

## 5

### Resultados

#### 5.1

##### Base de Dados

A base de dados do presente Trabalho é constituída dos retornos<sup>15</sup> observados no período entre 03/01/2001 e 30/06/2009<sup>16</sup> das seguintes séries financeiras:

- Taxa de câmbio entre as moedas brasileira e norte americana (PTAX 800), expressa em R\$/US\$, divulgada pelo Banco Central do Brasil e disponível no site oficial da Instituição.
- Índice da Bolsa de Valores de São Paulo (Ibovespa), divulgado pela Bolsa de Valores de São Paulo (Bovespa) desde 1968 e disponível no site oficial da Instituição. O índice é usualmente interpretado como indicador do desempenho médio das cotações das ações mais líquidas e representativas negociadas na Bovespa<sup>17</sup>.

---

<sup>15</sup> Trata-se dos retornos logarítmicos,  $R_t = \ln(P_t / P_{t-1})$ , sendo  $P_t$  o valor da cotação da série na data t.

<sup>16</sup> Cabe dizer que as séries de retornos do dólar, Ibovespa e EMBI/BR, disponíveis entre 03/01/2001 e 30/06/2009, continham respectivamente 2134, 2099 e 2112 observações. Mantendo-se apenas as datas para as quais existiam cotações das três séries, obtivemos uma nova base com 2022 observações para cada série. Como o número de datas excluídas (112) representa apenas 5% da base geral e tais datas coincidem com feriados domésticos e internacionais (não representando perda de dados concentrados no tempo) optamos por montar uma base multivariada simplificada a partir da deleção dos dados faltantes. Entretanto, com o intuito de averiguar se tal procedimento alteraria consideravelmente os resultados, realizamos toda a modelagem descrita na Dissertação para uma base completa, com 2134 observações, mantendo-se as datas para as quais não existem cotações de uma ou duas das três séries. A modelagem é muito mais complexa, pois requer recursões específicas do filtro de Kalman para tratamento dos valores faltantes combinadas com tratamento univariado para bases multivariadas. As estimações dos parâmetros foram muito similares às encontradas pela base simplificada, mas o longo tempo requerido para a estimação do modelo, levou-nos a optar pela base simplificada.

<sup>17</sup> A metodologia consiste em montar uma carteira teórica composta pelas ações negociadas na Bolsa que atenderam cumulativamente aos seguintes critérios, com relação aos doze meses anteriores à formação da carteira: (i) estar incluída em uma relação de ações cujos índices de negociabilidade somados representem 80% do valor acumulado de todos os índices individuais; (ii) apresentar participação, em termos de volume, superior a 0,1% do total; (iii) ter sido negociada em mais de 80% do total de pregões do período. Atribui-se peso a cada ação de acordo

- Índice “EMBI/BR” (*Emerging Market Bond Index+Brazil*), divulgado diariamente pelo Banco de Investimentos JP Morgan e consultado via terminal da Bloomberg. O EMBI/BR corresponde à diferença diária entre as taxas de títulos públicos de longo prazo emitidos pelo governo brasileiro (títulos *brady*, *global bonds* e outros) e as taxas de títulos semelhantes do Tesouro norte-americano. Esta diferença é também conhecida como *spread* soberano ou Risco-País<sup>18</sup>. A unidade de medida é o ponto-base, e o índice pode ser interpretado da seguinte maneira: se o EMBI/BR em uma data estiver em 200 pontos-base, então naquela data os juros dos títulos públicos de longo prazo do Brasil estão 2% acima dos juros de títulos similares norte-americanos.

Seguem abaixo os gráficos e estatísticas descritivas básicas de cada uma das séries selecionadas:

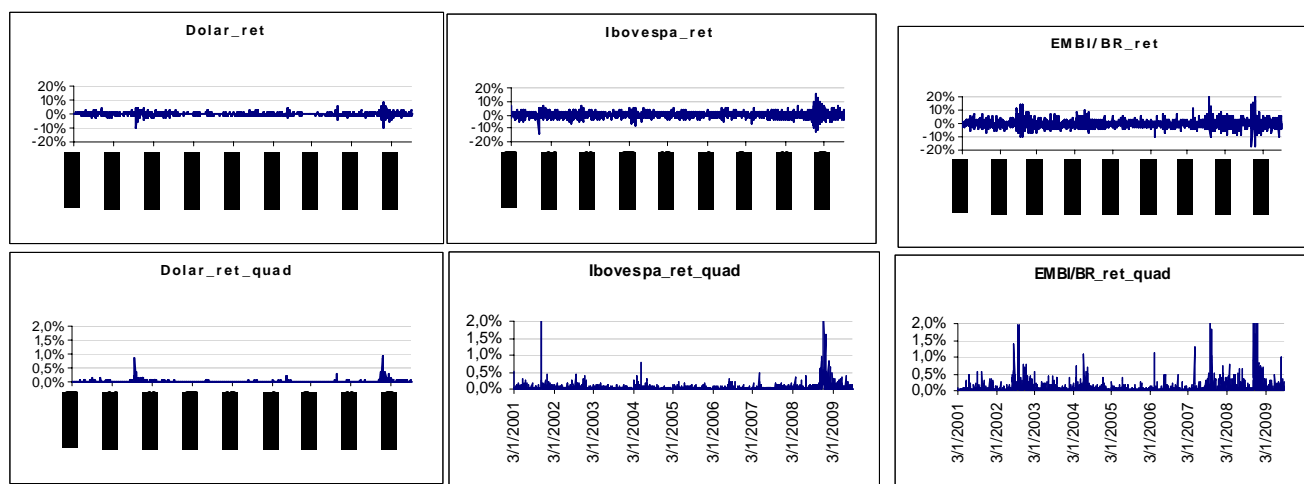


Figura 3 – Gráficos dos retornos (ret) e retornos ao quadrado (ret\_quad) do Dólar, Ibovespa e EMBI/BR

com a sua representatividade nas negociações naquele período e em seguida registra-se o preço corrente de cada ação da carteira. A soma do produto do preço de cada ação pelo seu peso resulta no índice Ibovespa. Maiores detalhes sobre a metodologia: [www.bmfbovespa.com.br](http://www.bmfbovespa.com.br)

<sup>18</sup> A assimilação deste índice como um indicador de Risco-País está relacionada ao *trade-off* de risco-retorno com o qual se depara um investidor no processo de seleção de portfólio. Um título de longo prazo emitido pelo Tesouro norte americano é considerado um ativo de baixíssimo risco, posto que poucos têm dúvidas sobre a capacidade de pagamento do governo dos EUA. Supondo que atualmente o índice EMBI/BR seja de 200 pontos base, isto significa que o governo brasileiro está tendo que pagar 2% de juros a mais que o governo norte-americano por seus títulos de longo prazo para torná-los suficientemente atrativos e equilibrar a demanda por títulos soberanos no mercado mundial. Esta promessa de retorno mais alto é uma recompensa à percepção de maior risco de pagamento dos títulos brasileiros, posto que há uma menor confiança dos agentes sobre a capacidade do governo brasileiro em honrar com seus compromissos comparado ao governo norte-americano. Quanto maior for o risco de um governo não honrar o pagamento de seus títulos, maior será o índice EMBI+ desta nação.

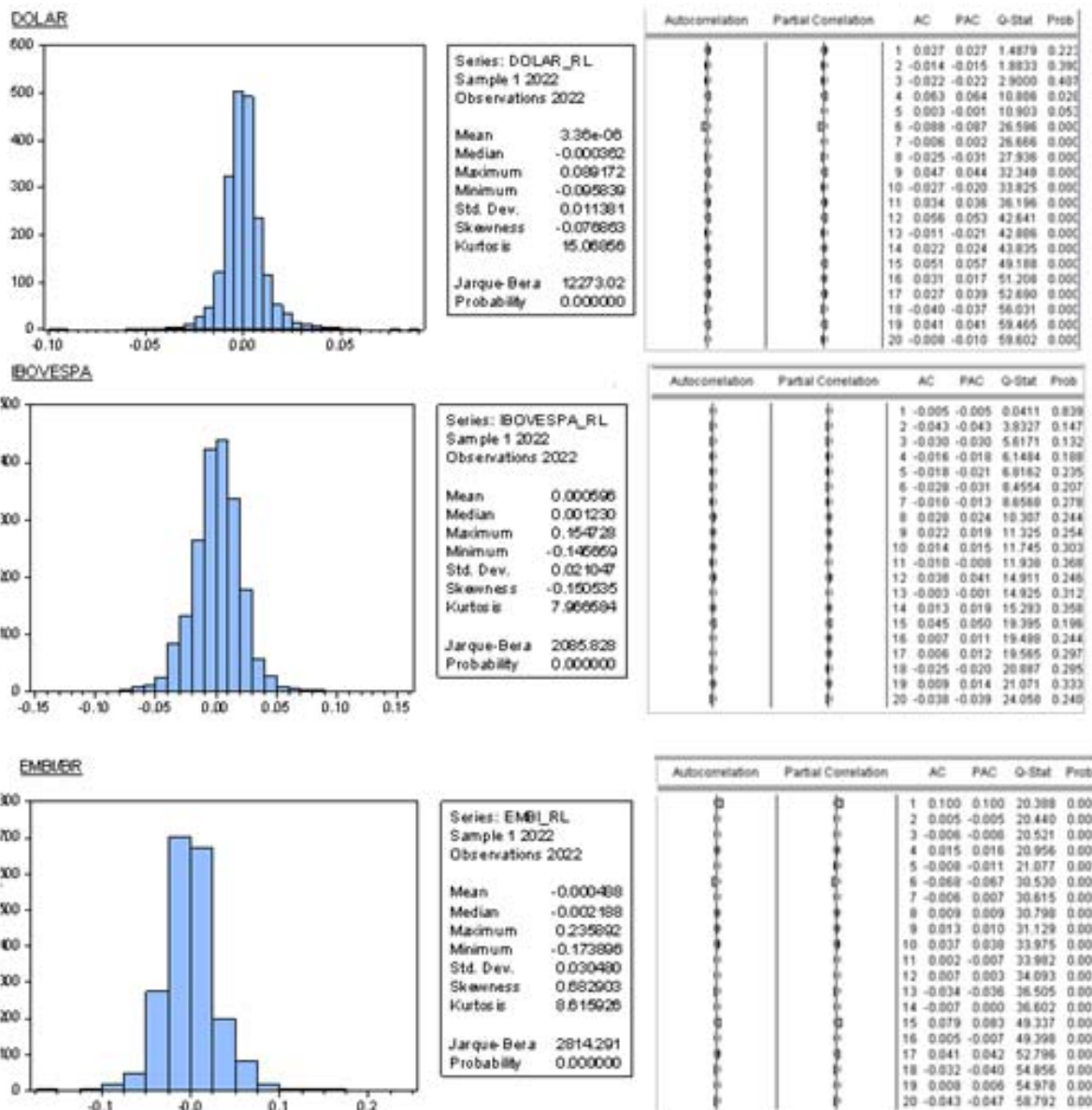


Figura 4 – Estatísticas descritivas básicas dos retornos do dólar, Ibovespa e EMBI/BR

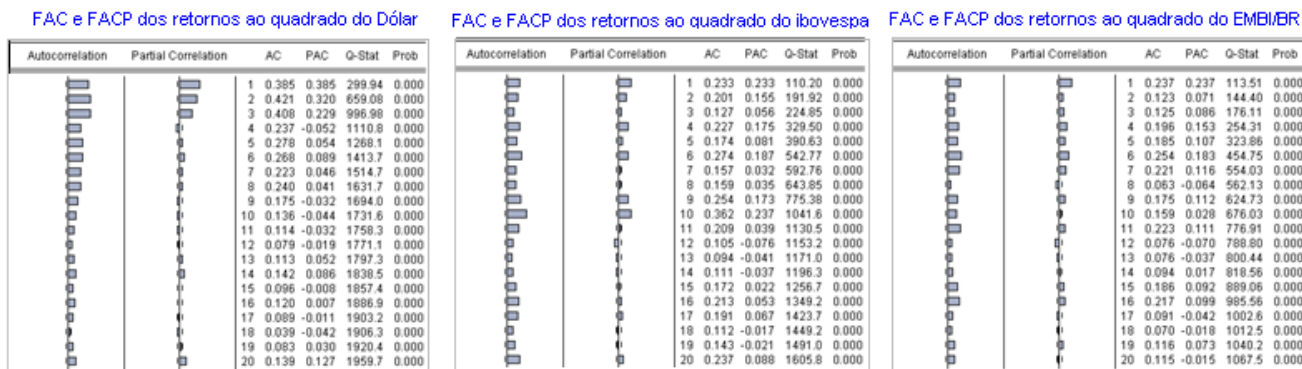


Figura 5 – FAC e FACP dos retornos ao quadrado de dólar, Ibovespa e EMBI/BR

Null Hypothesis: DOLAR has a unit root		
Exogenous: Constant		
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=25)		
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-43.73150	0.0001
Test critical values:	1% level	-3.433387
	5% level	-2.862768
	10% level	-2.567470
*Mackinnon (1996) one-sided p-values.		

Figura 6a – Teste de raiz unitária sobre os retornos do dólar

Null Hypothesis: IBOVESPA has a unit root		
Exogenous: Constant		
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=25)		
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-45.26554	0.0001
Test critical values:	1% level	-3.433387
	5% level	-2.862768
	10% level	-2.567470
*Mackinnon (1996) one-sided p-values.		

Figura 6b – Teste de raiz unitária sobre os retornos do Ibovespa

Null Hypothesis: EMBI has a unit root		
Exogenous: Constant		
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=25)		
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-40.63622	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.433387	
5% level	-2.862768	
10% level	-2.567470	
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.		

Figura 6c – Teste de raiz unitária sobre os retornos do EMBI/BR

Como esperado para retornos de séries financeiras, a hipótese de raiz unitária foi rejeitada para as três séries. Na figura 3, uma rápida inspeção visual nos gráficos dos retornos permite a constatação de *clusters* de volatilidade nas séries estudadas, sugerindo a presença de uma estrutura não linear para os retornos. Na figura 4, as caudas pesadas das séries (evidentes nas curtoses superiores a 3) e a rejeição da hipótese do teste Jarque-Bera a um grau de significância menor do que 0,000001 apontam claramente para a não normalidade dos dados, evidenciando um fato estilizado das séries financeiras. A queda lenta dos correlogramas dos quadrados dos retornos apontados na figura 5, acompanhadas de um p-valor praticamente nulo para todas as estatísticas Q de Ljung-Box calculadas até o 20º *lag*, corroboram a indicação de uma estrutura na variância condicional das séries.

## 5.2

### Ambiente Computacional

Os algoritmos foram implementados em diversas máquinas, tendo o programa final sido rodado em um processador Intel Atom com 1.60 GHz, 1GB de RAM. Os softwares estatísticos utilizados foram o Ox versão 3.1 e E-Views versão 6.

## 5.3

### Modelagem

#### 5.3.1

#### Estudo Individual das Séries

Antes da identificação de potenciais fatores comuns entre as volatilidades das três séries supracitadas, cada uma teve sua volatilidade estimada individualmente por dois métodos: GARCH e volatilidade estocástica univariada. O propósito deste estudo é ter uma rápida intuição do comportamento de cada volatilidade, antes da elaboração de um algoritmo mais complexo para o estudo da base multivariada.

- **Modelos GARCH:**

Seguem abaixo os modelos da família GARCH que melhor se ajustaram a cada uma das séries estudadas. A escolha foi feita com base apenas na FAC e FACP amostrais dos resíduos e critérios de informação de Akaike (AIC) e de Schwartz (BIC).

#### Dólar

Os retornos do dólar foram modelados com ARMA e suas volatilidades com modelos ARCH, GARCH, TARARCH e EGARCH, tendo o modelo MA(1) com intercepto + TARARCH (1,1,1), representado abaixo, melhor se ajustado à série de retornos.

$$\begin{aligned}
 R_t &= c + \theta_1 u_{t-1} + u_t \\
 u_t &= \sigma_t \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0,1) \\
 \sigma_t^2 &= c_3 + c_4 (\omega_{t-1}^2) + c_5 (\omega_{t-1}^2) [I_{\omega_{t-1} < 0}] + c_6 (\sigma_{t-1}^2) \\
 \text{onde} & \\
 \omega_t &= R_t - (c + \theta_1 u_{t-1}) \\
 \sigma_t^2 &= V(R_t / \mathfrak{F}_{t-1}) e, \\
 I_{\omega_{t-1} < 0} &= \begin{cases} 1, & \text{se } \omega_{t-1} < 0 \\ 0, & \text{se } \omega_{t-1} \geq 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{50}$$

Dependent Variable: DOLAR				
Method: ML - ARCH				
Date: 03/21/10 Time: 15:16				
Sample: 1 2022				
Included observations: 2022				
Convergence achieved after 11 iterations				
Bollerslev-Wooldrige robust standard errors & covariance				
MA Backcast: 0				
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)				
GARCH = C(3) + C(4)*RESID(-1)^2 + C(5)*RESID(-1)^2*(RESID(-1)<0) + C(6)*GARCH(-1)				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	-0.000357	0.000162	-2.202765	0.0276
MA(1)	0.132011	0.023874	5.529516	0.0000
Variance Equation				
C	1.88E-06	4.39E-07	4.275276	0.0000
RESID(-1)^2	0.252370	0.034398	7.336837	0.0000
RESID(-1)^2*(RESID(-1)<0)	-0.146422	0.043178	-3.391097	0.0007
GARCH(-1)	0.811249	0.018610	43.59228	0.0000
R-squared	-0.010881	Mean dependent var		3.36E-06
Adjusted R-squared	-0.013388	S.D. dependent var		0.011381
S.E. of regression	0.011457	Akaike info criterion		-6.733921
Sum squared resid	0.264640	Schwarz criterion		-6.717269
Log likelihood	6813.994	Hannan-Quinn criter.		-6.727810
Durbin-Watson stat	2.206025			
Inverted MA Roots	-0.13			

Figura 7 – Modelagem GARCH para a série de retornos do dólar

Observa-se que o coeficiente  $c_5$ , responsável pela assimetria informacional (ou efeito *leverage*), é significativo, o que implica que notícias ruins (no caso específico do retorno do dólar expressas sob a forma de choques positivos - desvalorizações) e notícias boas (expressas sob a forma de choques negativos - valorizações) têm impactos diferenciados na volatilidade. O sinal negativo da estimativa do parâmetro corrobora a observação empírica de que as más notícias têm maior efeito sobre a volatilidade da série que as boas notícias.

### Ibovespa

Os retornos do Ibovespa não apresentaram estrutura ARMA. Entretanto, os resultados das modelagens de sua volatilidade com modelos ARCH, GARCH, TARARCH e EGARCH foram positivos, tendo o modelo EGARCH (1,1,1) – representado abaixo – melhor se ajustado à série:

$$R_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0,1)$$

$$\log(\sigma_t^2) = c_1 + c_2 \left| \frac{R_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| + c_3 \frac{R_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + c_4 \log(\sigma_{t-1}^2) : \quad (51)$$

onde  $\sigma_t^2 = V(R_t / \mathfrak{I}_{t-1})$

Dependent Variable: IBOVESPA				
Method: ML - ARCH				
Date: 03/21/10 Time: 15:22				
Sample: 1 2022				
Included observations: 2022				
Convergence achieved after 14 iterations				
Bollerslev-Wooldrige robust standard errors & covariance				
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)				
LOG(GARCH) = C(1) + C(2)*ABS(RESID(-1))/SQRT(GARCH(-1)) + C(3)*RESID(-1)/SQRT(GARCH(-1)) + C(4)*LOG(GARCH(-1))				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
Variance Equation				
C(1)	-0.367630	0.073321	-5.013983	0.0000
C(2)	0.107950	0.024400	4.424264	0.0000
C(3)	-0.101757	0.023328	-4.361959	0.0000
C(4)	0.963879	0.008899	108.3174	0.0000
R-squared	-0.000802	Mean dependent var		0.000596
Adjusted R-squared	-0.002290	S.D. dependent var		0.021047
S.E. of regression	0.021071	Akaike info criterion		-5.087850
Sum squared resid	0.895988	Schwarz criterion		-5.076748
Log likelihood	5147.816	Hannan-Quinn criter.		-5.083776
Durbin-Watson stat	2.001282			

Figura 8 – Modelagem GARCH para a série de retornos do Ibovespa

Como no caso anterior, o coeficiente responsável pela assimetria informacional,  $c_3$ , mostrou-se significativo. No caso de modelos EGARCH, o sinal negativo deste coeficiente confirma a intuição de que as notícias ruins (que, no caso específico do Ibovespa, equivalem a choques negativos) elevam a volatilidade em uma magnitude maior que as notícias boas (choques positivos).

## EMBI/BR

Os retornos do EMBI/BR foram modelados com ARMA e sua volatilidade com modelos ARCH, GARCH, TARCH e EGARCH, tendo o modelo AR(1) sem intercepto + TARCH (1,1,1) - representado abaixo - melhor se ajustado à série de retornos do EMBI/BR:



$$R_t = \phi_1 R_{t-1} + \sigma_t \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0,1)$$

$$\sigma_t^2 = c_3 + c_4 (\omega_{t-1}^2) + c_5 (\omega_{t-1}^2) [I_{\omega_{t-1} < 0}] + c_6 (\sigma_{t-1}^2)$$

onde

$$\omega_{t-1} = R_{t-1} - (\phi_1 R_{t-1}) \quad (52)$$

$$\sigma_t^2 = V(R_t / \mathfrak{F}_{t-1}) e,$$

$$I_{\omega_{t-1} < 0} = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega_{t-1} < 0 \\ 0 & \text{se } \omega_{t-1} \geq 0 \end{cases}$$

Dependent Variable: EMBI				
Method: ML - ARCH				
Date: 03/21/10 Time: 15:27				
Sample (adjusted): 2 2022				
Included observations: 2021 after adjustments				
Convergence achieved after 12 iterations				
Bollerslev-Wooldrige robust standard errors & covariance				
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)				
LOG(GARCH) = C(2) + C(3)*ABS(RESID(-1))/@SQRT(GARCH(-1))) + C(4)*RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1)) + C(5)*LOG(GARCH(-1))				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
AR(1)	0.134271	0.024906	5.391105	0.0000
Variance Equation				
C(2)	-0.407351	0.070052	-5.815003	0.0000
C(3)	0.167760	0.025874	6.483825	0.0000
C(4)	0.095990	0.020462	4.691223	0.0000
C(5)	0.961318	0.008563	112.2645	0.0000
R-squared	0.008747	Mean dependent var		-0.000473
Adjusted R-squared	0.006781	S.D. dependent var		0.030480
S.E. of regression	0.030376	Akaike info criterion		-4.431910
Sum squared resid	1.860217	Schwarz criterion		-4.418028
Log likelihood	4483.445	Hannan-Quinn criter.		-4.426816
Durbin-Watson stat	2.065388			
Inverted AR Roots	.13			

Figura 9 – Modelagem GARCH para a série de retornos do EMBI/BR

Como dito anteriormente, o EMBI/BR é interpretado como uma medida de Risco-País. Logo, choques positivos (que implicam em aumento do EMBI/BR) equivalem a notícias ruins, como no caso do dólar. Observe que o modelo capturou o efeito *leverage*, sendo o coeficiente responsável pela assimetria informacional,  $c_4$ , significativo e negativo, indicando novamente que as notícias ruins (neste caso, representadas por choque positivos) têm maior efeito sobre a volatilidade que as boas notícias.

Segue a tabela com as covariâncias e correlações entre as volatilidades extraídas individualmente com base nos modelos da família GARCH supracitados, bem como o gráfico das volatilidades estimadas:

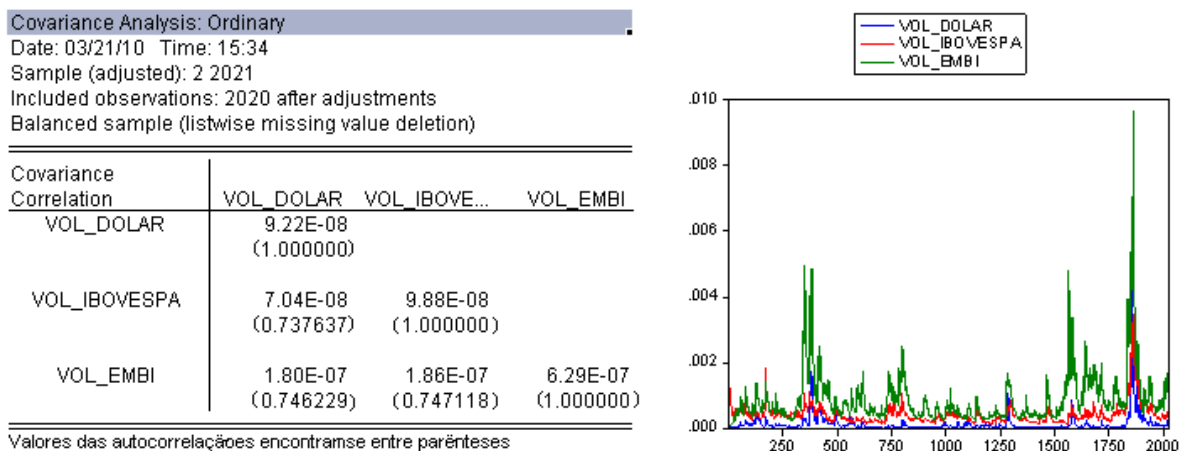


Figura 10 – (a) Covariância e Correlação entre as volatilidades estimadas univariadamente pelos modelos GARCH, (b) Volatilidades estimadas univariadamente pelos modelos GARCH

A figura 8 apresenta correlações altas entre as volatilidades (superiores a 0,70), corroborando as informações trazidas pelo gráfico, o qual mostra uma relativa “sintonia” entre os períodos de alta das três curvas, o que sugere a presença de um fator comum guiando o comportamento das três volatilidades.

Segue abaixo a Análise de Componentes Principais (ACP) sobre as volatilidades estimadas, onde se pode observar que uma única componente é responsável por mais de 80% da variação do sistema.

Principal Components Analysis						
Date: 03/28/10 Time: 19:21						
Sample (adjusted): 2 2021						
Included observations: 2020 after adjustments						
Balanced sample (listwise missing value deletion)						
Computed using: Ordinary correlations						
Extracting 3 of 3 possible components						
Eigenvalues: (Sum = 3, Average = 1)						
Number	Value	Difference	Proportion	Cumulative Value	Cumulative Proportion	
1	2.487331	2.224946	0.8291	2.487331	0.8291	
2	0.262385	0.012100	0.0875	2.749715	0.9166	
3	0.250285	---	0.0834	3.000000	1.0000	
Eigenvectors (loadings):						
Variable	PC 1	PC 2	PC 3			
VOL_DOLAR	0.576456	0.723919	0.378997			
VOL_IBOVESPA	0.576687	-0.689023	0.438953			
VOL_EMBI	0.578904	-0.034474	-0.814667			

Figura 11 – Análise das componentes principais

Antes de iniciarmos o estudo multivariado para efetuar a extração deste potencial fator latente, foi realizada a estimação da volatilidade estocástica de cada série individualmente, como forma de confirmar a intuição obtida pela modelagem GARCH univariada.

- **Volatilidade Estocástica Univariada**

Para as três séries foi estimado, individualmente, o seguinte modelo de volatilidade estocástica autoregressiva:

$$\begin{aligned} R_t &= \varepsilon_t e^{\frac{h_t}{2}}, \quad \varepsilon_t \sim N(0,1) \\ h_{t+1} &= c + \phi_1 h_t + \eta_t \quad \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2) \end{aligned} \quad (53)$$

para  $R_t$  = resíduos da estimação do modelo ARMA.

Aplicando as transformações sugeridas na Seção 3.1 (equação 19) para linearização da equação das medidas, obtemos o seguinte modelo na forma de Espaço de Estado:

$$\begin{aligned} Y_t &= h_t + \xi_t, \quad \xi_t \sim N\left(0, \frac{\pi^2}{2}\right) \\ h_{t+1} &= c_t + \phi_1 h_t + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2) \end{aligned} \quad (54)$$

Sendo  $Y_t = \ln(R_t^2) + 1,27$  e  $\xi_t = \ln(\varepsilon_t^2) + 1,27$

É possível não haver alterações nas cotações do índice EMBI/BR de datas consecutivas. A razão para tanto é que o EMBI/BR mede a diferença de taxas de juros de títulos de longo prazo soberanos e tais títulos apresentam menor variabilidade que as de títulos semelhantes de curto prazo ou emitidos por empresas. Além disso o índice apresenta nível limitado de precisão no cálculo<sup>19</sup>. Existem, portanto, muitas datas para o qual o retorno do EMBI/BR é nulo. Como o *input* da equação das medidas do modelo de volatilidade estocástica ( $Y_t$ ) equivale ao logaritmo do quadrado do retorno da série somado a 1,27, há um

<sup>19</sup> O índice EMBI/BR é medido em *basis-points*, que correspondem a um centésimo de ponto percentual. Dada a não utilização de frações de *basis-points*, o nível máximo de precisão na mensuração do diferencial entre as rentabilidades dos títulos corresponde a 0,01%.

problema técnico associado à obtenção deste dado quando as taxas são nulas. Para contorná-lo optamos por utilizar o método de correção exposto em Koopman, Harvey, Doornik e Shephard (1999, p. 98-99).<sup>20</sup>

Seguem os resultados das estimações do modelo acima, via estimador de *Quasi* Máxima Verossimilhança e aplicação do filtro de Kalman:

	<b>Dólar</b>	<b>Ibovespa</b>	<b>Embi+BR*</b>
Convergência	Forte	Forte	Forte
	20ª iteração	11ª iteração	13ª iteração
Verossimilhança	-4.411	-4.510	-4.587
MSE	4,0450	4,8513	4,9483
Média de resíduos padronizados:	0,0048	0,0007	0,0036
Variância da Inovação padronizada	0,8614	1,0015	1,0428
Estatística de Durbin Watson	1,9566	2,1709	1,9984
AIC	4,3679	4,4666	4,5419
BIC	4,3762	4,4749	4,5503
parâmetros estimados			
ct	-0,1760 (0,0030041)	-0,1056 (0,0042951)	-0,1891 (0,022603)
$\phi_1$	0,9822 (0,000032)	0,9868 (0,000066)	0,9744 (0,000419)
$\sigma_\eta^2$	0,0348 (0,000134)	0,0073 (0,000005)	0,0338 (0,00085)

\* Para esta série foi feita um tratamento ARMA previamente à estimação da volatilidade estocástica

Valores em parênteses representam os erros padrões das estimativas

Figura 12 – Resultados da estimação dos modelos univariados de VE

<sup>20</sup> Ao invés de calcular o input da equação das medidas para o EMBI/BR da forma clássica ( $y_{embi,t} = \ln(R_{embi,t}^2) + 1,27$ ), é utilizada a seguinte equação “corretiva”:

$$y_{embi,t} = \ln(R_{embi,t}^2 + f * v) - \frac{f * v}{R_{embi,t}^2 + f * v} + 1,27$$

onde v é a variância amostral da série

$R_{embi,t}^2$  e f é um fator de correção arbitrário, para o qual se sugerem valores menores do que 0,002. Para a base de dados deste Trabalho, obteve-se  $v = 6,53 * 10^{-6}$  e fixou-se f em 0,001. A variável

$y_{embi,t}$  foi calculada pelas duas fórmulas (clássica e corretiva) nas datas em que os retornos eram não nulos. A diferença entre os resultados obtidos pelos dois métodos, foi mínimo, de modo que o

maior afastamento foi da ordem de 0,0003%, mostrando que para as datas em que  $R_{embi,t}^2$  é não nulo, o método “corretivo” e “clássico” são muito próximos.

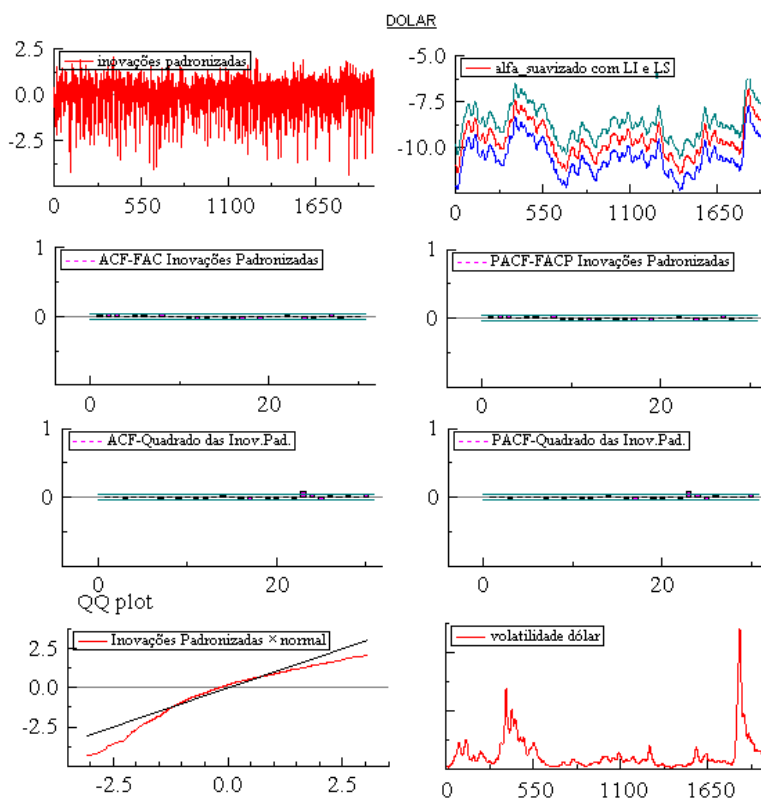


Figura 13 – Resultados da estimação da volatilidade do dólar

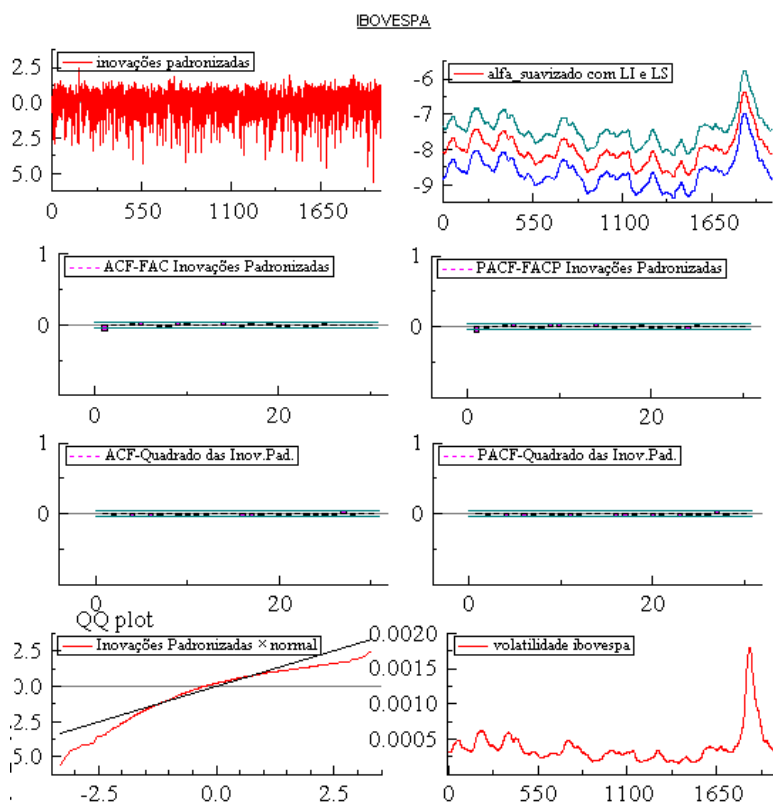


Figura 14 – Resultados da estimação da volatilidade do Ibovespa

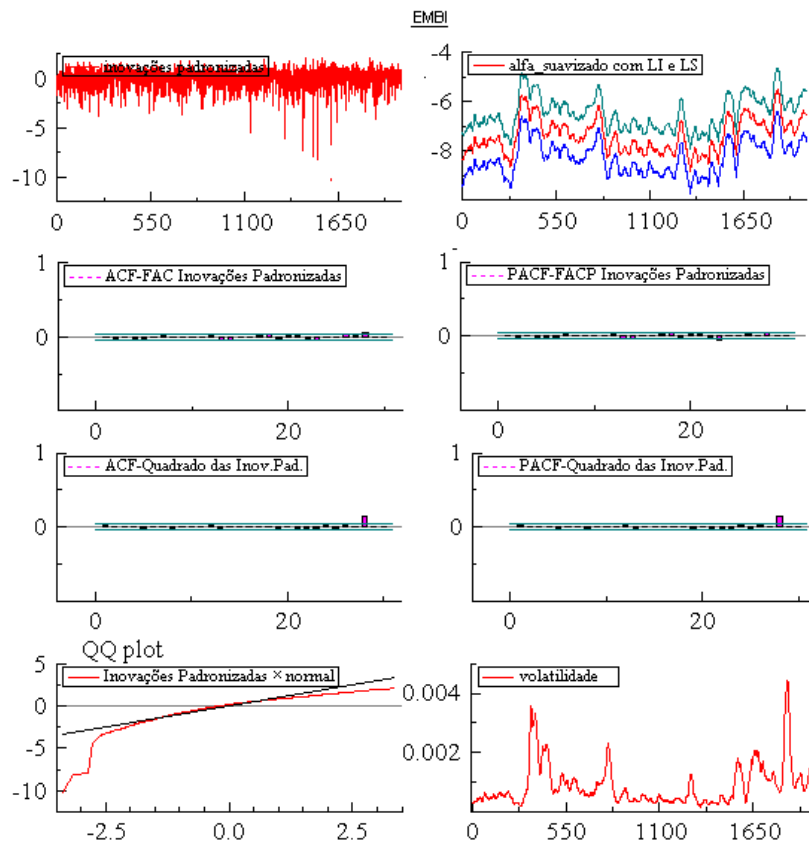


Figura 15 – Resultados da estimação da volatilidade do EMBI/BR

Observa-se que o parâmetro estimado  $\phi_1$  ficou próximo de 1 para todas as séries, aproximando o processo de suas volatilidades a um passeio aleatório<sup>21</sup>.

Ressalta-se que, conforme demonstrado na seção 3.1, a volatilidade para a série original  $R_t$  pode ser obtida através da seguinte equação:

$$\begin{aligned}
 V(R_t / \mathfrak{F}_{t-1}) &= E[(R_t - E(R_t))^2 / \mathfrak{F}_{t-1}] \\
 &= E[R_t^2 / \mathfrak{F}_{t-1}] \\
 &= E[(e^{h_t} \varepsilon_t^2) / \mathfrak{F}_{t-1}] \\
 &= E[e^{h_t} / \mathfrak{F}_{t-1}] \\
 &= e^{\mu_{ch} + \frac{1}{2}\sigma_{ch}^2}
 \end{aligned} \tag{55}$$

sendo  $\mu_{ch}$  e  $\sigma_{ch}^2$  respectivamente a média e variância condicionais de  $h_t$  em relação à  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{F}_{t-1}$ .

<sup>21</sup> Isto é coerente com os resultados encontrados em Pimentel (2008) para as séries de retorno do dólar e do Ibovespa.

Substituindo em (55)  $\mu_{ch}$  e  $\sigma^2_{ch}$  por  $a_t$  e  $P_t$  (respectivamente previsões da média e variância condicionais do estado estimadas pelo filtro de Kalman sob Normalidade) foi obtido o gráfico de cada uma das volatilidades estimadas abaixo, bem como as covariâncias e correlações entre elas, corroborando o que já havia sido observado através da modelagem GARCH: evidências quanto à existência de fatores comuns.

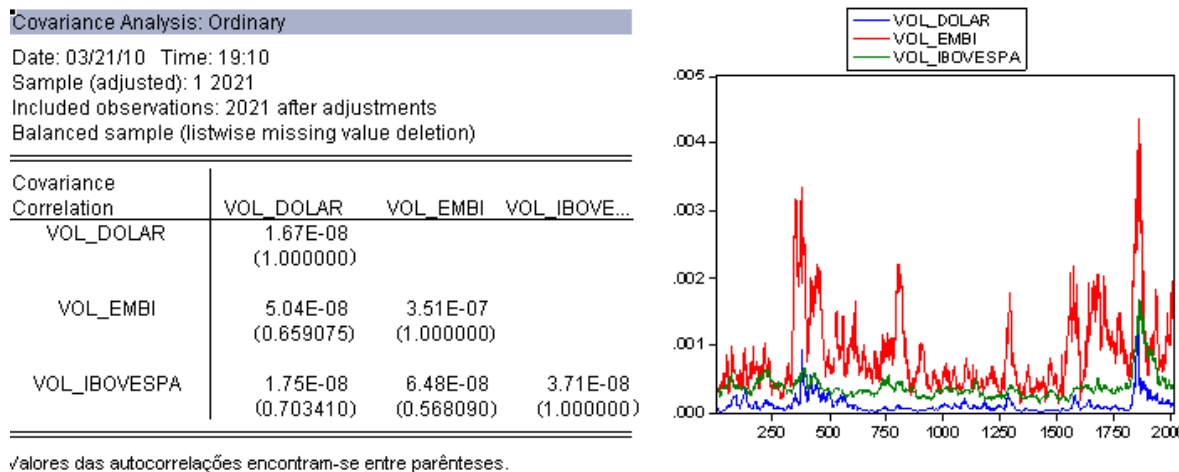


Figura 16 – (a) Covariância e Correlação entre as volatilidades estimadas univariadamente por VE, (b) Volatilidades estimadas univariadamente por VE

Uma rápida Análise dos Componentes Principais (ACP) feita sobre as volatilidades estimadas aponta para a presença de um único fator comum respondendo por mais de 75% da variação do sistema, como pode ser visto na figura abaixo:

Principal Components Analysis						
Date: 03/28/10 Time: 19:10						
Sample (adjusted): 1 2021						
Included observations: 2021 after adjustments						
Balanced sample (listwise missing value deletion)						
Computed using: Ordinary correlations						
Extracting 3 of 3 possible components						
Eigenvalues: (Sum = 3, Average = 1)						
Number	Value	Difference	Proportion	Cumulative Value	Cumulative Proportion	
1	2.288657	1.852900	0.7629	2.288657	0.7629	
2	0.435757	0.160171	0.1453	2.724414	0.9081	
3	0.275586	---	0.0919	3.000000	1.0000	
Eigenvectors (loadings):						
Variable	PC 1	PC 2	PC 3			
VOL_DOLAR	0.598905	-0.121151	-0.791603			
VOL_EMBI	0.559070	0.770991	0.304981			
VOL_IBOVESPA	0.573370	-0.625216	0.529483			

Figura 17 – Análise das componentes principais

### 5.3.2

#### Modelo Multivariado para Volatilidade Estocástica

O estudo individual das séries é útil para uma análise preliminar das volatilidades, mas, uma vez que as séries supostamente apresentam relações de interdependência, é importante que a análise das volatilidades seja feita da forma multivariada .

#### Passo 0: Tratamento da Série Multivariada

Antes de iniciar a modelagem para extração do fator comum é preciso tratar a série multivariada de retornos. No estudo univariado, escolhemos um modelo ARMA parra cada série a fim de retirar qualquer dependência linear entre os dados. No estudo multivariado, aplicaremos um modelo VAR (Vetor Auto-Regressivo) sobre a base de dados<sup>22</sup> para extração deste tipo de dependência.

<sup>22</sup> A base de dados do modelo foi composta pelas série dos retornos do dólar, Ibovespa e Embi/BR, subtraídas da média amostral das respectivas séries. Com isso utilizou-se um modelo VAR sem constante para estimação da dependência linear dos dados.



Utilizando o pacote estatístico E-VIEWS, o critério de Schwartz (SC) sugeriu a utilização de um modelo de ordem 2, cujo resultado pode ser visto a seguir:

Vector Autoregression Estimates			
Date: 08/10/10 Time: 13:17			
Sample (adjusted): 2 2022			
Included observations: 2021 after adjustments			
Standard errors in ( ) & t-statistics in [ ]			
	DOLAR	IBOV	EMBI
DOLAR(-1)	-0.129147 (0.02608) [-4.95246]	0.137989 (0.04963) [2.78012]	-0.343494 (0.07107) [-4.83335]
IBOV(-1)	-0.104569 (0.01424) [-7.34328]	-0.022439 (0.02710) [-0.82788]	-0.209279 (0.03881) [-5.39263]
EMBI(-1)	0.053991 (0.01092) [4.94641]	-0.056975 (0.02078) [-2.74242]	0.089598 (0.02975) [3.01198]
R-squared	0.066502	0.005225	0.032832
Adj. R-squared	0.065577	0.004239	0.031873
Sum sq. resids	0.244378	0.885324	1.815019
S.E. equation	0.011005	0.020945	0.029990
F-statistic	71.88038	5.299801	34.25203
Log likelihood	6247.425	4946.673	4221.237
Akaike AIC	-6.179540	-4.892304	-4.174406
Schwarz SC	-6.171210	-4.883974	-4.166076
Mean dependent	-1.26E-05	-1.21E-05	-2.24E-05
S.D. dependent	0.011384	0.020990	0.030480
Determinant resid covariance (dof adj.)		2.23E-11	
Determinant resid covariance		2.22E-11	
Log likelihood		16186.18	
Akaike information criterion		-16.00908	
Schwarz criterion		-15.98409	

Com base neste modelo, foram extraídos os resíduos ( $R_t$ ), que após transformados  $(\ln(R_t^2) + 1,27)$  serviram de *input* para a aplicação do modelo a seguir.

### Passo 1: Modelo Irrestrito

Seguindo os procedimentos propostos em Harvey, Ruiz e Shephard (1994), o primeiro passo para a extração dos potenciais fatores comuns no estado constitui em estimar o seguinte modelo multivariado sem restrições sobre a matriz  $Q_t$ :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_{dólar,t} \\ y_{ibovespa,t} \\ y_{embi,t} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha_{1,t} \\ \alpha_{2,t} \\ \alpha_{3,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_{dólar,t} \\ \xi_{ibovespa,t} \\ \xi_{embi,t} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \xi_{dólar,t} \\ \xi_{ibovespa,t} \\ \xi_{embi,t} \end{bmatrix} \sim N \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, H_{t,3 \times 3} \right\} \\ \begin{bmatrix} \alpha_{1,t+1} \\ \alpha_{2,t+1} \\ \alpha_{3,t+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha_{1,t} \\ \alpha_{2,t} \\ \alpha_{3,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_{1,t} \\ \eta_{2,t} \\ \eta_{3,t} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \eta_{1,t} \\ \eta_{2,t} \\ \eta_{3,t} \end{bmatrix} \sim N \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, Q_{t,3 \times 3} \right\} \end{aligned} \quad (56)$$

Onde

$$y_{dólar,t} = \ln(R_t^2 \text{dólar}) + 1,27$$

$$y_{ibovespa,t} = \ln(R_t^2 \text{ibovespa}) + 1,27$$

$$y_{embi,t} = \ln(R_t^2 \text{embi}) + 1,27$$

$$\xi_{dólar,t} = \ln(\varepsilon^2 \text{dólar}_t) + 1,27$$

$$\xi_{ibovespa,t} = \ln(\varepsilon^2 \text{ibovespa}_t) + 1,27$$

$$\xi_{embi,t} = \ln(\varepsilon^2 \text{embi}_t) + 1,27$$

$$H_t = \begin{bmatrix} \frac{\pi^2}{2} & \psi_0 & \psi_1 \\ \psi_0 & \frac{\pi^2}{2} & \psi_2 \\ \psi_1 & \psi_2 & \frac{\pi^2}{2} \end{bmatrix} \quad Q_t = \begin{bmatrix} \psi_3 & \psi_6 & \psi_7 \\ \psi_6 & \psi_4 & \psi_8 \\ \psi_7 & \psi_8 & \psi_5 \end{bmatrix}$$

O modelo é dito irrestrito, pois além de não impor restrições sobre  $Q_t$ , supõe que existe o máximo de fatores comuns possíveis, isto é  $k = p = 3$ .

Observe que a equação do estado segue um passeio aleatório, o que não destoa dos resultados preliminares obtidos via estudo individual das séries.

A presença de variáveis não estacionárias no estado torna necessária a escolha de um método de inicialização. Optou-se primeiramente pela abordagem aproximada (*big kappa*) dada a simplicidade da implementação. Foram feitas

estimações fixando  $\kappa$  em  $10^3$ ,  $10^5$  e  $10^7$ , não havendo grandes distorções entre os parâmetros estimados em cada modelo..

Para a implementação do método acima, o estado inicial  $\alpha_{1,t}$  foi definido da seguinte forma:

$$\alpha_{1,t} = \alpha_{0,t} + A\delta + R_0\eta_0, \text{ sendo } \eta_0 \sim (0, Q_0), \quad (57)$$

Sendo:

- (i)  $\delta$  é um vetor de dimensão 3x1 (uma vez que existem 3 componentes difusas no estado),
- (ii)  $\alpha_{0,t}$ ,  $A$ ,  $R_0$  e  $Q_0$  assumem os seguintes valores:

$$\alpha_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q_0 = 0.$$

Segue o quadro com as estimativas das matrizes do sistema que possuem parâmetros desconhecidos ( $H_t$  e  $Q_t$ ), bem como as matrizes estimadas de correlação: (i) entre os erros das medidas ( $H_t$ , correlação) e (ii) entre os erros do estado ( $Q_t$ , correlação), para cada um dos kappas fixados.

Kappa = $10^7$				Kappa = $10^5$				Kappa = $10^3$			
Ht	4,93480	0,59039	0,43244	Ht	4,93480	0,59039	0,43245	Ht	4,93480	0,59041	0,43248
	0,59039	4,93480	0,90752		0,59039	4,93480	0,90752		0,59041	4,93480	0,90754
	0,43244	0,90752	4,93480		0,43245	0,90752	4,93480		0,43248	0,90754	4,93480
Ht	1,00000	0,11964	0,08632	Ht	1,00000	0,11964	0,08763	Ht	1,00000	0,11964	0,08764
	0,11964	1,00000	0,18390		0,11964	1,00000	0,18390		0,11964	1,00000	0,18391
Correlação	0,08632	0,18390	1,00000	Correlação	0,08763	0,18390	1,00000	Correlação	0,08764	0,18391	1,00000
Qt	0,02714	0,01147	0,01612	Qt	0,02714	0,01147	0,01612	Qt	0,02713	0,01146	0,01611
	0,01147	0,00706	0,00777		0,01147	0,00706	0,00777		0,01146	0,00706	0,00776
	0,01612	0,00777	0,01312		0,01612	0,00777	0,01312		0,01611	0,00776	0,01311
Qt	1,00000	0,82833	0,85418	Qt	1,00000	0,82833	0,85418	Qt	1,00000	0,82824	0,85415
	0,82833	1,00000	0,80720		0,82833	1,00000	0,80720		0,82824	1,00000	0,80714
Correlação	0,85418	0,80720	1,00000	Correlação	0,85418	0,80720	1,00000	Correlação	0,85415	0,80714	1,00000

Figura 18 – Resultados da estimação pelo método de inicialização aproximada

Apesar da estabilidade verificada para os resultados acima, optamos por implementar a inicialização exata, dada a ausência de arbitrariedade inerente ao método. Os resultados das recursões do FKIE encontram-se na figura 18 e foram muito semelhantes aos obtidos pelo método de inicialização aproximada (figura 17).

<b>Inicialização exata</b>			
Ht	4,93480	0,59039	0,43245
	0,59039	4,93480	0,90752
	0,43245	0,90752	4,93480
Ht Correlação	1,00000	0,11964	0,08763
	0,11964	1,00000	0,18390
	0,08763	0,18390	1,00000
Qt	0,02714	0,01147	0,01612
	0,01147	0,00706	0,00777
	0,01612	0,00777	0,00131
Qt Correlação	1,00000	0,82830	0,85419
	0,82830	1,00000	0,80720
	0,85419	0,80720	1,00000

Figura 19 – Resultado da estimação pelo método de inicialização exata

Kappa = 10 <sup>7</sup>		Inicialização exata	
Convergência	Forte 32ª iteração	Convergência	Forte 34ª iteração
Verossimilhança	-9,848	Verossimilhança	-9,824
MSE	14,5450	MSE	14,5450
Estatística de Durbin Watson	2,0807	Estatística de Durbin Watson	2,0864
AIC	9,7545	AIC	9,7306
BIC	9,7795	BIC	9,7556
Média de resíduos padronizados:		Média de resíduos padronizados:	
dolar	0,0029	dolar	0,0013
ibovespa	-0,0018	ibovespa	-0,0038
embibr	0,0079	embibr	0,0068
Variância da Inovação padronizada		Variância da Inovação padronizada	
dolar	1,0295	dolar	1,0352
ibovespa	1,0187	ibovespa	1,0258
embibr	0,9688	embibr	0,9717

Figura 20 – Comparação dos métodos de inicialização exata e aproximada

## Passo 2: Análise das Componentes Principais

Seguindo os procedimentos propostos em Harvey, Ruiz e Shephard (1994), o segundo passo para a extração dos potenciais fatores comuns entre volatilidades consiste em aplicar a Análise de Componentes Principais (ACP) sobre a matriz  $Q$  estimada pelo modelo multivariado irrestrito (56), definindo assim o número de fatores comuns a serem utilizados no modelo final.

O resultado da ACP (com base nos resultados do FKIE) apontou para a existência de um único fator responsável por 90% da variação das séries (figura 19). A análise foi feita também com os dados normalizados, o que equivale a fazer a ACP para a matriz estimada de correlação dos erros do estado ( $\hat{Q}_t,correl$ ). Isto é indicado, em geral, para bases de dados cujas séries apresentam grandes diferenças de escala. Entretanto, como os dados originais das três séries são retornos, as duas análises apontaram para o mesmo resultado: presença de um único fator, respondendo por aproximadamente 90% da variação das séries.<sup>23</sup>

<sup>23</sup> Um questionamento pertinente é quanto a crise de 2008 afetou os indicadores. A magnitude deste impacto pode ter sido tão intensa que criou a sugestão de um forte fator comum entre as séries que na verdade não existe. Para abordar esta questão, foi feita uma modelagem idêntica a que se segue, apenas excluindo os dados a partir de julho de 2008. Os resultados continuaram apontando a presença de um fator comum respondendo por cerca de 90 % da variação das séries.

	autovalor	Diferença	Proporção	Valor Ac.	Proporção Ac.
Qt	0,04303	0,04044	0,90950	0,04303	0,90950
	0,00260	0,00091	0,05489	0,04563	0,96439
	0,00168	-	0,03561	0,04732	1,00000
	0,04732		1,00000		
Qt correl	2,65990	2,46271	0,88665	2,65990	0,88665
	0,19719	0,05433	0,06573	2,85709	0,95238
	0,14286	-	0,04762	2,99995	1,00000
	2,99995		1,00000		

Figura 21 – Análise dos Componentes Principais com base nas matrizes  $\hat{Q}_t$  e  $\hat{Q}_t \text{ correl}$

Qt		Autovetores			Fatores comuns		
	dolar	0,77947	0,60254	-0,17136	0,16170	0,03071	-0,00703
ibovespa	0,35923	-0,20584	0,91026	0,07452	-0,01049	0,03736	
embi	0,51320	-0,77109	-0,37690	0,10646	-0,03930	-0,01547	
Qt correl		Autovetores			Fatores comuns		
	dolar	-0,58257	-0,22984	-0,77961	-0,95013	-0,10206	-0,29467
ibovespa	-0,57166	0,79771	0,19220	-0,93233	0,35423	0,07265	
embi	-0,57777	-0,55752	0,59611	-0,94230	-0,24757	0,22531	

Figura 22 – Fatores comuns<sup>24</sup> estimados com base na Análise dos Componentes Principais

### Passo 3: Modelo Final

O terceiro passo consiste em estimar o modelo apresentado na seção 3.4 com o número de fatores escolhidos após a Análise de Componentes Principais. Dada a possibilidade de não identificação do modelo, deve-se estar atento para a necessidade de imposição de restrições.

Neste trabalho, o resultado da ACP apontou para a existência de um único fator comum entre as séries de volatilidade. Para tornar o modelo identificável, foi imposta à matriz  $Z_t$  a restrição de ter a primeira componente unitária, como pode ser observado a seguir.

<sup>24</sup> Os níveis das unidades de medida apontadas pelas coordenadas do fator comum têm pouca interpretação, uma vez que o logaritmo foi extraído antes da realização da ACP. Porém, a proximidade entre as magnitudes das coordenadas do 1º fator comum bem como o fato de serem todos positivos contém informação relevante, implicando que as volatilidades<sup>24</sup> do Dólar, Ibovespa e EMBI/BR se relacionam de maneira semelhante com tal fator.

$$\begin{bmatrix} y_{dolari,t} \\ y_{ibovespa,t} \\ y_{iembi,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} [\alpha_{1,t}] + \begin{bmatrix} 0 \\ \mu_{il,t}^\circ \\ \mu_{2,t}^\circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_{dolari,t}^\circ \\ \xi_{ibovespa,t}^\circ \\ \xi_{iembi,t}^\circ \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \xi_{dolari,t}^\circ \\ \xi_{ibovespa,t}^\circ \\ \xi_{iembi,t}^\circ \end{bmatrix} \sim N \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, H_t \right\}$$

$$[\alpha_{1,t+1}] = [\alpha_{1,t+1}] + [\eta_{1,t}], \quad [\eta_{1,t}] \sim N\{0, Q_t\}$$

Onde:

$$H_t = \begin{bmatrix} \frac{\pi^2}{2} & \psi_3 & \psi_4 \\ \psi_3 & \frac{\pi^2}{2} & \psi_5 \\ \psi_4 & \psi_5 & \frac{\pi^2}{2} \end{bmatrix}, \quad Q_t = \sigma_\eta^2 \quad (58)$$

Tendo em vista que o vetor de estado contém uma componente difusa, faz-se necessária a aplicação de um método de inicialização. Optou-se pela inicialização exata, uma vez que esta foi a abordagem final escolhida e aplicada anteriormente ao modelo (56).

A presença da matriz  $Z_t$  como exposta em (58) gera um problema relacionado à otimização da função logarítmica da verossimilhança. De forma resumida, ao iniciar as recursões do filtro de Kalman difuso para a base multivariada, a primeira iteração para obtenção da variância das inovações resultou em uma matriz não nula, porém singular. Como o logaritmo do determinante desta matriz entra no cômputo da função log- verossimilhança a ser otimizada, surge um problema numérico, posto que a função  $f(x) = \ln(x)$ , para  $x \in \mathfrak{R}_+^*$ , não está definida para  $x=0$ .

Duas diferentes ferramentas podem ser utilizadas para contornar tal problema. Uma solução pouco elegante consiste em computar a função de verossimilhança apenas para  $t > d$ , sendo  $d$  o número de componentes não estacionárias no vetor de estado (neste caso, 1). Tal método pode apresentar falhas, uma vez que, na prática, nem sempre o número de observações para o qual a matriz estimada de variância do estado é mal comportada coincide com o número de variáveis não estacionárias no estado. Além disso, caso a base de dados

apresente poucas observações, o descarte de algumas delas no cômputo da função de verossimilhança pode trazer prejuízos à estimação do modelo<sup>25</sup>.

Fazendo tal ajuste obtemos os seguintes resultados:

<b>IE com D&gt;1</b>	
Convergência	Forte
	30ª iteração
Verossimilhança	-9,848
MSE	14,9530
Estatística de Durbin Watson	2,0371
AIC	-9,7542
BIC	-9,7764
Média de resíduos padronizados:	
dolar	0,0030
ibovespa	0,0006
EMBI/BR	0,0017
Variância da Inovação padronizada	
dolar	1,0387
ibovespa	1,0415
EMBI/BR	1,0084
parâmetros estimados	
$\hat{\sigma}_\eta^2$	0,0281 (0,000057)
$\hat{\psi}_1$	-0,4854 (0,003406)
$\hat{\psi}_2$	0,6028 (0,004299)
$\hat{\psi}_3$	0,5328 (0,010793)
$\hat{\psi}_4$	0,3252 (0,01231)
$\hat{\psi}_5$	0,8612 (0,010033)
$\hat{\mu}_1^0$	-3,2885 (0,32831)
$\hat{\mu}_2^0$	-1,4754 (0,41322)

Obs: Os valores em parênteses correspondem aos erros padrões assintóticos

Figura 23 – Resultado da estimação do modelo (58) descartando a primeira iteração no cômputo da função log da verossimilhança

A segunda solução consiste em aplicar um tratamento univariado ao modelo multivariado como descrito na seção 4.5. Com isso, a função logarítmica da verossimilhança, ao invés de computar o logaritmo do determinante de uma

<sup>25</sup> Este não é o caso do presente Trabalho, uma vez que a base de dados é suficientemente grande (2022 observações) para não ser afetada pela exclusão de uma observação.



função singular (que especialmente neste caso é não nula), computaria o logaritmo de um número real diferente de zero, eliminando o problema numérico.

Para realizar o tratamento univariado sobre a série multivariada é preciso reescrever o modelo em Espaço de Estado de forma que a matriz de variância dos erros da equação das medidas ( $H_t$ ) seja diagonal, conforme mencionado na seção 4.5. Uma forma de obter tal restrição consiste em incorporar os erros originais da equação das medidas na equação do estado, da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} y_{dolar,t} \\ y_{ibovespa,t} \\ y_{iembt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \psi_1 & 0 & 1 & 0 \\ \psi_2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{1,t} \\ \xi_{1,t} \\ \xi_{2,t} \\ \xi_{3,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mu_1^0 \\ \mu_2^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widehat{\xi}_{dolar,t} \\ \widehat{\xi}_{ibovespar,t} \\ \widehat{\xi}_{iembt,t} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \widehat{\xi}_{dolar,t} \\ \widehat{\xi}_{ibovespar,t} \\ \widehat{\xi}_{iembt,t} \end{bmatrix} \sim N \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \widehat{H}_t \right\}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1,t+1} \\ \xi_{1,t+1} \\ \xi_{2,t+1} \\ \xi_{3,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{1,t} \\ \xi_{1,t} \\ \xi_{2,t} \\ \xi_{3,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widehat{\eta}_{1,t} \\ \widehat{\eta}_{2,t} \\ \widehat{\eta}_{3,t} \\ \widehat{\eta}_{4,t} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \widehat{\eta}_{1,t} \\ \widehat{\eta}_{2,t} \\ \widehat{\eta}_{3,t} \\ \widehat{\eta}_{4,t} \end{bmatrix} \sim N \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \widehat{Q}_t \right\}$$

Onde

(59)

$$y_{dolar,t} = \ln(R_t^2 \text{ dolar}) + 1,27$$

$$y_{ibovespa,t} = \ln(R_t^2 \text{ ibovespa}) + 1,27$$

$$y_{iembt,t} = \ln(R_t^2 \text{ EMBI / BR}) + 1,27$$

$$\xi_{dolar,t} = \ln(\varepsilon^2 \text{ dolar}_t) + 1,27$$

$$\xi_{ibovespa,t} = \ln(\varepsilon^2 \text{ ibovespa}_t) + 1,27$$

$$\xi_{iembt,t} = \ln(\varepsilon^2 \text{ embt}_t) + 1,27$$

$$\widehat{H}_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \widehat{Q}_t = \begin{bmatrix} \sigma_\eta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi^2}{2} & \psi_3 & \psi_4 \\ 0 & \psi_3 & \frac{\pi^2}{2} & \psi_5 \\ 0 & \psi_4 & \psi_5 & \frac{\pi^2}{2} \end{bmatrix}$$

Observa-se que as informações presentes no modelo (58) equivalem às informações trazidas pelo novo modelo em Espaço de Estado (59). Os

hiperparâmetros a serem estimados são rigorosamente os mesmos, estando, entretanto, em matrizes de transição diferentes.

A estimação do modelo em (59) trouxe resultados muito próximos aos obtidos pelo primeiro método (baseado na simples eliminação da primeira iteração da função da verossimilhança).

<b>IE com TU</b>	
Convergência	Forte
	56 iteração
Verossimilhança	-13,566
MSE	17,9890
Estatística de Durbin Watson	2,0363
AIC	13,4330
BIC	13,4555
Média de resíduos padronizados	
dolar	0,0027
ibovespa	0,0017
EMBI/BR	0,0022
Variância da Inovação padronizada	
dolar	1,0408
ibovespa	1,0391
EMBI/BR	1,0051
parâmetros estimados	
$\hat{\sigma}_\eta^2$	0,0281 (0,000055)
$\hat{\psi}_1$	-0,4844 (0,003826)
$\hat{\psi}_2$	0,6003 (0,004437)
$\hat{\psi}_3$	0,5316 (0,011593)
$\hat{\psi}_4$	0,3276 (0,012885)
$\hat{\psi}_5$	0,8608 (0,011429)
$\hat{\mu}_1^0$	-3,2990 (0,36638)
$\hat{\mu}_2^0$	-1,4998 (0,4253)

Obs: Os valores em parênteses correspondem aos erros padrões assintóticos

Figura 24 – Resultado da estimação do modelo (59)

parâmetros	IC assintótico (95%)	
$\hat{\sigma}_\eta^2$	0,02808	[0,027967 , 0,028186]
$\hat{\psi}_1$	-0,48444	[-0,491939 , -0,476942]
$\hat{\psi}_2$	0,60034	[0,591643 , 0,609036]
$\hat{\psi}_3$	0,53164	[0,508915 , 0,554362]
$\hat{\psi}_4$	0,32755	[0,302298 , 0,35281]
$\hat{\psi}_5$	0,86085	[0,838444 , 0,883247]
$\hat{\mu}_1^0$	-3,29900	[-4,017105 , -2,580896]
$\hat{\mu}_2^0$	-1,49980	[-2,333388 , -0,666212]

Figura 25 – Intervalo de confiança assintótico

Com base nas estimativas dos parâmetros anteriores, obtemos as seguintes variáveis de forma imediata:

$$\begin{aligned}\hat{y}_{dolar,t} &= \hat{h}_t \\ \hat{y}_{ibovespa,t} &= 0,4844 \hat{h}_t - 3,2990 \\ \hat{y}_{embi,t} &= 0,6003 \hat{h}_t - 1,4998\end{aligned}\quad (60)$$

Fazendo  $\hat{h}_t = \mathbf{a}_t$ , isto é, utilizando o estado previsto como estimador do vetor de estado, podemos facilmente obter  $\hat{y}_{dolar,t}$ ,  $\hat{y}_{ibovespa,t}$  e  $\hat{y}_{embi,t}$ . Entretanto tais estimativas têm pouca interpretação econômica, posto que as variáveis  $y_{dolar,t}$ ,  $y_{ibovespa,t}$  e  $y_{embi,t}$  correspondem aos logaritmos dos quadrados dos respectivos retornos somados a 1,27. As variáveis de interesse são as volatilidades estimadas para cada série com base no fator comum.

$$\begin{aligned}V(\hat{R}_{dolar,t} / \mathfrak{I}_{t-1}) &= E(R_{dolar,t}^2 / \mathfrak{I}_{t-1}) = E(e^{\alpha_t} / \mathfrak{I}_{t-1}) = e^{\alpha_t + \frac{P_t}{2}} \\ V(\hat{R}_{ibovespa,t} / \mathfrak{I}_{t-1}) &= E(R_{ibovespa,t}^2 / \mathfrak{I}_{t-1}) = E(e^{(0,4844\alpha_t - 3,2990)}) = e^{(0,4844\alpha_t - 3,2990) + \frac{0,60034^2 P_t}{2}} \\ V(\hat{R}_{embi,t} / \mathfrak{I}_{t-1}) &= E(R_{embi,t}^2 / \mathfrak{I}_{t-1}) = E(e^{(0,98954\alpha_t + 1,8550)}) = e^{(0,6003\alpha_t - 1,4998) + \frac{0,60034^2 P_t}{2}}\end{aligned}\quad (61)$$

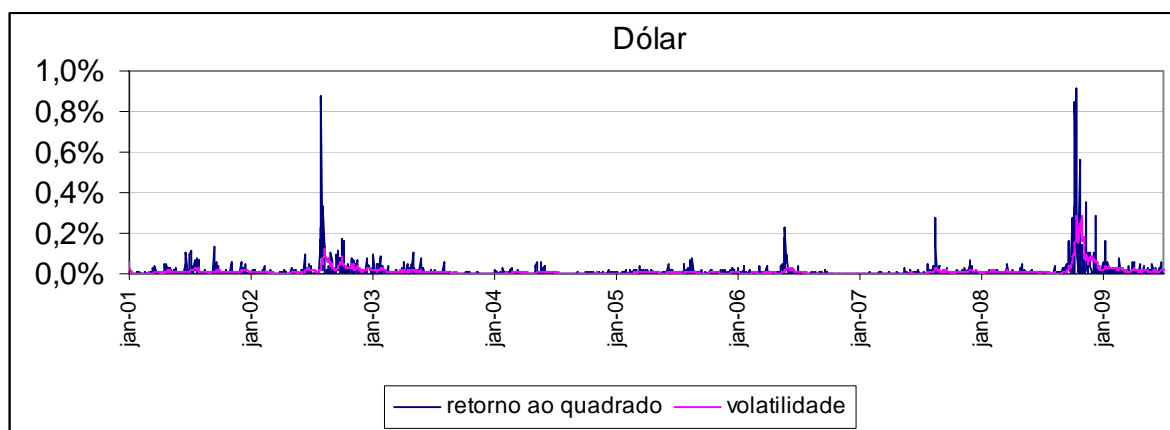


Figura 26 – Quadrado dos retornos do dólar x volatilidade estimada do dólar

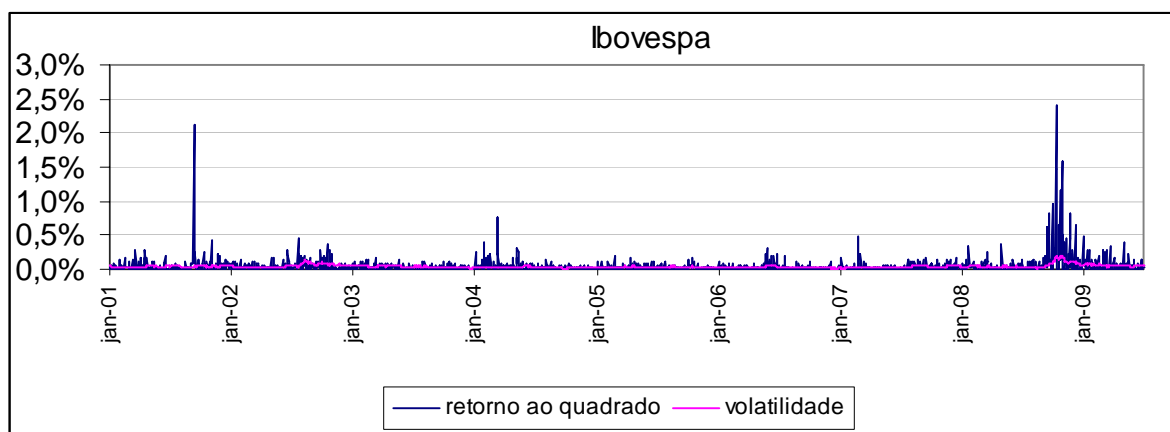


Figura 27 – Quadrado dos retornos do Ibovespa x volatilidade estimada do Ibovespa

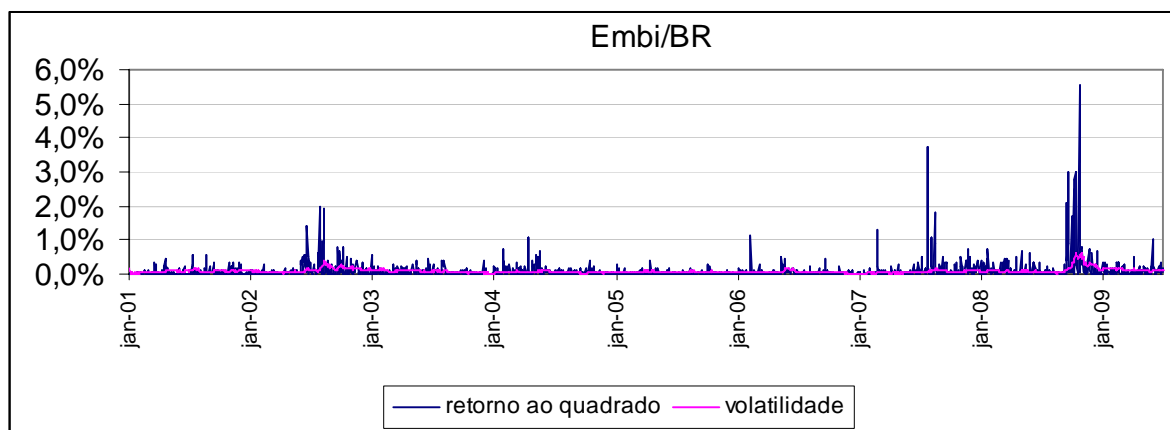


Figura 28 – Quadrado dos retornos do EMBI/BR x volatilidade estimada do EMBI/BR

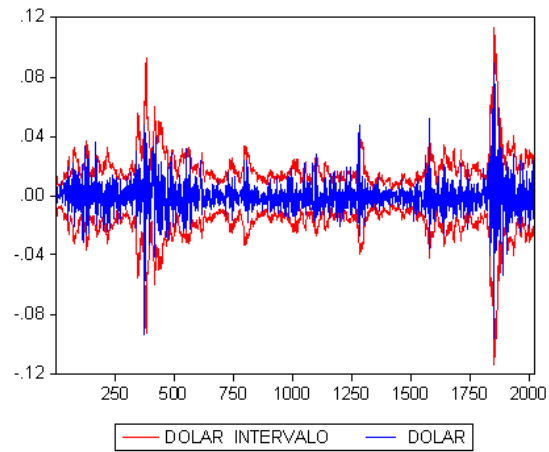


Figura 29 – Retornos do Dólar e intervalo de confiança estimado a 95% de grau de confiança

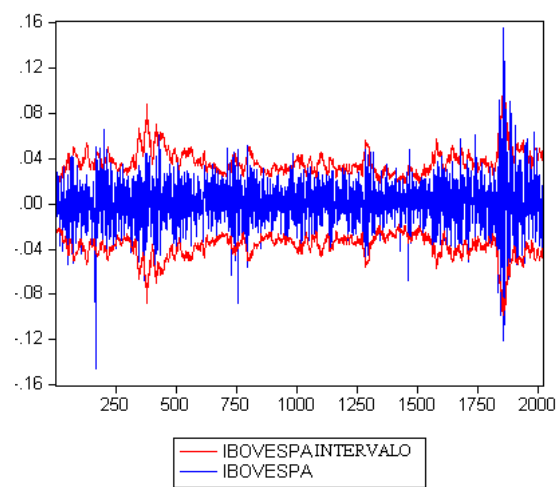


Figura 30 – Retornos do Ibovespa e intervalo de confiança estimado a 95% de grau de confiança

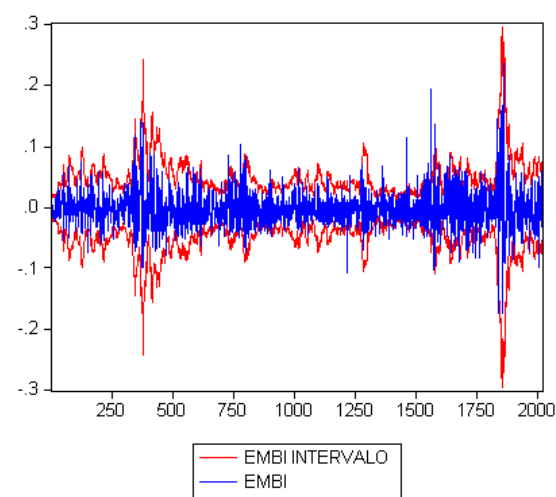


Figura 31 – Retornos do Ibovespa e intervalo de confiança estimado a 95% de grau de confiança

Observa-se novamente que as volatilidades estimadas por meio do fator comum capturaram os *clusters* de volatilidade observados nas séries de retornos de cada série.

A qualidade do ajuste do modelo será analisada a seguir:

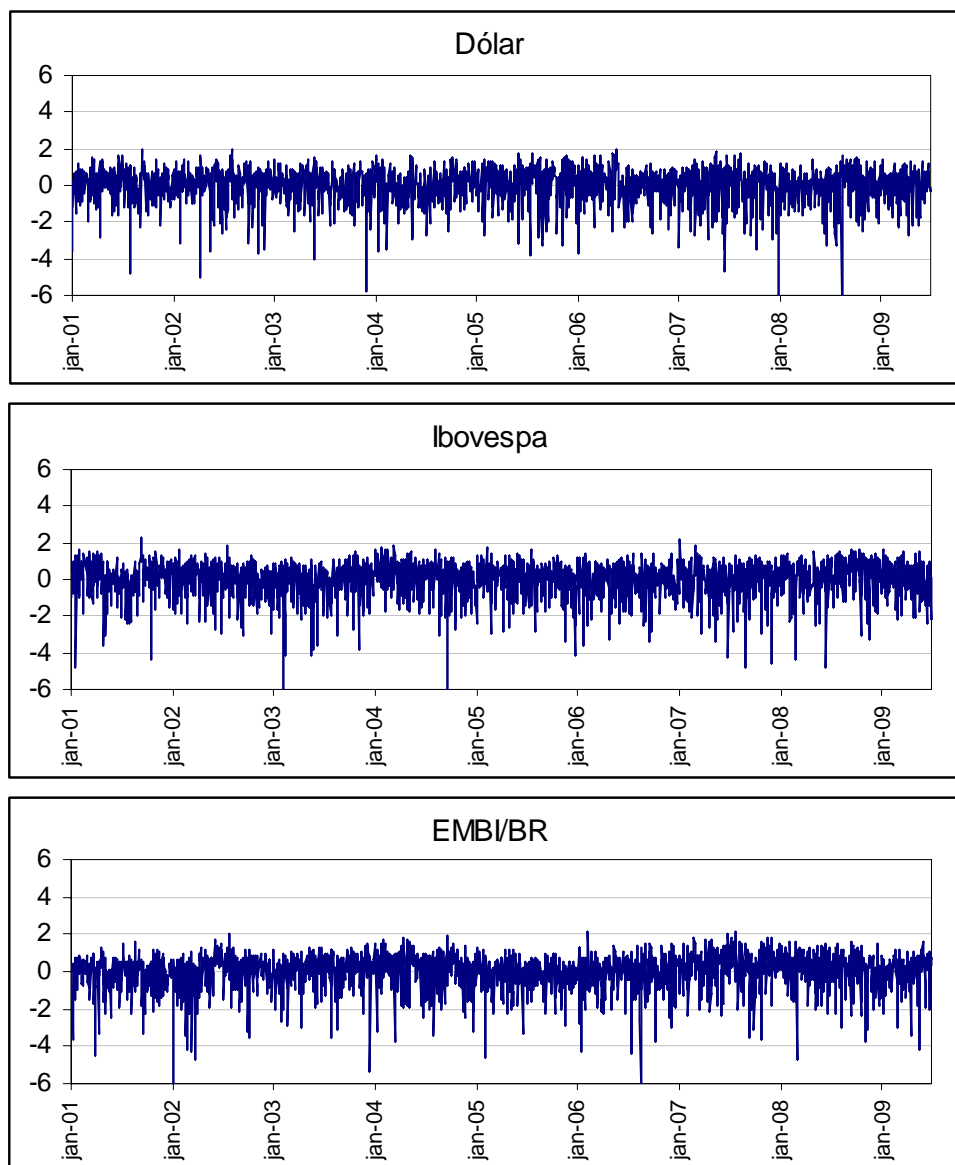


Figura 32 – Inovações padronizadas

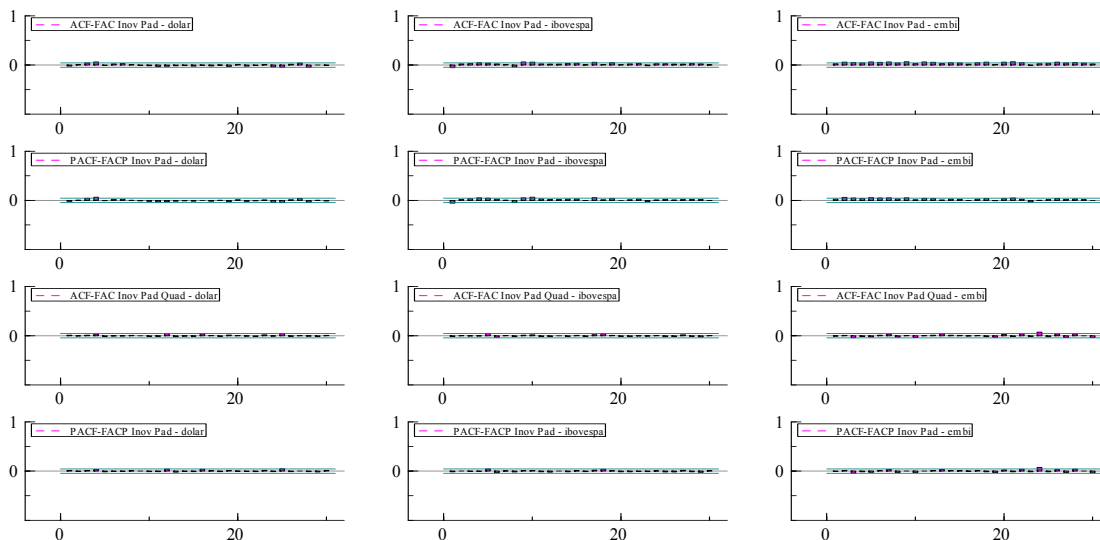


Figura 33 – FAC e FACP das inovações padronizadas e do quadrado das inovações padronizadas

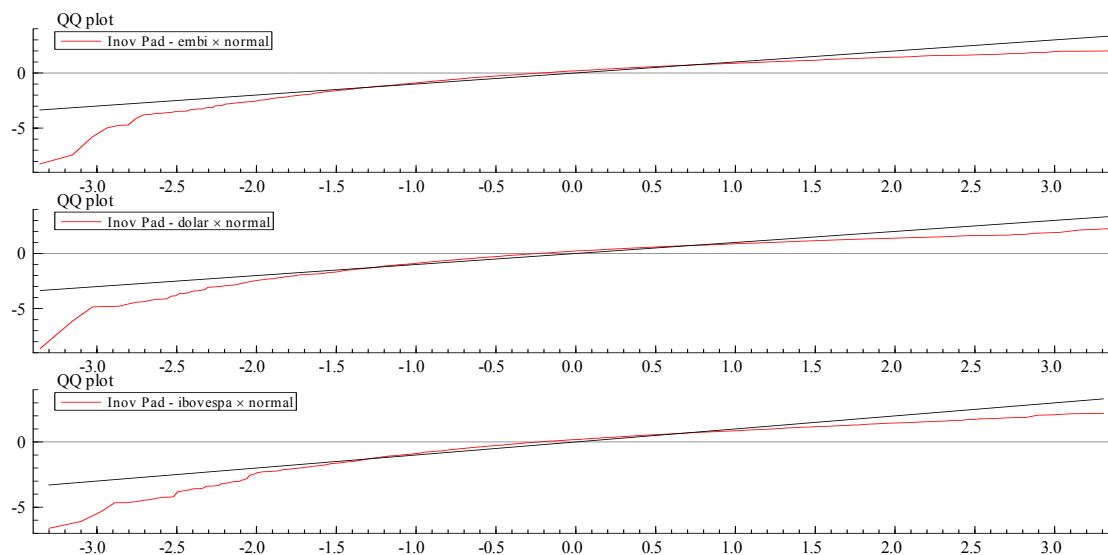


Figura 34 – QQ Plot das Inovações Padronizadas

Teste de Normalidade - Jarque- Bera		
	estatística de teste	pvalor
resíduos dolar	2.947	0,0000
resíduos ibovespa	2.794	0,0000
resíduos embi/br	1.983	0,0000

Figura 35 – Jarque Bera das Inovações Padronizadas

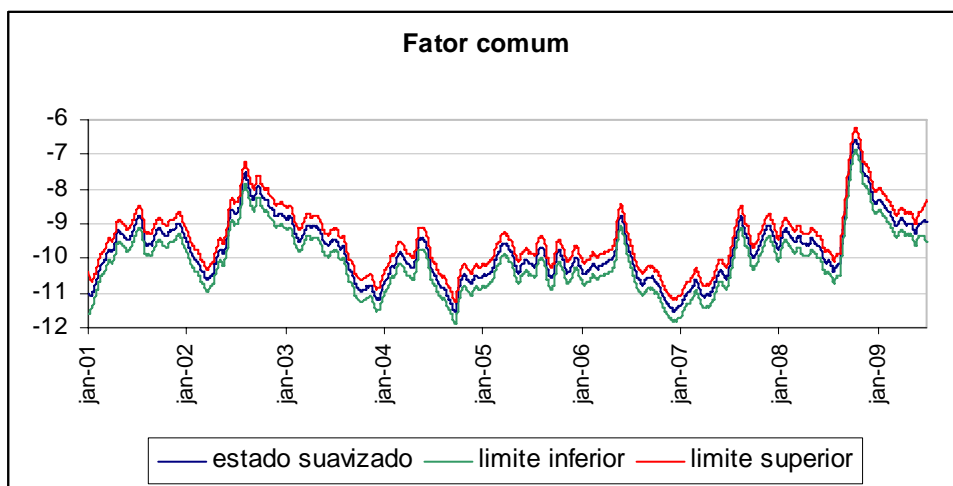


Figura 36 – Suavização do fator comum com limite inferior e limite superior

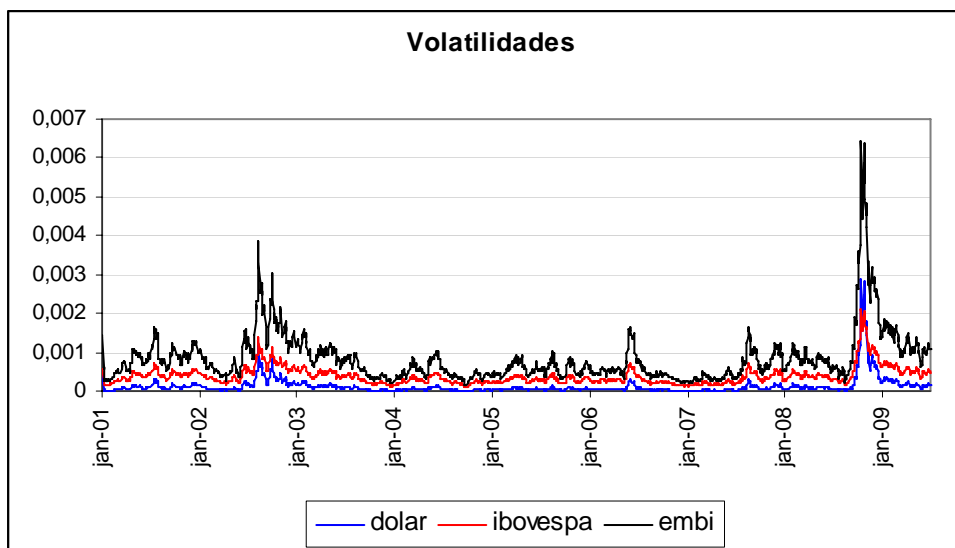


Figura 37 – Comparação entre as volatilidades estimadas com base no fator comum

Os resultados das volatilidades estimadas com base no fator comum pelo modelo multivariado confirmam o que já havia sido observado nas modelagens univariadas de GARCH e de volatilidade estocástica: as três séries apresentam padrões de volatilidade parecidos nos três momentos de crises entre o período de 2001 a 2009.

Conforme visto em (61), a volatilidade corresponde a esperança condicional do quadrado dos retornos. Comparando as volatilidades estocásticas estimadas pelos métodos univariado e multivariado com o quadrado dos retornos de cada série observamos que o modelo multivariado apresentou melhores estimações. Este é um resultado aguardado quando os processos das volatilidades



estão relacionados, posto que o modelo multivariado incorpora na estimação da volatilidade de cada série, informações sobre as demais.

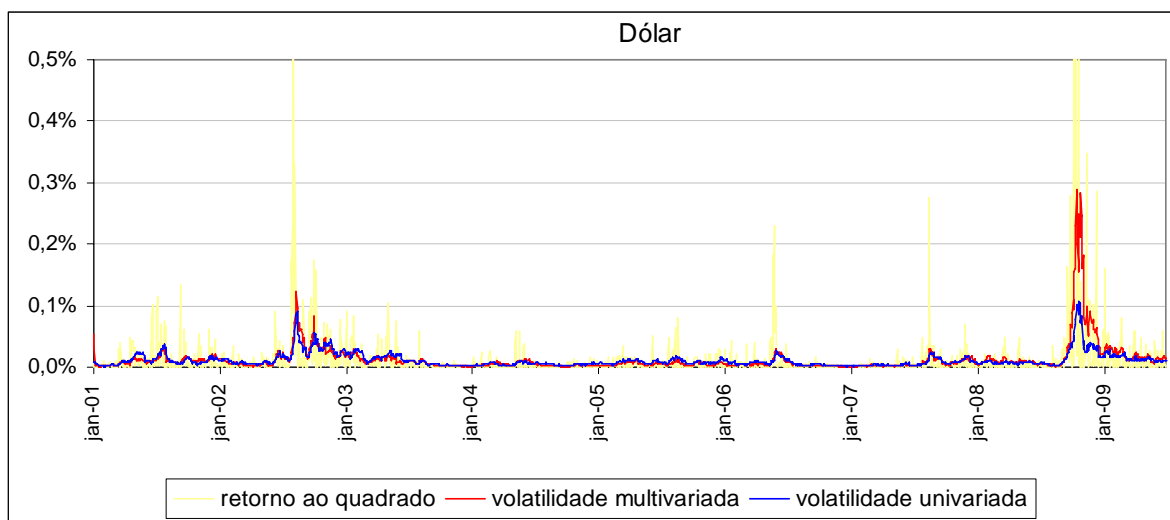


Figura 38 – Comparação entre as volatilidades do dólar estimadas pelo modelo de fator comum (multivariado) e pelo modelo individual de volatilidade estocástica.

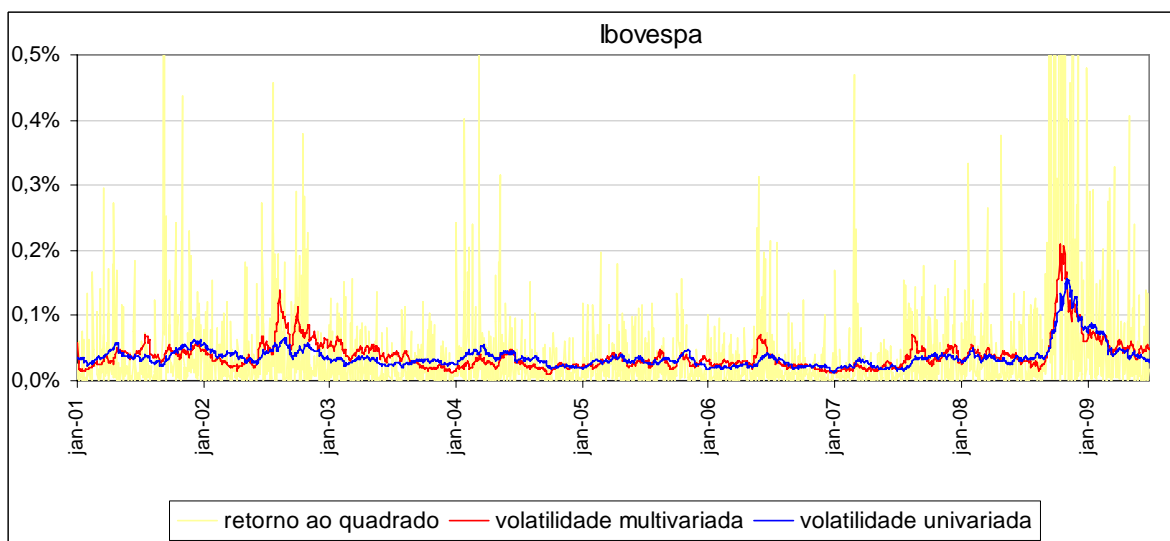


Figura 39 – Comparação entre as volatilidades do Ibovespa estimadas pelo modelo de fator comum (multivariado) e pelo modelo individual de volatilidade estocástica.

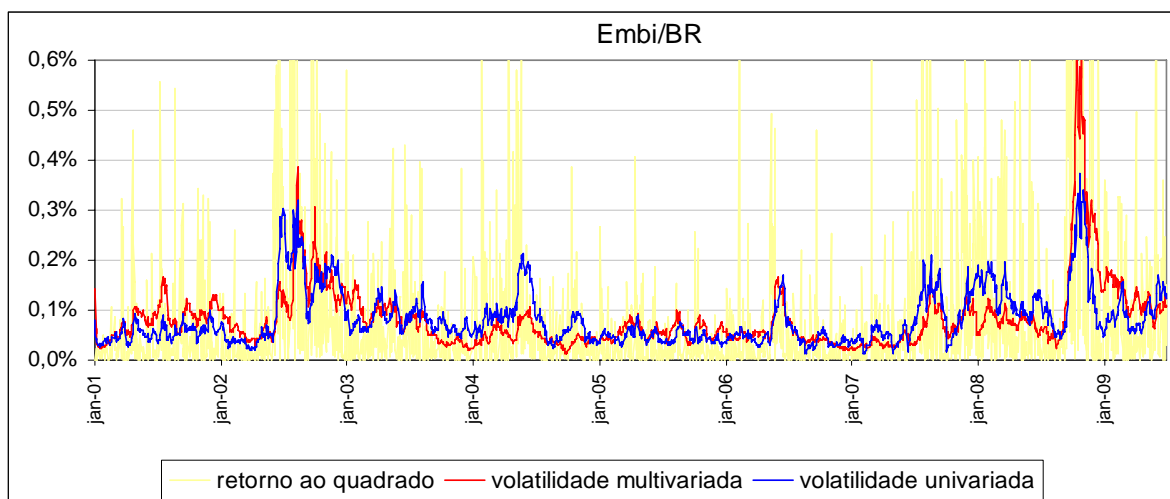


Figura 40 – Comparação entre as volatilidades do EMBI/BR estimadas pelo modelo de fator comum (multivariado) e pelo modelo individual de volatilidade estocástica.

Utilizando a nomenclatura citada em Harvey, Ruiz e Shephard (1994), denominemos  $e^{\frac{at}{2}}$  de “desvio padrão comum”, sendo  $e^{a_t}$  a “volatilidade comum” entre os processos<sup>26</sup>.

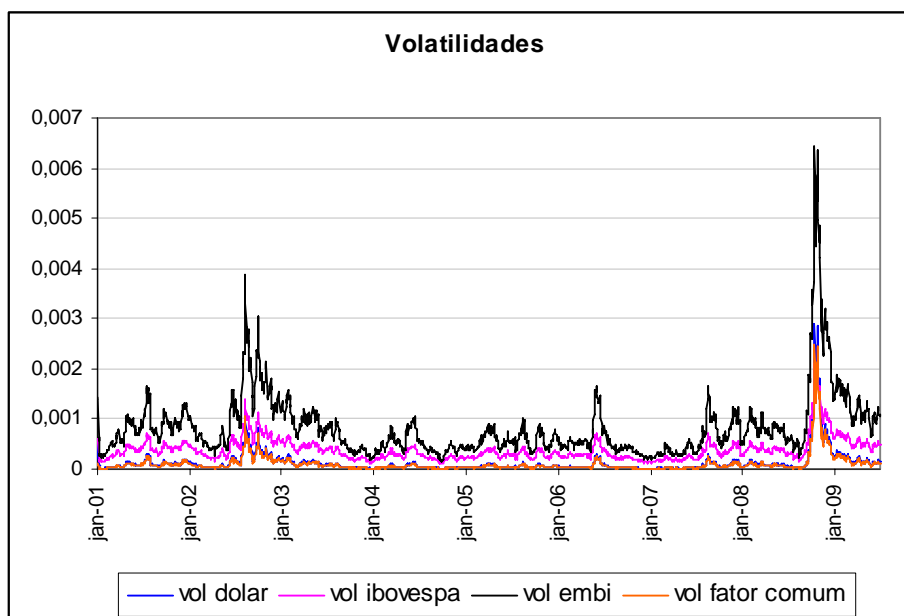


Figura 41 – Volatilidade do fator comum contra volatilidade do dólar, Ibovespa e EMBI

<sup>26</sup> Há um abuso de notação ao referir-se a  $e^{a_t}$  como volatilidade comum. Na verdade, em modelos de fator comum, a volatilidade da primeira série do vetor das medidas, torna-se a volatilidade de referência para as demais.

Observa-se que os períodos de altas coincidem com os períodos analisados no primeiro capítulo deste Trabalho, os quais tratam respectivamente da instabilidade dos mercados domésticos diante: (i) da iminência da vitória do candidato do Partido dos Trabalhadores (PT) à Presidência em 2002, (ii) do escândalo “Waldomiro Diniz” em 2004, (iii) dos primeiros rumores de crise *subprime* em 2007 e finalmente (iv) diante da eclosão da crise econômico-financeira no quarto trimestre de 2008, que teve como epicentro a economia norte americana.

Com isso o fator comum extraído pode ser interpretado como uma medida da incerteza generalizada do mercado financeiro nacional em períodos de crises internacional e doméstica.