

2

Revisão da Literatura

Modelos de previsão de volatilidade² têm sido largamente empregados pela comunidade financeira, uma vez que a compreensão dos movimentos oscilatórios de variáveis como preços de ação, inflação e taxas de câmbio é fundamental na elaboração de estratégias de investimentos e gerenciamento de riscos financeiros.

Definiremos aqui “medida de risco” como “qualquer medida numérica que tente mensurar a incerteza associada a um investimento”³, sendo a estimação da volatilidade uma tentativa de mensuração estatística do risco.

Evidências empíricas sugerem que a volatilidade de retornos de séries financeiras é variante no tempo, se mantendo constante apenas por curtos períodos. O primeiro modelo a popularizar a estimação de volatilidades em finanças foi proposto por Engle (1982), na tentativa de modelar a inflação do Reino Unido. Conhecido como ARCH (*AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity*), o modelo supõe a existência de heterocedasticidade condicional nos dados, de forma que a variância condicional no período corrente depende do quadrado dos erros passados. A inovação permitiu a nova modelagem descrever um dos fatos estilizados percebidos em séries financeiras: presença de correlação serial para a variância condicional, efeito denominado na literatura como *cluster* de volatilidade

Uma versão generalizada dos modelos ARCH foi proposta por Bollerslev (1986), o qual incorporou na função linear da variância condicional corrente não apenas o quadrado dos retornos passados, como também as variâncias passadas. Conhecido como GARCH (*General AutoRegressive Conditional Heterocedasticity*), o modelo é bastante flexível, podendo assumir representações como as do ARCH e EWMA (*Exponentially Weighted Moving Average*) através

² Neste trabalho empregaremos o termo volatilidade para designar variância condicional de um processo estocástico à σ -álgebra \mathfrak{F}_{t-1} , gerada pelas variáveis Y_1, Y_2, \dots, Y_{t-1} .

³ Pimentel [2004].

da alteração conveniente dos valores de determinados parâmetros. Esta nova metodologia permitiu a descrição de outro fato estilizado de séries financeiras: a ausência de autocorrelação dos retornos acompanhada da presença de autocorrelação no quadrado dos retornos.

Apesar do grande avanço que o modelo representou para o estudo da volatilidade, há uma dificuldade inerente à construção do GARCH, relacionada à necessidade de imposição de restrições nos parâmetros, a fim de garantir volatilidades positivas.

Nelson (1991) propôs uma adaptação do modelo GARCH que dispensa a imposição de qualquer restrição paramétrica para obtenção de variâncias positivas e, adicionalmente, descreve outro fato estilizado de algumas séries financeiras constatado em Black (1976): períodos de queda nos preços (por exemplo, advinda da divulgação de más notícias relacionadas ao ativo em questão) são freqüentemente seguidos por períodos de grande volatilidade, enquanto períodos de alta dos preços (notícias boas) são seguidos de uma volatilidade não tão intensa. Informalmente, “notícias ruins afetam mais a volatilidade das séries que as notícias boas”. Conhecido como EGARCH (*Exponentially Generalized Auto Regressive Models*), o modelo é ideal para captar essa assimetria informacional, conhecida na literatura como efeito *leverage*.

Todos os modelos mencionados tratam a volatilidade como uma variável observável, dependente de erros passados e, portanto, conhecidos quando condicionados à σ -álgebra \mathfrak{F}_{t-1} ⁴. Por esta razão são ditos modelos de volatilidade determinística e são estimados eficientemente pelo método de Máxima Verossimilhança.

Nos modelos de volatilidade estocástica, o conhecimento dos erros passados não é suficiente para reproduzir a volatilidade presente. O modelo é uma versão discreta do processo de difusão em tempo contínuo de Ornstein-Uhlenbeck, largamente aplicado em diversos modelos da teoria moderna de finanças como os de Hull e White (1987) e Taylor (1993), os quais se destacam como generalizações de modelos clássicos de precificação de opções como os de Black & Scholes (1973), Merton (1973) e Cox, Ross e Rubinstein (1979).

⁴ \mathfrak{F}_{t-1} é a σ -álgebra gerada pelas variáveis Y_1, Y_2, \dots, Y_{t-1} .

Os primeiros registros do modelo volatilidade estocástica, em sua versão univariada, aparecem nos trabalhos de Taylor (1982) e Tauchen e Pits (1983). O modelo de Taylor ficou mais conhecido na literatura como o introdutor da metodologia e propunha-se a descrever as mudanças no fator latente que compõe o processo de volatilidade dos retornos, utilizando um processo autoregressivo, como alternativa ao modelo ARCH.

Em Dassios (1992), conclui-se que o modelo de volatilidade estocástica comparado ao EGARCH é a melhor aproximação discreta para a versão contínua de Hull e White (1987). Além disso, o modelo de volatilidade estocástica pode ser facilmente estendido para uma base multivariada e é mais robusto na presença de *outliers*.

Como desvantagem, os modelos de volatilidade estocástica apresentam maior dificuldade na estimação dos parâmetros, quando comparado aos modelos GARCH. A razão para tanto é que a função de densidade $P(y_t / \mathfrak{F}_{t-1})$ não pode ser obtida de maneira imediata como acontece nos modelos GARCH. Como veremos no capítulo 3, o componente básico da volatilidade entra na equação dos retornos de maneira não linear, mais precisamente exponencial, de forma que a função de verossimilhança passa a depender de integrais sem solução analítica, mesmo quando supõe-se normalidade dos dados. Esta dificuldade foi uma das razões atribuídas à relativa demora para popularização do modelo entre a comunidade financeira.

Na literatura, houve diversos métodos de estimação propostos para a volatilidade estocástica, começando pelo método dos momentos e generalizações (Scott (1987), Chesney e Scott (1989), Melino e Turnbull (1990), Gallant, Hshie e Tauchen, (1997)), passando por *Quasi* Máxima Verossimilhança (Harvey, Ruiz e Shephard, (1994)), Máxima Verossimilhança Simulada (Sandmann e Koopman, (1998); Liesenfeld e Jung, (2000)) e amostragem por importância eficiente (Liesenfeld e Richard, (2003)). Os últimos dois métodos citados ainda são recentes, tendo o método de *Quasi* Máxima Verossimilhança se tornado mais popular.

Em Ruiz (1994), conclui-se que apesar do estimador de *Quasi* Máxima Verossimilhança não partir da função exata e correta de verossimilhança dos

dados, para o tamanho das séries financeiras geralmente utilizados⁵, este se revela melhor que o estimador do método dos momentos.

O método de *Quasi* Máxima Verossimilhança para estimação da volatilidade estocástica é implementado com auxílio de uma poderosa ferramenta estatística: o filtro de Kalman, objeto do quarto capítulo deste Trabalho e cujas primeiras documentações aparecem em Kalman (1960), Swerling (1958) e Kalman e Bucy (1961), seguidas por uma grande variedade de filtros modificados. Para que o modelo de volatilidade estocástica possa ser atualizado e suavizado por este filtro, é imprescindível que as equações que descrevem os movimentos dos retornos e da volatilidade sejam colocadas na forma de espaço de estado. Isto é feito através da logaritmização do quadrado da equação dos retornos.

Em séries financeiras distintas é possível encontrar fatores comuns que afetam transversalmente suas volatilidades. A estimação deste fator latente entre as séries passa por uma estrutura multivariada, o que torna as adaptações nos modelos de volatilidade estocástica os melhores candidatos a estimação. Os primeiros resultados obtidos da combinação da extração de fator comum com modelos de volatilidade estocástica multivariada aparecem em Harvey (1988) e em Harvey e Stock (1988), sendo este último a aplicação da metodologia apresentada no artigo anterior aos dados norte-americanos de consumo e renda.

Em Harvey, Ruiz e Shephard (1994) é feita uma rápida revisão e comparação de modelos GARCH com os de volatilidade estocástica univariados e multivariados, antes da apresentação definitiva da proposta do trabalho, que se resume à extração de fator comum entre as volatilidades de diferentes taxas de câmbio.

Este tem sido um artigo largamente citado em diversos e recentes *Working Papers* que tratam da extração de fatores comuns entre volatilidades, como os de Vanteenkist (2009) sobre fatores comuns entre as volatilidades de commodities para uso não combustível e de Aiolfi, Catão e Timmermann (2006) sobre fatores comuns entre ciclos de negócios de economias latino-americanas, publicados respectivamente pelo Banco Central Europeu e Fundo Monetário Internacional.

⁵ Tamanho da amostra superior a 1.000 observações.