o lema de Itô, obtendo a equação (18):

$$d(\ln S) = \left(\alpha_t - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)dt + \sigma_S dz \qquad (18)$$

onde $dz$ na equação (18) é o mesmo processo de Wiener que em (15).

Discretizando o processo, temos:

$$\ln S_{t+\Delta t} = \ln S_t + \left(\alpha_t - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)\Delta t + \sigma_S \varepsilon \sqrt{\Delta t} \qquad (19)$$

Exponenciando ambos os lados, chegamos à fórmula da demanda em cada ano, dada pela equação (20):

$$S_{t+1} = S_t \exp\left(\alpha_t - \frac{\sigma_S^2}{2} + \sigma_S \varepsilon\right) \qquad (20)$$

Utilizamos $\ln S$ ao invés de $S$, pois, de acordo com Hull (2008), a utilização do logaritmo natural nos dá uma aproximação mais exata. Determinada a evolução da demanda estocástica, temos diretamente o processo gerador da receita, uma vez que a tarifa é constante. Em outras palavras, a receita segue o mesmo processo estocástico da demanda.

## 5.3.
## Processo neutro ao risco e prêmio de risco

Segundo Brandão e Freitas (2009), para valorar as garantias governamentais é preciso utilizar um processo neutro ao risco, subtraindo-se o prêmio de risco da taxa de crescimento do tráfego. Para ativos de mercado isso significa substituir a taxa de retorno “verdadeira” do ativo pela taxa livre de risco. Entretanto, como os mercados para o tráfego e receita são incompletos, o prêmio de risco não pode ser obtido de forma direta. Dixit e Pindyck (1994) sugerem que, nesses casos, se adote um valor arbitrário para o prêmio de risco da receita. Brandão e Saraiva (2008) demonstram que, em alguns casos, como veremos a seguir, esse valor pode ser estimado de forma indireta a partir do processo estocástico do valor do projeto.

Uma vez que o tráfego representa a única fonte de incerteza do projeto, o processo de difusão do valor do projeto pode ser definido como função da demanda, $V = g(S)$, e sujeito ao mesmo processo de Wiener padrão, como pode ser visto na equação (21) a seguir.

$$dV = \mu V dt + \sigma_P V dz \tag{21}$$

onde $\sigma_P$ é a volatilidade do projeto. Aplicando o lema de Itô, temos:

$$dV = \left[\frac{\partial V}{\partial S}\alpha_t S + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma_S^2 S^2\right]dt + \frac{\partial V}{\partial S}\sigma_S S dz \tag{22}$$

Segundo Brandão e Saraiva (2008), adotando a premissa de que o valor presente do projeto base, sem opções, é o melhor estimador do seu valor de mercado, podemos determinar o prêmio de risco do projeto através do CAPM, onde $\mu = r + \beta_P\left[E\left(R_m\right) - r\right]$, sendo $\mu$ a taxa de desconto ajustada ao risco, $r$ a taxa de juros livre de risco, $\beta_P$ o beta do projeto e $E[R_m]$ o retorno esperado do mercado. O prêmio de risco do projeto é dado por $\mu - r = \beta_P\left[E\left(R_m\right) - r\right]$, que também pode ser expresso como em (23):

$$\lambda\sigma_P = \mu - r \tag{23}$$

onde $\lambda$ é o preço de mercado pelo risco do projeto.

Substituindo a equação (22) em (23), temos:

$$\left[\frac{\partial V}{\partial S}\alpha_t S + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma_S^2 S^2\right]\frac{1}{V} - r = \lambda\left[\frac{\partial V}{\partial S}\sigma_S S\right]\frac{1}{V}$$

Logo,

$$\frac{\partial V}{\partial S} S\left(\alpha_t - \lambda\sigma_S\right) + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma_S^2 S^2 - rV = 0 \tag{24}$$

A eq. (24) é a equação diferencial que o valor de um projeto sujeito a risco de tráfego deve seguir. Com essa equação é possível valorar as opções do projeto, desde que a demanda seja modelada segundo um processo neutro ao risco, onde a sua taxa de crescimento ($\alpha_t$) seja substituída pela taxa neutra ao risco ($\alpha_t - \lambda\sigma_S$).

Um método simples de se estimar o prêmio de risco da demanda ($\lambda\sigma_S$) é baseado no fato de que o valor esperado do projeto na avaliação neutra ao risco, sem as opções, deve ser idêntico ao valor esperado da avaliação tradicional onde os fluxos de caixa do projeto são descontados à taxa ajustada ao risco (μ), como pode ser visto na equação (25) abaixo:

$$\sum_{t=1}^{n} \frac{g(\hat{S})}{(1+\mu)^t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{g(\hat{S}_n)}{(1+r)^t} \tag{25}$$

onde $d\hat{S} = \alpha_t \hat{S} dt$;

$d\hat{S}_n = (\alpha_t - \lambda\sigma_S)\hat{S}dt$ e;

$g(\,.\,)$ é a função que gera o fluxo de caixa do projeto.

Uma vez que todas as variáveis acima são conhecidas, o valor de $\lambda\sigma_S$ pode ser calculado com a ferramenta "atingir meta" do *software Excel*. De posse do prêmio de risco, podemos construir a série de demanda que segue um processo neutro ao risco, dado pela equação (26):

$$Sn_{t+1} = Sn_t \exp\left[\left(\alpha_t - \lambda\sigma_S\right) - \frac{\sigma_S^2}{2} + \sigma_S \varepsilon\right] \tag{26}$$

## 5.4. Valorando as garantias

As garantias de tráfego mínimo podem ser modeladas como uma série de $n$ opções de venda (*put*) européias independentes com prazos de maturidade variando entre 1 e $n$ anos. Considerando uma tarifa constante, essa garantia é equivalente a uma garantia de receita mínima.

Para precificar as garantias é preciso modelar o tráfego a partir do seu processo estocástico neutro ao risco. As *puts* serão exercidas sempre que a demanda neutra ao risco ($Sn_t$) do ano $t$ for inferior ao piso pré-estabelecido para o mesmo ano. O piso de tráfego é obtido aplicando-se o percentual pré-definido sobre a demanda estimada no projeto base determinístico. O valor da *put* no ano $t$ é dado pela equação (27) a seguir:

$$Put_t = \max\{(Smin_t \times T) - (Sn_t \times T);0\} \tag{27}$$

onde $Sn_t$ é o tráfego neutro ao risco do ano $t$;

$T$ é a tarifa média e;

$S\text{mín}_t$ é o piso de tráfego pré-estabelecido para o ano $t$.

Após ter calculado os valores das *puts* para cada ano $t$ da concessão, deve-se descontá-los à taxa livre de risco para obter os valores presentes das garantias, calculando em seguida o somatório dos mesmos, como pode ser visto na equação (28) abaixo.

$$\text{Valor da Garantia} = \sum_{t=1}^{n} \frac{Put_t}{(1+r)^t} \tag{28}$$

O valor esperado da garantia será obtido após se realizar uma simulação de Monte Carlo com 10.000 iterações, cuja variável de resultado é o somatório dos valores presentes das *puts*. O valor da concessão com as garantias de tráfego mínimo é obtido somando-se o valor presente de todas as $n$ opções ao VPL estático do projeto base.

As garantias de tráfego mínimo fazem com que a receita efetiva da concessionária no ano $t$ passe a ser definida como:

$$\tilde{R}_t = max\{S_t \times T; Smin_t \times T\} \tag{29}$$

Entretanto, o modelo de garantia de tráfego mínimo nada diz a respeito dos excessos de demanda significativamente acima do tráfego esperado. Isso permitiria que a concessionária obtivesse lucros excessivos à custa do público. Uma solução para esse caso seria estipular um teto para o tráfego, onde a concessionária seria obrigada a repassar parte da receita para o governo quando a demanda fosse superior a um teto pré-estabelecido.

O teto de tráfego pode ser modelado como um série de *n* opções de compra (*call*) européias independentes, com prazos de maturidade variando de 1 a *n* anos. Vale ressaltar que o detentor desses direitos é o governo e não o concessionário privado. O valor da *call* no ano *t* é dado pela equação (30):

$$Call_t = max\{(Sn_t \times T) - (Smax_t \times T); 0\} \tag{30}$$

onde $S\mathrm{max}_t$ é o teto de tráfego pré-estabelecido para o ano *t*.

O valor do teto de tráfego é dado por:

$$Valor\, do\, teto = \sum_{t=5}^{40} \frac{Call_t}{(1+r)^t} \tag{31}$$

O valor esperado do teto de tráfego será obtido após se realizar uma simulação de Monte Carlo com 10.000 iterações, cuja variável de resultado é o somatório dos valores presentes das *calls*.

Considerando a garantia de tráfego mínimo e o teto de demanda, a receita do concessionário no ano t será:

$$\bar{R}_t = \min\{\tilde{R}_t, \Theta_t\} \tag{32}$$

onde $\Theta_t = \min\{S_t \times T; S\mathrm{max}_t \times T\}$ é a receita referente ao teto de demanda.