2.
Referencial teórico

2.1.
Processos estocásticos

De acordo com Hull (1998) qualquer variável cujo valor mude de maneira incerta com o tempo segue um processo estocástico. Muitas variáveis subjacentes a projetos podem ser tratadas como variáveis aleatórias e sujeitas a processos estocásticos específicos, com diferentes comportamentos probabilísticos.

Processos estocásticos são conjuntos de variáveis aleatórias ao longo do tempo e podem ser expressas por equações diferenciais. Se considerarmos que um ativo segue um determinado processo estocástico no período [0,T], existindo neste intervalo de tempo *n* discretizações de tamanho Δt, pode-se afirmar que o processo estocástico possui *n* variáveis aleatórios representadas entre [0,T].

Um tipo de processo estocástico comumente utilizado na precificação de ativos é o Processo de Markov, que tem como característica básica considerar que a única informação relevante para prever o preço futuro de um ativo é o seu valor corrente, estando alinhado com a hipótese de Eficiência Fraca de Mercado.

Segundo Wilmott et al. (1995) existem basicamente duas características que garantem a existência da hipótese de Eficiência Fraca de Mercado, quais sejam:

- o passado histórico das informações que afetam o preço do ativo está completamente refletido no preço presente do ativo, não existindo nenhum outro meio de afetar o preço; e

- o mercado responde imediatamente a qualquer nova informação sobre um ativo, alterando seu preço.

Portanto, modelar o preço do ativo nada mais é do que modelar a chegada de novas informações que afetam os preços. Considerando que o preço do ativo possui as duas características acima, é possível modelar seu preço utilizando o Processo de Markov.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0612004/CA

De acordo com Hull (1998), a competição de mercado tende a garantir a existência da Eficiência Fraca do Mercado, na medida em que existe uma grande quantidade de agentes que ajustam imediatamente os preços com a chegada de novas informações.

Um tipo específico de Processo de Markov é o Processo de Wiener, também denominado de Movimento Browniano, sendo muito utilizado na literatura para precificar ativos.

Um Processo de Wiener, segundo Dixit & Pindyck (1994), é um processo em tempo contínuo com três propriedades importantes:

- é um processo de Markov, ou seja, tudo que se precisa para fazer uma previsão do valor futuro da variável é sua distribuição de probabilidade e o seu valor atual;
- possui incrementos independentes; e
- mudanças no processo sobre qualquer intervalo de tempo são normalmente distribuídos, com uma variância que aumenta linearmente com o intervalo de tempo.

Dessa forma, se *z(t)* é um Processo de *Weiner*, então, qualquer variação em *z*, dada por *dz*, correspondente a um intervalo de tempo dt, deve satisfazer as seguintes condições:

- a relação entre *dz* e *dt* é dada por $dz = \varepsilon_t.\sqrt{dt}$, onde $\varepsilon_t \sim N(0,1)$; e
- a variável aleatória ε_t não possui correlação serial, ou seja, $E(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$, para $t \neq s$.

A partir disso é possível concluir que os incrementos de um Processo de *Wiener*, *dz(t)*, possuem as seguintes propriedades *dz ~ N(0, dt)*, dado que:

$$E(dz) = E\left(\varepsilon_t.\sqrt{dt}\right) = \sqrt{dt}.E(\varepsilon_t) = 0 \quad (2.1)$$

$$Var(dz) = Var\left(\varepsilon_t.\sqrt{dt}\right) = dt.Var(\varepsilon_t) = dt \quad (2.2)$$

Para se verificar que os incrementos são independentes partiremos do cálculo da $corr(dz_t, dz_s)$, $t \neq s$, considerando que $corr(a,b) = \frac{cov(a,b)}{dp(a).dp(b)}$ e utilizando as propriedades definidas pelas equações (2.1) e (2.2), teremos:

$$corr(dz_t, dz_s) = \frac{cov(dz_t, dz_s)}{dp(dz_s).dp(dz_s)} = \frac{cov\left(\varepsilon_t.\sqrt{dt}, \varepsilon_s.\sqrt{dt}\right)}{\sqrt{dt}.\sqrt{dt}} = \frac{dt.cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s)}{dt} = 0$$

Ou seja, a correlação entre os incrementos de *dz* em diversos momentos no tempo é zero, confirmando que o Processo de *Wiener* possui incrementos independentes e, portanto, *z(t)* segue, também, um Processo de Markov.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0612004/CA

O Processo de *Weiner* pode ser generalizado ao considerar que o mesmo pode ser composto de uma taxa de crescimento determinística e uma parcela aleatória, representando a estocasticidade da variável.

Esta generalização é comumente conhecida como Processo de Itô e pode ser representada por:

$$dx = a(x,t).dt + b(x,t).dz \tag{2.3}$$

Onde *dz* é o incremento do Processo de *Wiener* dado por $dz = \varepsilon_t.\sqrt{dt}$ e $\varepsilon_t \sim N(0,1)$.

Onde *a(x,t)* e *b(x,t)* são funções determinísticas, sendo *a(x,t)* a função da taxa de crescimento determinística da variável *x* e *b(x,t)* a função de intensidade da aleatoriedade da variável *x*.

Segundo Hull (1998), outro conceito importante para a precificação de um determinado derivativo é o Lemma de Itô, na medida em que um derivativo é função de uma variável aleatória representada por um ativo objeto, é importante entender a dinâmica das funções de variáveis estocásticas.

Considere uma variável *x* que segue o Processo de Itô dado pela eq. (2.3). O Lemma de Itô mostra que uma função, *G*, de *x* e *t* segue o processo:

$$dG = \left[\frac{\partial G}{\partial x}.a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}.b^2\right].dt + \frac{\partial G}{\partial x}.b.dz \tag{2.4}$$

Dessa forma, *G* também segue um Processo de Itô, com taxa de crescimento de $\left[\frac{\partial G}{\partial x}.a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}.b^2\right]$ e variância de $\frac{\partial G}{\partial x}.b$.

Segundo Wilmott et al. (1995), o Lemma de Itô está para funções de variáveis aleatórias assim como o Teorema de Taylor está para funções de variáveis determinísticas. Da mesma forma, o Lemma de Itô utiliza a expansão da série de Taylor por meio do cálculo estocástico.

Assim, para chegar ao resultado da eq. (2.4), que representa o processo estocástico da função *G(x,t)*, foram consideradas as seguintes premissas:

$$dt^n \to 0 \ , \ \forall \, \mathrm{n} > 1, \mathrm{n} \in \mathrm{N}$$

$$dt^n.dz = \varepsilon_t.dt^{\frac{2n+1}{2}} \to 0, \forall \, \mathrm{n} > 0, \mathrm{n} \in \mathrm{N}$$

$$dt.dz^n = \varepsilon_t.dt^{\frac{n+2}{2}} \to 0, \forall \, \mathrm{n} > 0, \mathrm{n} \in \mathrm{N}$$

Desse modo, a expansão de Taylor em relação à *t* maior do que 1 tende a zero e, também, os termos conjuntos de *x* e *t* tendem a zero para expansões

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0612004/CA

maiores do que zero. Portanto, a expansão se reduz à eq. (2.4). A demonstração completa pode ser encontrada em Brandão (2002).

A partir do Lemma de Itô é possível derivar alguns processos comumente utilizados na literatura para precificar ativos. A maioria dos textos em finanças modela o preço dos ativos considerando que seus retornos seguem uma distribuição normal, assim, é possível demonstrar que o preço desse ativo segue uma distribuição lognormal, podendo ser adequada para variáveis que não devem assumir valores negativos.

Segundo Hull (1998) é razoável considerar que a suposição de que a função *a(x,t)* seja constante não é apropriada e deve ser substituída pelo pressuposto de que *a(x,t)* seja expressa como uma função do preço do ativo, assim, as variações de *x* seriam dadas por $\alpha.x$, sendo α constante. Isso pode ser explicado considerando que a taxa de crescimento esperado (α) de um ativo independe do seu nível de preço.

Da mesma forma, considerando que o preço de um ativo exibe alguma volatilidade, uma suposição razoável é de que a volatilidade do retorno (σ), em um período de tempo *dt*, seja a mesma, independente do preço do ativo, assim, o termo estocástico do processo estocástico das variações de *x* [*b(x,t)*] poderia ser representado por $\sigma.x$, ou seja, expresso como uma função do preço.

Assim, a variação do preço do ativo *x* poderia ser representada por:

$$dx = \alpha.x.dt + \sigma.x.dz \tag{2.5}$$

Esta expressão considera que o processo estocástico de *x* é dado pela eq. (2.3) e que $a(x,t) = \alpha.x$ e $b(x,t) = \sigma.x$.

O processo representado pela eq. (2.5) é comumente denominado Movimento Geométrico Browniano (MGB) e é amplamente utilizado na literatura para representar processos estocásticos de variáveis que admitem somente valores positivos e possuem retornos normais.

Segundo Dias (2010) o MGB é o processo estocástico mais empregado nas análises econômicas e financeiras da atualidade.

Observe que $\frac{dx}{x} = \alpha.dt + \sigma.dz$ representa variações proporcionais de *x* e que podem ser representadas, em tempo contínuo, por funções logarítmicas da forma $\int_0^t \frac{dx}{x} = \ln x_t - \ln x_0 = \frac{d}{dx}(\ln x)$.

Portanto, para encontrar o processo estocástico seguido pela variável *x*, quando esta segue um MGB, deve-se primeiro, determinar o processo

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0612004/CA

estocástico da variação logarítmica da variável *x*. Considerando que *G = lnx* é uma função logarítmica da variável estocástica *x*, devemos aplicar o Lemma de Itô a partir da eq. (2.4), dada por:

$$dG = d\ln x = \left[\frac{\partial G}{\partial x}.a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}.b^2\right].dt + \frac{\partial G}{\partial x}.b.dz\ .$$

Considerando que $a(x,t) = \alpha.x$ e $b(x,t) = \sigma.x$ e que $\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{1}{x}$, $\frac{\partial G}{\partial t} = 0$ e $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}$, teremos o seguinte resultado para d*lnx* :

$$d\ln x = \left[\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right].dt + \sigma.dz \qquad (2.6)$$

Assim, podemos afirmar que $d\ln x \sim N\left(\left[\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right].dt\ ,\ \sigma.\sqrt{dt}\right)$ e desenvolvendo a eq. (2.6), teremos:

$$\ln x_t - \ln x_0 = \left[\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right].dt + \sigma.dz \Rightarrow \ln\frac{x_t}{x_0} = \left[\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right].dt + \sigma.dz \Rightarrow x_t = x_0.e^{\left[\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right).dt + \sigma.dz\right]}$$

Desse modo, a expressão:

$$x_t = x_0.e^{\left[\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right).dt + \sigma.dz\right]} \qquad (2.7)$$

representa o processo estocástico seguido por uma variável que possui um comportamento do tipo MGB, sendo possível demonstrar que $E(x) = x_0.e^{\alpha.t}$ e $VAR(x) = x_0^2.e^{2.\alpha.t}.\left(e^{\sigma^2.t} - 1\right)$.

Conforme Batista (2007), a eq. (2.7) permite que o valor de uma variável modelada pelo MGB seja simulado por meio do sorteio da variável aleatória *z.*

Existem muitos outros processos estocásticos que podem ser encontrados ao definir *a(x,t)* e *b(x,t)* conforme Dias (2010), Wilmott et ali (1995), Brandão (2002) e Batista (2007), contudo, o presente trabalho se limita ao uso do MGB, considerando que os trabalhos encontrados na literatura utilizam esta pressuposição, conforme Brandão & Saraiva (2007).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0612004/CA

2.2.
Avaliação neutra ao risco

Segundo Hull (1998) a avaliação neutra em relação ao risco é o instrumento mais importante na precificação de derivativos. Podem-se considerar duas razões para isso:

- a avaliação não é afetada pela preferência de risco dos investidores. Dessa forma, permite a utilização de qualquer conjunto de preferências de risco para avaliar o derivativo, já que podemos assumir que todos os investidores se encontram em um mundo neutro ao risco. Nesse sentido, o retorno esperado de todos os títulos é a taxa livre de risco; e

- o valor presente de qualquer fluxo de caixa em um mundo neutro ao risco pode ser obtido mediante o desconto de seu valor esperado pela taxa livre de risco. A dificuldade em considerar um mundo avesso ao risco ao precificar derivativos, está no fato de que a introdução do derivativo afeta o risco do ativo e, consequentemente, a taxa de desconto a ser considerada, não sendo trivial o cálculo desta nestas circunstâncias.

Observe que a situação de indiferença ao risco simplifica consideravelmente a análise de derivativos. Segundo Brandão (2002) o ajuste neutro ao risco pode ser realizado diretamente nas probabilidades reais do preço do ativo, desde que obedeça a algumas propriedades.

Esse método é uma aplicação do princípio da não-arbitragem, em que os preços dos ativos devem ser consistentes de tal forma que não seja possível auferir lucros sem incorrer em riscos.

Conforme Hull (1998) é possível determinar os parâmetros de um processo estocástico neutro ao risco a partir da montagem de uma carteira replicante que tenha como remuneração a taxa livre de risco. Como se parte do princípio da não-arbitragem, a carteira replicante, composta de n quantidades vendidas do ativo objeto e uma quantidade comprada do derivativo, será formada de modo a assegurar que o processo seja neutro ao risco. Dessa forma, definamos f como o preço de um derivativo dependente de um ativo objeto x que paga dividendos contínuos à taxa δ. Imagine que a variação do preço do ativo x siga um processo estocástico do tipo MGB, conforme definido na seção 2.1 pela eq. (2.5).

Note que dz é o incremento do Processo de *Wiener*, α é a taxa de crescimento esperada do preço do ativo e σ a volatilidade dos retornos do ativo.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0612004/CA

Como o ativo objeto fornece dividendos contínuos, α não é igual ao retorno esperado do ativo objeto. Este pode ser definido da seguinte forma: $\mu = \alpha + \delta$ (retorno esperado = retorno do ganho de capital + retorno dos dividendos). Outra forma de visualizar é considerar μ como o custo de capital e, dessa forma, $\mu = r + \lambda.\sigma$ (custo de capital = taxa livre de risco + taxa de risco). Assim, $\mu = \alpha + \delta = r + \lambda.\sigma$.

Visto que *f* é uma função de *x* e *t*, aplicando o Lemma de Itô, teremos:

$$df = \left[\frac{\partial f}{\partial x}.\alpha.x + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.\sigma^2.x^2\right].dt + \frac{\partial f}{\partial x}.\sigma.x.dz \qquad (2.8)$$

Podemos montar uma carteira Π com a seguinte composição:

f : uma quantidade comprada do derivativo

-n.x : *n* quantidades vendidas do ativo objeto do derivativo

Assim, o valor da carteira poderia ser expresso por:

$\Pi = f - n.x$ (2.9)

e sua mudança em um intervalo de tempo Δt seria dada por $\Delta\Pi = \Delta f - n.(\Delta x + \delta.x.\Delta t)$. Onde $n.\Delta x$ é o ganho de capital do ativo objeto no período Δt e $n.\delta.x.\Delta t$ é o ganho decorrente dos dividendos distribuídos sobre o montante de ativos no período Δt.

Observe que para garantir que o retorno da carteira seja neutro ao risco, devemos considerar que a taxa de retorno esperado da Carteira seja dada pela taxa livre de risco, *r*, e, dessa forma, teremos:

$r.\Pi.\Delta t = \Delta f - n.(\Delta x + \delta.x.\Delta t)$ (2.10)

Substituindo as equações (2.5) e (2.8) em (2.10), teremos:

$$r.\Pi.dt = \left[\frac{\partial f}{\partial x}.\alpha.x + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.\sigma^2.x^2\right].dt + \frac{\partial f}{\partial x}.\sigma.x.dz - n.[\alpha.x.dt + \sigma.x.dz + .\delta.x.dt]$$

Rearranjando:

$$r.\Pi.dt = \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial x}.\alpha.x + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.\sigma^2.x^2 - n.(\alpha+\delta).x\right].dt}_{\text{Parcela Determinística}} + \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial x}.\sigma.x - n.\sigma.x\right].dz}_{\text{Parcela Estocástica}} \qquad (2.11)$$

Como a carteira foi definida como sendo livre de risco, ou seja, remunerada com a taxa livre de risco, pelo princípio da não-arbitragem é preciso encontrar o valor de *n* de forma que o componente de risco seja eliminado da eq. (2.11) acima.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0612004/CA

Portanto, o segundo termo do lado direito da eq. (2.11) deve ser eliminado de forma que se torne consistente com a característica livre de risco da carteira, assim, $\left[\frac{\partial f}{\partial x}.\sigma.x - n.\sigma.x\right].dz = 0 \Rightarrow n = \frac{\partial f}{\partial x}$ (2.12)

Dessa forma, a quantidade de ativos *x* a ser vendida na carteira de forma que ela seja livre de risco será de $\frac{\partial f}{\partial x}$, expressão esta comumente chamada de *delta hedge* (Hull, 1998). Assim, substituindo as equações (2.9) e (2.12) na eq. (2.11), chega-se a:

$$r.\Pi.dt = \left[\frac{\partial f}{\partial x}.\alpha.x + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.\sigma^2.x^2 - n.(\alpha+\delta).x\right].dt + \left[\frac{\partial f}{\partial x}.\sigma.x - n.\sigma.x\right].dz$$

$$= r.\left(f - \frac{\partial f}{\partial x}.x\right).dt = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.\sigma^2.x^2 - \frac{\partial f}{\partial x}.(-\alpha+\alpha+\delta).x\right].dt$$

$$= r.f = \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.\sigma^2.x^2 + (r-\delta).x\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (2.13)$$

Observe, na eq. (2.13), que a taxa de crescimento de *f* deve ser de ($r - \delta$) e, portanto, esta é a taxa de crescimento neutra ao risco. Isso pode ser observado considerando que, neste caso, a taxa de retorno esperado será livre de risco e, portanto, tem-se $\mu = r$ e utilizando a equação $\mu = \alpha + \delta$, resulta em uma taxa de crescimento de *f* de $\alpha = r - \delta$, confirmando o resultado alcançado acima. Observe, ainda, que a expressão $\mu = \alpha + \delta = r + \lambda.\sigma$, pode ser reescrita como $(r - \delta) = (\alpha - \lambda.\sigma)$. Assim, ambas as expressões podem ser utilizadas como a taxa de crescimento neutra ao risco.

Outra forma de demonstrar a taxa de crescimento utilizada em um processo neutro ao risco pode ser encontrada em Dias (2008), segundo o qual estabelece que o valor de um ativo objeto *x* na data zero pode ser definido por

$$x_0 = e^{-\mu.\Delta t}.E^P\left(x_t\right).e^{-\delta.\Delta t} = e^{-r.\Delta t}.E^Q\left(x_t\right).e^{-\delta.\Delta t} \quad (2.14)$$

Observe que a primeira expressão da eq. (2.14) foi construída considerando a taxa de desconto com risco μ e a distribuição de probabilidade real dos preços do ativo, sob a medida P. Da mesma forma, utilizando a abordagem neutra ao risco, a segunda expressão da eq. (2.14) utiliza como taxa de desconto a taxa livre de risco *r* e a distribuição de probabilidade neutra ao risco, sob medida Q, equivalente à distribuição de probabilidade real P.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0612004/CA

Considerando que ambas as expressões sejam equivalentes, devem-se chegar ao mesmo valor x_0.

Assim, podemos escrever a relação entre o valor esperado utilizando a abordagem real e neutra ao risco como:

$$E^Q(x_t) = e^{-(\mu - r).\Delta t}.E^P(x_t) \quad (2.15)$$

Substituindo $\mu = r + \lambda.\sigma$ na eq. (2.15) chega-se a:

$$E^Q(x_t) = e^{-(r+\lambda.\sigma - r).\Delta t}.E^P(x_t) \Rightarrow E^Q(x_t) = e^{-\lambda.\sigma.\Delta t}.E^P(x_t) \quad (2.16)$$

Observe que $e^{-\lambda.\sigma.\Delta t}$ na eq. (2.16) representa o fator de desconto do prêmio de risco. De certa forma a aplicação desse fator de desconto pode ser interpretada como uma penalização aplicada ao valor esperado real, sob uma medida de probabilidade real P, quando se utilizar uma medida de probabilidade neutra ao risco Q ao invés da medida real P e uma taxa de desconto livre de risco *r* ao invés da taxa de desconto com risco μ.

Isso faz sentido na medida em que o valor esperado real sob medida P tem embutido fluxos considerando elementos de certeza e incerteza e para que se possa utilizar a taxa de desconto livre de risco, deve-se descontar do valor real a parcela referente às incertezas. Assim, a parcela de valor resultante será o que é comumente denominado de Equivalente Certo, conforme Brandão (2002).

Considerando, ainda, que *x* segue um processo estocástico do tipo Movimento Geométrico Browniano (MGB), então, $E^P(x_t) = x_{t-\Delta t}.e^{\alpha.\Delta t}$ e, substituindo na eq. (2.16) tem-se $E^Q(x_t) = \left(x_{t-\Delta t}.e^{\alpha.\Delta t}\right)e^{-\lambda.\sigma.\Delta t} = x_{t-\Delta t}.e^{(\alpha - \lambda.\sigma).\Delta t}$, como $(\alpha - \lambda.\sigma) = (r - \delta)$, chega-se a $E^Q(x_t) = x_{t-\Delta t}.e^{(r-\delta).\Delta t}$.

Observe que a taxa de crescimento esperado considerando um mundo neutro ao risco será de $(r - \delta)$ ao invés de α, conforme a eq. (2.13), que demonstrou a aplicação da carteira replicante neutra ao risco.

Assim, o processo estocástico do preço de um ativo objeto *x* será neutro ao risco quando a taxa de crescimento α for substituída por $(r - \delta)$ e, ao mesmo tempo, a taxa de desconto (retorno esperado) μ for substituída pela taxa livre de risco *r*. Assim, *x* evoluiria segundo um processo estocástico neutro ao risco quando $x_t = x_{t-\Delta t}.e^{\left[\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right).\Delta t + \sigma.\Delta z\right]}$. Esta equação é amplamente encontrada nos livros-texto de finanças e muito importante para precificar derivativos por meio de simulação e será utilizada como base no presente trabalho.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0612004/CA

2.3.
Introdução da correlação nos processos estocásticos dos fatores de risco do projeto

Quando um projeto de investimento é dependente de vários fatores de risco correlacionados ou quando se analisa uma carteira de projetos com diferentes fatores de risco, também, correlacionados, a realização do processo estocástico deve levar em conta estas correlações.

Um método amplamente utilizado na literatura para este fim é a decomposição de Cholesky, que permite realizar processos estocásticos correlacionados a partir de variáveis aleatórias independentes (Jorion, 2001).

A Figura 1 apresenta uma estrutura típica de mapeamento dos fatores de risco de uma carteira de projetos de investimento e os respectivos processos estocásticos e estrutura de correlação.

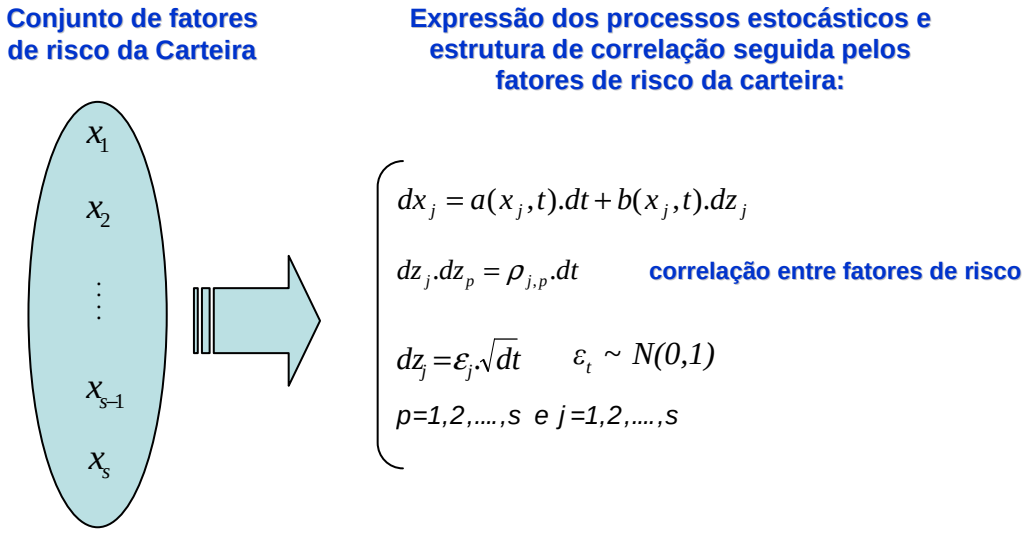

Figura 1 - Mapeamento dos Processos Estocásticos e Estrutura de Correlação

A seguir são apresentados os passos sugeridos para a incorporação da correlação quando da realização do processo estocástico de cada fator de risco:

1. estimar a correlação entre os fatores de risco do projeto ou dos projetos da carteira;
2. decompor a matriz de correlação em duas matrizes triangulares, inferior e superior, sendo uma a transposta da outra. A multiplicação das duas matrizes deverá resultar na matriz de correlação original. Contudo, para que a decomposta exista a matriz de correlação deve ser necessariamente positiva definida, pois caso não seja, não será

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0612004/CA

possível calcular a decomposta e, conseqüentemente, realizar os processos estocásticos levando em conta as correlações entre os fatores de risco. Este problema aparece com mais freqüência a medida que a dimensão da matriz de correlação aumenta.

3. criar o vetor que represente a realização das variáveis aleatórias independentes, levando em conta (i) o número de fatores de risco do projeto ou dos projetos da carteira; e (ii) o número de discretizações *n* do período de tempo do projeto ou dos projetos da carteira.

4. multiplicar a decomposta da matriz de correlação pelo vetor de variáveis aleatórias independentes. Dessa forma teremos como resultado a realização de variáveis aleatórias levando em conta a correlação. É fácil observar que este procedimento de inserção da correlação é adequado, pois se tomarmos a correlação entre as variáveis aleatórias simuladas, chega-se à estrutura de correlação original.

Se a dimensão do problema que se quer modelar aumenta muito, como é o caso de carteira de projetos, em que a quantidade de fatores de risco associados aumenta significativamente, a matriz de correlação para aplicação do método de decomposição de Cholesky pode não ser decomponível, por não ser positiva definida, e neste caso, o método não pode ser aplicado, já que o pré-requisito para aplicação do método está na possibilidade de decompor a matriz de correlação e que ela seja positiva definida. Quando isso ocorrer deve-se contornar o problema utilizando outros métodos mais genéricos de aplicação do processo de decomposição.

A matriz não será positiva definida quando pelo menos um dos autovalores da matriz de correlação for negativo. Como o método de Decomposição de Cholesky faz a decomposição direta, a partir da matriz de correlação, não entrando na estrutura de autovalores e autovetores associados, não é possível resolver o problema de forma direta quando a matriz não for positiva definida, inviabilizando a aplicação do método.

Uma forma alternativa é utilizar o método denominado Decomposição Espectral que pode ser utilizado para qualquer tipo de matriz de correlação, independentemente se a matriz é positiva definida ou não. Isso é possível porque ao invés de partir da decomposição direta da matriz de correlação, o método parte dos autovetores associados aos autovalores da matriz de

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0612004/CA

correlação e caso haja autovalores negativos, contornar-se o problema simplesmente substituindo-os por zero. Neste caso, encontrará uma decomposta da matriz de correlação que se multiplicada pela sua transposta chegará a uma estrutura de correlação aproximada da original (Jaeckel, 2002).

O presente trabalho utiliza a Decomposição Espectral para a incorporação da correlação nos processos estocásticos dos fatores de risco do(s) projeto(s) e por esta razão, a seguir, será apresentada como determinar a decomposta da matriz de correlação utilizando este método.

Conforme Rebonato & Jaeckel (1999), considere os autovetores *S* da matriz de correlação simétrica e real *C* associados ao conjunto de autovalores $\{\lambda\}$ tal que $C.S = S.\Lambda$ com $\Lambda =$ diag(λ_i).

Se multiplicarmos $C.S = S.\Lambda$ pela transposta de S e desdobrarmos Λ em duas parcelas teremos $C = S.\left(\sqrt{\Lambda}.\sqrt{\Lambda}^T\right).S^T = \left(S.\sqrt{\Lambda}\right).\left(S\sqrt{\Lambda}\right)^T$.

Sendo $\Lambda = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix}$ e como condição de existência de solução real $\lambda_i \geq 0$ para *i =1, 2, 3, ... , n*.

Dessa forma, a decomposta de C será dada por $S.\sqrt{\Lambda}$.

Caso ao menos um autovalor de Λ seja negativo, a matriz *C* não será positiva definida e, assim, não poderá ser decomposta, inviabilizando a introdução da correlação nos processos estocásticos dos fatores de risco do(s) projeto(s).

Para contornar este problema, utilizaremos a Decomposição Espectral, que parte da estrutura de autovetores associados aos autovalores, para substituir os autovalores negativos da matriz diagonal Λ por zero, assim, definiremos uma matriz diagonal Λ' como:

$$\Lambda' : \quad \lambda_i' = \begin{cases} \lambda_i \ : \ \lambda_i >= 0 \\ 0 \ : \ \lambda_i < 0 \end{cases}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0612004/CA

Além disso, defina os elementos de uma matriz diagonal T em relação aos autovetores S como $T : t_i = \left[\sum s_{im} . \lambda_m^{'} \right]^{-1}$ e considere que $B^{'} := S.\sqrt{\Lambda^{'}}$ e $B := \sqrt{T}.B^{'} = \sqrt{T}.S.\sqrt{\Lambda^{'}}$.

A introdução de $\sqrt{T}$ tem a finalidade de normalizar a decomposta adaptada *B'*, considerando que a matriz de autovalores Λ foi ajustada para Λ'.

Podemos agora, partindo da matriz *B* calcular a matriz $\hat{C}$, que será positiva definida com elementos da diagonal unitários, dada por $\hat{C} = B.B^T$. A matriz $\hat{C}$ será uma aproximação da matriz de correlação original *C*, podendo utilizar *B* como decomposta de $\hat{C}$ para fins de introdução da correlação nos processos estocásticos dos fatores de risco do(s) projeto(s).

A representação genérica do processo de incorporação da estrutura de correlação na realização dos processos estocásticos dos fatores de risco do projeto pode ser observada na Figura 2.

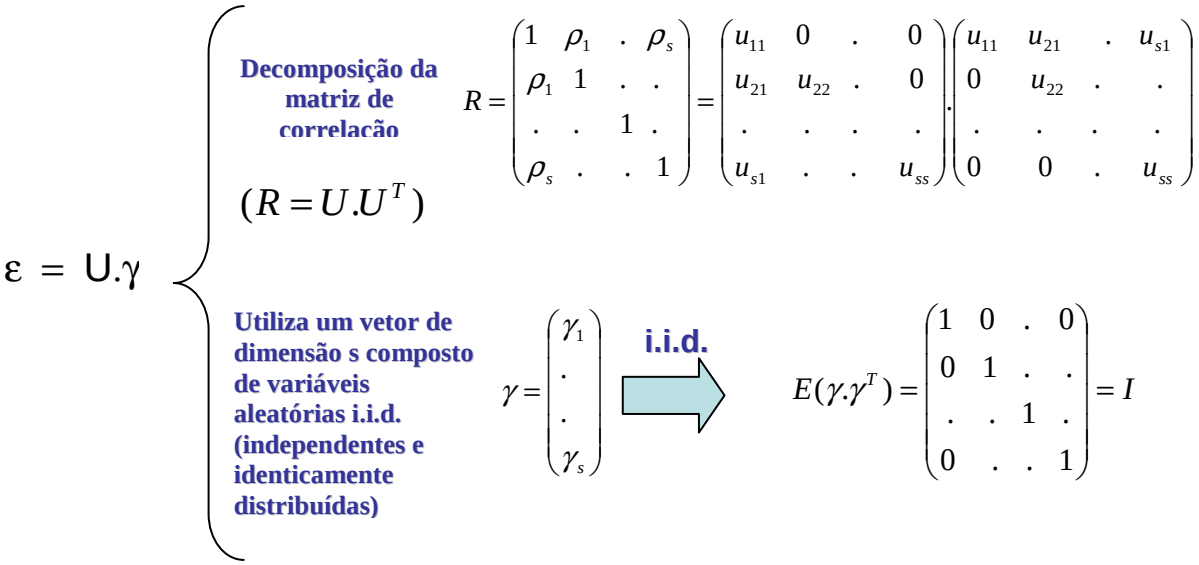

Figura 2 - Fluxograma para incorporação da correlação nos processos estocásticos

De acordo com Jorion (2001), pode-se tomar a covariância da variável aleatória correlacionada ε com sua transposta, utilizando a relação U.γ, para verificar que o resultado encontrado aplicando o método de decomposição será a matriz de correlação original, conforme apresentado pela eq. (2.17).

$$VAR(\varepsilon) = E[\varepsilon.\varepsilon^T] = E[(U.\gamma).(\gamma^T.U^T)] = U.E(\gamma.\gamma^T).U^T = U.I.U^T = U.U^T = R \quad (2.17)$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0612004/CA

Dessa forma, será possível partirmos de variáveis aleatórias independentes (γ) e, aplicando a Decomposição de Cholesky ou a Decomposição Espectral, encontrar variáveis aleatórias (ε) que leve em conta a correlação entre os fatores de risco do projeto ou da carteira de projetos.

Portanto, considerando o Processo de *Wiener* dado por $dz = \varepsilon_t . \sqrt{dt}$, será a variável aleatória correlacionada ε que deverá ser utilizada quando da realização dos processos estocásticos dos fatores de risco e não a variável aleatória independente γ.

2.4. Orçamento de capital *versus* Planejamento estratégico

A análise de investimento tradicional, por meio do VPL, não leva em conta as possíveis decisões que os gestores possam vir a fazer ao longo do tempo, associadas à implementação de cursos de ação alternativa em relação àqueles inicialmente propostos ao projeto.

Dessa forma, a análise tradicional não pode ser considerada uma ferramenta efetiva na análise estratégica de investimento na medida em que omite decisões importantes e não leva em conta o valor da flexibilidade gerencial relacionada com as possibilidades de mudança nas diretrizes estratégicas do projeto como, por exemplo, adiar, expandir, abandonar ou contrair o projeto, dependendo das condições de mercado e dos estados da natureza em que se encontrem os fatores de risco do projeto.

Assim, os responsáveis pelo orçamento de capital e pelo planejamento estratégico, geralmente, subordinados a áreas diferentes dentro das organizações, utilizam análises distintas e que não se interligam, levando a distorções de resultados de uma análise em relação à outra e gerando até atritos e mal-entendidos internos à organização.

De certa forma, esta dificuldade advém das limitações que a técnica tradicional de orçamento de capital possui por desconsiderar na avaliação de um investimento, os diferentes cursos de ação que um projeto poderia seguir ao longo do tempo, pois, considera que a decisão de investir representa apenas um “sim” ou “não” na data zero, ou seja, a decisão do tipo “agora ou nunca”.

Um exemplo disso consiste em um projeto com VPL menor do que zero. A análise tradicional não hesitaria em avaliá-lo como um projeto ruim. Contudo, o que não se percebe é que a técnica tradicional: (i) utiliza valores esperados dos fatores de risco do projeto, desconsiderando completamente o comportamento

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0612004/CA

probabilístico da variável ao longo do tempo; (ii) desconsidera a natureza dinâmica do processo de decisão de desistir ou continuar com um projeto e; (iii) desconsidera que o tempo é o melhor aliado na revelação de informações e reduções de risco no processo de decisão.

Dessa forma, o VPL poderia se tornar positivo ao longo do tempo em decorrência de uma nova decisão, levando o gestor a aceitar o projeto, já que não se sabe para onde seguirão os fatores de risco.

A avaliação de investimento utilizando a Teoria de Opções Reais, ao analisar cada estado da natureza possível, permite estabelecer cursos de ação diferentes dependendo da região do estado da natureza em que se encontrem os fatores de risco do projeto.

Desconsiderar a flexibilidade gerencial na análise de investimento é o mesmo que considerar que os gestores não terão autonomia ou racionalidade suficiente para interromper um projeto quando este não alcança resultados favoráveis e sua continuidade só agravaria ainda mais a sua rentabilidade; ou que a empresa não expandirá suas atividades, com novos investimentos, caso os resultados fiquem acima do esperado, deixando que os concorrentes preencham estas lacunas.

Dessa forma, a análise estratégica prevê reações naturais dos gestores diante de novas revelações e fatos, ou seja, existe um processo de decisão contínuo em que o gestor pode reavaliar suas decisões passadas e tomar um rumo diferente, tal que maximize o valor do projeto.

É dentro deste contexto que existe uma incompatibilidade entre a visão dinâmica da área de planejamento estratégico e a visão estática das técnicas tradicionais de orçamento de capital. Incorporar as possíveis decisões e cursos de ação representaria um importante passo na integração de áreas tão importantes para o processo de decisão.

Esta integração poderia ser alcançada utilizando as técnicas de precificação de opções, dado que estas permitem avaliar um investimento em que os gestores têm o direito e não a obrigação de investir, dependendo das condições ou estado da natureza em que o valor do projeto se encontre.

É interessante observar que esta técnica avalia o investimento em todos os estados da natureza, para cada período de tempo, ou seja, ela percorre o comportamento probabilístico da variável ao longo do tempo tomando decisões e utilizando as alternativas disponíveis (opções), de modo a maximizar o valor do projeto.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0612004/CA

Dessa forma, é possível avaliar hoje qual seria a decisão tomada no futuro caso o projeto esteja em uma situação boa ou ruim. Isso é possível pelo fato de se conhecer o comportamento probabilístico dos fatores de risco do projeto e pela autonomia e flexibilidade gerencial para introduzir novas alternativas ou cursos de ação para o projeto, dependendo do estado da natureza estar favorável ou desfavorável.

É dentro deste contexto que poderia ser feita a integração entre as técnicas de planejamento estratégico e orçamento de capital, já que o primeiro define os cursos de ação por meio de um plano contingente completo, ou seja, para cada estado da natureza e para cada instante de tempo, definem-se possíveis cursos de ação a tomar e quais as reações esperadas para maximizar o valor de um projeto e evitar resultados desfavoráveis.

E o segundo avalia não só o valor do projeto em condições esperadas (VPL tradicional), mas também o valor da flexibilidade gerencial associada àquele projeto, ou seja, a possibilidade de inserir na avaliação, as alternativas elaboradas no plano contingente completo pelo planejamento estratégico.

Poderemos agora contextualizar a pouca adequação das técnicas tradicionais na avaliação de investimentos de natureza real e estratégica. A técnica tradicional foi criada tipicamente por bancos, nos empréstimos e financiamentos de projetos, e por investidores em mercados bastante diluídos, ambos, fornecedores de recursos cuja intervenção nos rumos do projeto antes ou após ele estar operando era muito pequena. Diante destas condições em que a flexibilidade gerencial se reduziria a praticamente zero, o valor do projeto se reduziria ao VPL, ou seja, ao valor alcançado pela técnica tradicional. Dessa forma, a avaliação tradicional seria adequada para investidores ou fornecedores de recursos que não tem poder de decisão, ou seja, que está do lado de fora da empresa. Contudo, esta técnica migrou dos bancos para as empresas financiadas, até como uma exigência natural dos fornecedores de recursos, e passou a ser difundida rapidamente e aceita como uma técnica adequada para orçamento de capital Trigeorgis (1996).

Contudo, do ponto de vista de análise estratégica para as empresas ela não representa uma ferramenta efetiva na avaliação estratégica de investimento e no processo de tomada de decisão, já que o gestor tem o poder de decisão dentro da organização e pode alterar o rumo do projeto e, portanto, seu valor. Isso é possível graças à análise estratégica efetuada pela área de planejamento que ao investir em um projeto de risco elabora um plano contingente completo com as possíveis reações a tomar.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0612004/CA

Portanto, dentro deste contexto, qualquer avaliação de um investimento real que um gestor faça utilizando a técnica tradicional estará subavaliando o potencial de geração de valor do projeto, pois estará desconsiderando o principal diferencial de uma organização que é a capacidade de reagir a condições diferentes das inicialmente esperadas e buscar cursos de ação diferenciada de forma a maximizar o valor do investimento.

Isso pode representar perdas de oportunidades de investimento que poderiam ser consideradas adequadas em outro instante de tempo ou sob outras condições e configurações do projeto. Assim, a avaliação por meio da Teoria de Opções Reais se mostra mais adequada do que a avaliação tradicional quando se espera introduzir no projeto flexibilidades que não podem ser capturadas pela avaliação tradicional e, mais, quando se pretende realizar uma avaliação estratégica do investimento.

Dentro deste contexto é que podemos considerar que um projeto com risco elevado pode apresentar-se viável do ponto de vista do risco, caso o governo venha a oferecer uma garantia do tipo receita mínima, na medida em que esta ação governamental incorpora flexibilidades, que reduzem o risco do projeto e viabilizam os investimentos por parte da iniciativa privada e podem ser precificadas por meio da Teoria de Opções Reais.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0612004/CA

2.5. Avaliação tradicional de projetos

2.5.1. Introdução

Conforme Brealey & Myers (2003), a avaliação tradicional de um projeto de investimento utilizando os fluxos de caixa descontados considera os seguintes elementos:

- definição dos fatores de risco e das variáveis determinísticas do projeto;
- estrutura dos fluxos de caixa do projeto;
- definição do prazo em que o projeto gerará fluxos de caixa;
- taxa de desconto do projeto; e
- investimento necessário para a realização do projeto.

A partir dos elementos acima é possível calcular o valor presente líquido do projeto (VPL), referência para a análise de sua viabilidade, com a finalidade de avaliar se ele é considerado viável ou não. O VPL é dado por:

VPL = V – I

Onde V é o valor presente do projeto, calculado conforme demonstrado nas seções seguintes, e I é o investimento necessário à implementação do projeto.

A decisão de investimento na visão tradicional da análise de investimento considera que quando o VPL é maior do que zero, o projeto é considerado viável e deve ser realizado, enquanto que, quando o VPL é menor do que zero, o projeto é considerável inviável e não deve ser realizado (Ross et al., 1995).

O valor de um projeto na data zero é obtido da soma dos fluxos de caixa descontados por uma taxa de desconto adequada. A Figura 3 apresenta as etapas para se determinar o valor de um projeto:

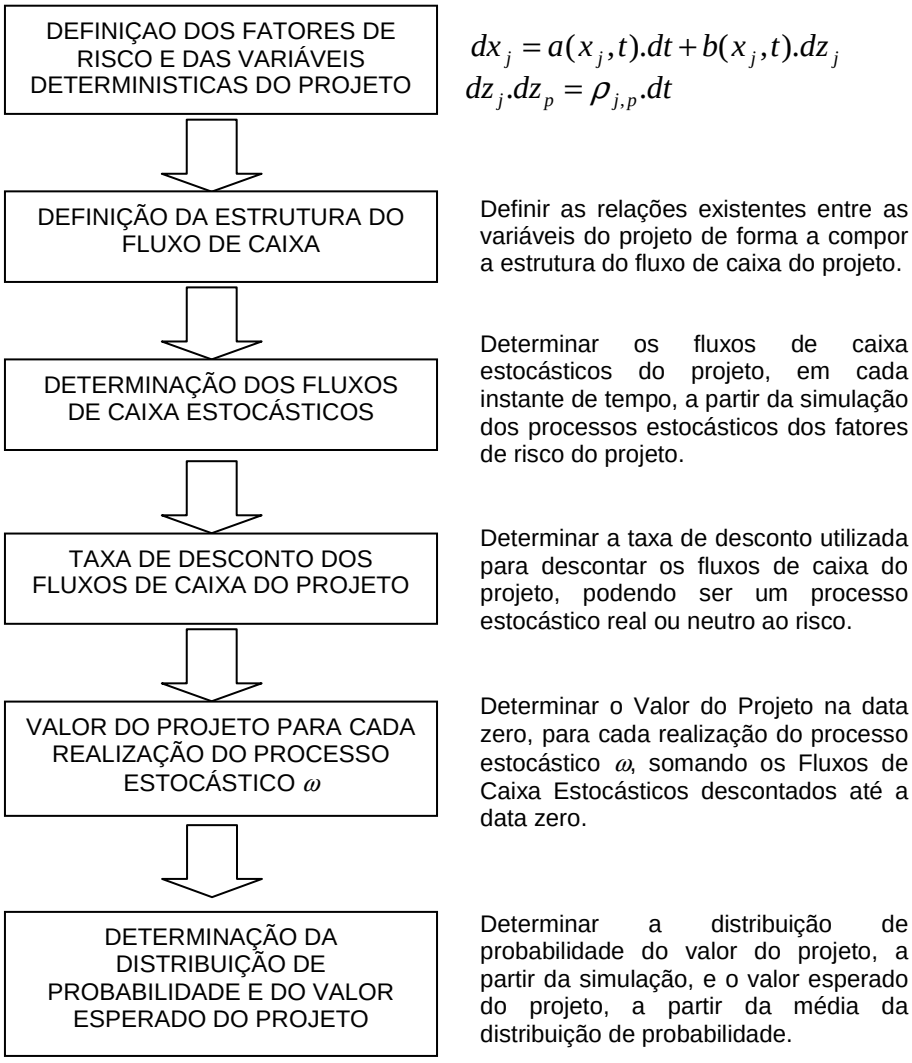

Figura 3 - Etapas para determinação do Valor do Projeto

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0612004/CA

2.5.2.
Definição dos fatores de risco e das variáveis determinísticas do projeto

O primeiro passo para a avaliação é definir os fatores de risco e as variáveis determinísticas do projeto que serão utilizadas para calcular os fluxos de caixa e, posteriormente, o valor do projeto.

Exemplos típicos de fatores de risco são preço de produtos, custo de insumos, taxa de juros e de câmbio e índices de preços. Em relação às variáveis determinísticas podemos destacar custos fixos da empresa, tais como custo de manutenção, de mão de obra e de depreciação, despesas administrativas e alíquotas de impostos.

Após o mapeamento dos fatores de risco existentes no projeto deve-se definir o comportamento probabilístico seguido por cada fator de risco, identificando, para tanto, o processo estocástico de cada um e a estrutura de correlação entre eles. Pode-se estabelecer a relação entre as variáveis utilizando modelos econométricos.

2.5.3.
Definição da estrutura dos fluxos de caixa e determinação dos fluxos de caixa estocásticos do projeto

A partir do mapeamento dos fatores de risco e das variáveis determinísticas do projeto será possível definir a estrutura dos fluxos de caixa do projeto e determinar seus fluxos de caixa estocásticos, a partir da simulação dos fatores de risco do projeto.

O fluxo de caixa de um projeto pode ser definido como a contribuição incremental para a composição de valor de um projeto de investimento em um determinado instante de tempo e que utiliza, para expressar este valor, de relações entre variáveis aleatórias e determinísticas que tenham efeito direto com as finalidades do projeto. Dessa forma, os fluxos de caixa de um projeto de investimento representam frações do valor do projeto em instantes distintos no tempo, podendo estas contribuições variar ao longo do tempo, dependendo do comportamento das variáveis que compõem este valor.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0612004/CA

Genericamente, podemos expressar um fluxo de caixa, conforme o modelo apresentado na Tabela 1 a seguir:

CÁLCULO DO FLUXO DE CAIXA LIVRE	
(+)	***Receita***
(-)	***Custo Variável***
(-)	***Custo Fixo***
(=)	***Lucro Operacional***
(-)	***Impostos***
(=)	***Lucro Líquido***
(+)	***Depreciação***
(+/-)	***Variação do Capital de Giro***
(=)	***(1) Fluxo de Caixa Livre (FC^t_i)***
$\Sigma[FC^t_i/(1+k)^t]$	***(2) Valor Presente (VP^t_i)***

Tabela 1 - Modelo da Estrutura de um Fluxo de Caixa

Dessa forma, podemos expressar matematicamente a estrutura do fluxo de caixa do projeto, representado pelo modelo da Tabela 1, por:

$$FC = \left(R - CV - CF \right).\left(1 - T \right) + / - VCG + D$$

FC : Fluxo de Caixa do Projeto
R : Receita
CV : Custo Variável
CF : Custo Fixo
VCG : Variação do Capital de Giro
D : Depreciação

Em seguida, deve-se definir quais destas variáveis são estocásticas e quais são determinísticas.

A título de exemplo, considere que das variáveis apresentadas na Tabela 1, a Receita, o Custo Variável e a Variação do Capital de Giro sejam variáveis aleatórias e o Custo Fixo, a Depreciação e a alíquota do imposto de renda (T) sejam variáveis determinísticas. Dessa forma, será possível expressar matematicamente as relações que compõe o fluxo de caixa em um dado instante de tempo (t) e para uma dada realização do processo estocástico (ω), da seguinte forma:

$$FC_{t,w} = \left(R_{t,w} - CV_{t,w} - \overline{CF} \right).\left(1 - \overline{T} \right) + / - VCG_{t,w} + \overline{D}$$

Note que o fluxo de caixa também será uma variável estocástica com comportamento probabilístico dado pelo resultado das realizações, em cada instante de tempo, dos processos estocásticos de cada uma das variáveis aleatórias que compõem seu valor, considerando que é função de variáveis estocásticas. Podemos encontrar o processo estocástico do fluxo de caixa a

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0612004/CA

partir do Lemma de Itô, dado que este permite determinar o processo estocástico de funções de variáveis aleatórias.

Graficamente, poderíamos expressar o comportamento das variáveis determinísticas, estocásticas e dos fluxos de caixa ao longo do tempo, para uma dada realização do processo estocástico dos fatores de risco do projeto (ω), conforme a Figura 4.

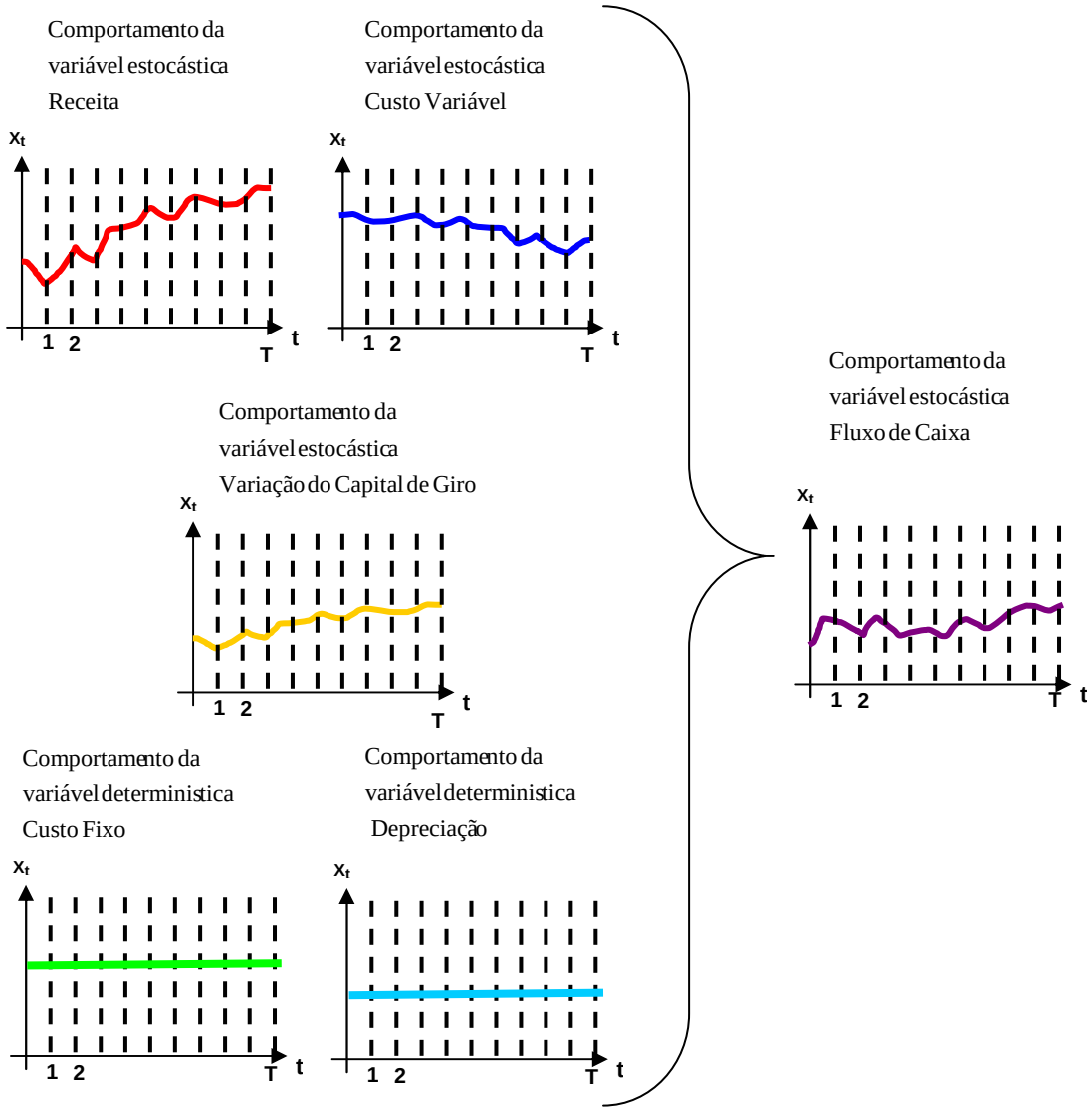

Figura 4 - Composição dos Fluxos de Caixa Estocásticos

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0612004/CA

2.5.4.
Taxa de desconto dos fluxos de caixa do projeto

Conforme Dias (2010), a taxa de desconto (μ) de um projeto pode ser interpretada a partir da ótica do custo e do retorno, dependendo de quem está avaliando o projeto, e, em ambos os casos, o resultado será o mesmo:

- Ótica do custo: $\mu = r + \lambda\sigma$ (2.18)

  r : taxa livre de risco e $\lambda\sigma$: prêmio de risco

- Ótica do retorno: $\mu = \alpha + \delta$ (2.19)

  α : taxa de ganho de capital e δ : taxa de dividendos

A partir das equações (2.18) e (2.19) é possível concluir que $r - \delta = \alpha - \lambda\sigma$, que é a expressão da taxa de crescimento neutra ao risco, conforme demonstrado na seção 2.2.

2.5.5.
Determinação da distribuição de probabilidade e do valor esperado do projeto

A distribuição de probabilidade do valor de um projeto pode ser obtida a partir dos valores do projeto encontrados quando se realiza uma quantidade razoável de simulações dos processos estocásticos dos seus fatores de risco.

O valor de um projeto na data zero, para uma dada realização do processo estocástico (ω), pode ser obtido a partir da soma dos fluxos de caixa estocásticos, descontados à data zero, existentes no período [0,T]. Este valor pode ser representado pela seguinte expressão, utilizando, como exemplo, o modelo apresentado na seção 2.5.3:

$$V_{0,w} = \int_{t=0}^{T} \left(FC_{t,w} \mid R_o, CV_o, CF_o, VCG_o, D_o \right).e^{-\mu.t}.dt \quad (2.20)$$

e

$$VPL_{0,w} = V_{0,w} - I_0 \quad (2.21)$$

Onde I_0 é o investimento realizado na data zero

A eq. (2.20) pode ser decomposta em dois elementos: o primeiro $\left(FC_{t,w} \mid R_o, CV_o, CF_o, VCG_o, D_o \right)$ representa os fluxos de caixa estocásticos, considerando as informações existentes na data zero e; o segundo termo $\left(e^{-\mu.t} \right)$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0612004/CA

representa o fator de desconto, utilizando uma taxa de desconto adequada. Suponha que um projeto de investimento tenha previsão de gerar fluxos de caixa anuais durante 20 anos. Isso significa que o valor do projeto na data zero, para uma dada realização do processo estocástico (ω), poderá se calculado a partir da soma dos fluxos de caixa estocásticos gerados no período [0,20], descontados a data zero, tendo como informações disponíveis, os valores assumidos pelas variáveis do projeto na data zero.

Aplicando recursivamente o procedimento supramencionado, para uma quantidade razoável de simulações, poderemos encontrar um conjunto de valores do projeto, equivalentes ao número de simulações realizadas, a partir do qual será possível determinar a distribuição de probabilidade do valor do projeto e, consequentemente, do seu VPL. Portanto, considere que o fator de risco de um projeto foi simulado 10.000 vezes, conseqüentemente, aplicando a eq. (2.20) , apresentada anteriormente, obteremos 10.000 valores para o projeto. A partir desta quantidade de simulações será possível definir a distribuição de probabilidade do valor e do VPL do projeto, e assim, realizar a avaliação de risco do mesmo.

O valor esperado do projeto pode ser calculado a partir da média dos valores do projeto constantes da sua distribuição de probabilidade (J.P. Morgan, 1996b). O mesmo se aplica ao VPL esperado, conforme as equações (2.22) e (2.23) a seguir:

$$\overline{V_0} = \left(\frac{\sum_{w=1}^{m} V_{0,w}}{m} \right) \tag{2.22}$$

e

$$\overline{VPL_0} = \left(\frac{\sum_{w=1}^{m} VPL_{0,w}}{m} \right) \tag{2.23}$$

Onde m é o número de simulações.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0612004/CA

2.6.
Investimento sob incerteza utilizando a teoria de opções reais

2.6.1.
Introdução

De acordo com Dixit & Pindyck (1994), o método tradicional de avaliação, baseado no valor presente líquido (VPL), vem sendo questionado, na medida em que não considera três características importantes no processo de avaliação de projetos de investimento, quais sejam:

- a irreversibilidade do investimento, considerando que este representa um custo afundado a partir do momento em que é realizado;
- a incerteza sobre os lucros futuros do investimento; e
- a possibilidade de adiar a realização do investimento, ou seja, o gestor tem autonomia suficiente para mudar suas decisões ao longo do tempo.

A existência destas três características permite que a flexibilidade gerencial possa ser considerada na avaliação do projeto. As técnicas de modelagem de opções podem ser utilizadas para precificar as flexibilidades gerenciais existentes em um projeto, pois qualquer investimento até que seja efetivamente investido representa unicamente um direito e não uma obrigação da empresa.

Podemos encontrar basicamente dois tipos de opções comumente utilizadas: opção de compra (CALL) e opção de venda (PUT) que podem ser classificadas como européia ou americana, dependendo do momento em que podem ser exercidas.

Opções européias podem ser exercidas somente na data de vencimento, enquanto, que as opções americanas podem ser exercidas a qualquer tempo, até a data de vencimento. Opções americanas são mais complexas de serem determinadas e, geralmente, devem-se utilizar métodos de simulação ou por árvore binomial para precificá-las (Hull, 1998).

Quando aplicadas na avaliação de projetos de investimento utiliza-se o método de precificação por opções reais. As opções reais do tipo CALL, comumente encontradas na literatura, são as opções de diferimento e expansão. E as do tipo PUT são as opções de abandono e contração (Minardi, 2004). A modelagem de precificação por opções reais permite avaliar um projeto, a partir da sua distribuição de probabilidade, considerando a possibilidade de introduzir

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0612004/CA

novas alternativas (opções) para o projeto, destacando as de adiamento, expansão, contração e/ou abandono entre outras, não restringindo a avaliação ao valor esperado, conforme a abordagem tradicional. Note que esta seria a decisão natural do gestor, já que ele tem a autonomia suficiente para decidir o que fazer no momento oportuno e de acordo com as condições colocadas diante dele.

De acordo com Castro (2008), as opções reais aumentam o valor da empresa, pela flexibilidade gerencial que outorgam aos projetos ao permitirem que se adaptem às condições futuras do mercado. Assim, podemos expressar o VPL de um projeto que tenha opção embutida da seguinte forma:

$$VPL\ com\ Opção = VPL\ sem\ Opção\ (Fluxo\ de\ Caixa\ Descontado) + Valor\ da\ Opção \quad (2.24)$$

No presente trabalho a garantia governamental de receita mínima com *CAP* será precificada a partir de um conjunto de opções européias do tipo PUT, sendo o valor da garantia dado pela soma de *n* opções, uma para cada instante de tempo Δt entre [*0 , T*], tal que $n.\Delta t = T$. A opção européia é mais adequada para este tipo de problema considerando que a decisão tomada em um instante não afeta a decisão tomada no instante seguinte, ou seja, possui caminhos e decisões independentes. A opção do tipo PUT é mais adequada dado que ela tem uma característica de seguro, a mesma característica da garantia governamental de receita mínima com *CAP* tratada no presente trabalho.

2.6.2. Opção do tipo CALL

De acordo com Hull (1998), uma opção do tipo CALL dá ao seu detentor o direito de comprar o ativo objeto em certa data, por determinado preço. O preço do contrato é conhecido como preço de exercício e sua data é conhecida como data de vencimento.

O ganho decorrente de um contrato de derivativo do tipo CALL, para uma dada realização do processo estocástico ω, chama-se de *payoff* e ocorre sempre que o preço do ativo (S) for maior do que o preço de exercício da opção (K). O *payoff* pode ser expresso como o $max(S_{T,w} - K\ ;\ 0)$. O valor de uma CALL européia pode ser dado por $C_0 = E_T\left(max\left(S_{T,\omega} - K\ ;\ 0\right)\right).e^{-r.T}$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0612004/CA

A Figura 5 apresenta o perfil de *payoffs* de uma CALL para cada valor do preço corrente S_T, em uma data T, considerando como preço de exercício K.

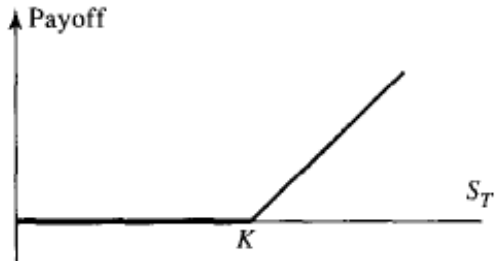

Figura 5 - Perfil de *Payoffs* da CALL

Qualquer investimento que a empresa decida realizar (expansão, adiamento ou reentrada no mercado) pode ser representado por uma opção de compra, dado que tal investimento está associado a um preço que a empresa deve pagar (valor do investimento), para obter um dado bem com determinado valor (valor do projeto). Neste caso, a empresa irá exercer o direito de comprar o projeto (investir), se o valor do projeto (V) superar o valor que ele deve pagar para adquiri-lo (I), ou seja, quando o $VPL \geq 0$ $(V \geq I)$. Caso contrário, a empresa não exercerá o direito. Está é uma típica CALL que pode representar claramente um projeto de investimento real.

As opções reais com características do tipo CALL são exercidas nos estados da natureza onde o projeto possui valores elevados, ou seja, onde o valor do projeto é maior do que o valor do investimento a ser realizado. Note que este tipo de opção aumenta o risco do projeto na medida em que age no sentido de alavancar o investimento para o detentor do direito.

2.6.3.
Opção do tipo PUT

De acordo com Hull (1998), uma opção do tipo PUT dá ao seu detentor o direito de vender o ativo objeto em certa data, por determinado preço. O preço do contrato é conhecido como preço de exercício e sua data é conhecida como data de vencimento.

O ganho decorrente de um contrato de derivativo do tipo PUT, para cada realização do processo estocástico ω, chama-se de *payoff* e ocorre sempre que o preço do ativo (S) for menor do que o preço de exercício da opção (K). O *payoff* pode ser expresso como o $max(K - S_{T,w}, 0)$. O valor de uma PUT européia pode ser dado por $P_0 = E_T\left(max\left(K - S_{T,\omega}\,;\,0\right)\right).e^{-r.T}$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0612004/CA

A Figura 6 seguir apresenta o perfil de payoffs de uma PUT para cada valor do preço corrente S_T, em uma data T, considerando como preço de exercício K.

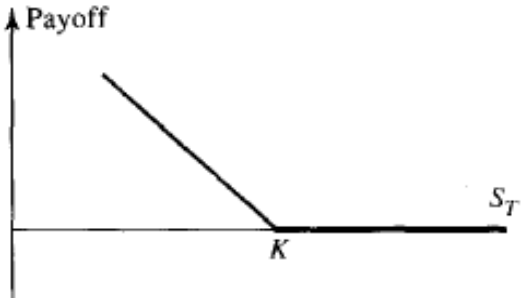

Figura 6 - Perfil de *Payoffs* da PUT

Qualquer desinvestimento parcial ou total que a empresa decida realizar (contração ou abandono) pode ser representado por uma opção de venda, dado que tal desinvestimento está associado ao recebimento de determinado valor (valor recebido na venda) em troca do desfazimento de parte ou todo o projeto (valor de parte ou todo o projeto). Neste caso, a empresa irá vender parte ou todo o projeto, se o preço recebido for maior que o valor da parcela do projeto vendida. Caso contrário, a empresa permanecerá com parte ou todo o projeto.

A garantia governamental de receita mínima com *CAP*, objeto de estudo do presente trabalho, tem como característica uma PUT, dado que a iniciativa privada tem o direito de exercer a opção quando a receita realizada ficar abaixo da receita mínima garantida pelo governo. Neste caso, o governo paga ao projeto um *payoff* dado pela diferença entre a receita mínima e a receita realizada.

As opções reais com características do tipo PUT são exercidas nos estados da natureza onde o projeto possui valores reduzidos, ou seja, onde o valor do projeto é menor do que o valor a ser recebido. Note que este tipo de opção reduz o risco do projeto, na medida em que age como um seguro para o detentor do direito.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0612004/CA

2.6.4.
Propriedades das opções

De acordo com Hull (1998), as variáveis consideradas determinantes para avaliar uma opção são as seguintes:

- preço corrente do ativo objeto;
- preço de exercício;
- tempo para o vencimento;
- volatilidade;
- taxa livre de risco; e
- dividendos.

A Tabela 2 a seguir, extraída de Hull (1998), apresenta um quadro resumo de como os preços das opções são afetados por suas variáveis relevantes:

	Call Européia	Put Européia	Call Americana	Put Americana
Preço corrente do ativo objeto	+	-	+	-
Preço de exercício	-	+	-	+
tempo para o vencimento	?	?	+	+
Volatilidade	+	+	+	+
taxa livre de risco	+	-	+	-
Dividendos	-	+	-	+

+ indica que um aumento na variável causa um aumento no valor da opção
- indica que um aumento na variável causa uma redução no valor da opção
? indica que o relacionamento entre a variável e o valor da opção é incerto

Tabela 2 - Características das Opções em relação às variáveis-chave

Observa-se que no caso da opção utilizada no presente trabalho, qual seja, uma PUT européia, o preço é afetado (i) positivamente em relação ao preço de exercício, à volatilidade e aos dividendos; (ii) negativamente em relação ao preço corrente do ativo objeto e à taxa livre de risco; e (iii) de forma indefinida em relação ao prazo de vencimento da opção.

De acordo com Trigeorgis (1996), as variáveis determinantes para avaliar uma opção, conforme apresentadas, poderão ser interpretadas da seguinte forma quando aplicadas na avaliação de opções reais:

- preço corrente do ativo objeto → valor presente estocástico do projeto;
- preço de exercício → valor presente do inv./desinvestimento no projeto (I);
- tempo para o vencimento → prazo de vencimento da opção real do projeto (T);
- volatilidade do retorno da ação → volatilidade do fluxo de caixa do projeto (σ);
- taxa de juros livre de risco (r); e
- dividendos da ação → taxa de distribuição dos fluxos de caixa do projeto (δ).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0612004/CA

2.7.
Fórmula analítica para determinar o valor esperado do projeto: Abordagem tradicional *X* Abordagem utilizada em opções reais

2.7.1.
Introdução

Para determinar a expressão analítica que melhor represente o valor esperado do projeto para aplicação da metodologia proposta pelo presente trabalho, cabe uma discussão preliminar para se entender as diferenças conceituais existentes entre a abordagem tradicional de avaliação e a abordagem utilizada em opções reais de acordo com Samis et al. (2006).

Conforme visto nas seções anteriores, qualquer que seja a abordagem utilizada para avaliar um projeto devem-se ter basicamente os seguintes elementos: (i) fluxos de caixa; (ii) taxa de desconto; (iii) período e periodicidade da projeção; e (iv) investimento inicial. Entretanto, a diferenciação entre as referidas abordagens encontra-se na aplicação da taxa de desconto para calcular o valor do projeto.

Pode-se considerar que o prêmio de risco embutido na taxa de desconto deve expressar os riscos a que o projeto pode estar exposto em não alcançar o resultado esperado. Estes riscos estão associados à incerteza das variáveis que compõem o projeto e que são responsáveis, de certa forma, pela intensidade do prêmio de risco utilizado para calcular o valor do projeto. Como fontes de incerteza, estas variáveis deveriam responder ou serem “penalizadas” na mesma proporção que provoquem o aumento de risco de um projeto. Isso significa que cada variável que compõe o fluxo de caixa deveria responder pelo risco causado no projeto, refletido por um aumento na volatilidade dos fluxos de caixa.

Contrariamente ao argumento acima, quando se avalia um projeto utilizando a abordagem tradicional aplica-se uma taxa de desconto, que representa o custo médio ponderado de capital do projeto, sobre todos os elementos do fluxo de caixa, ou seja, “penaliza” todos os componentes de um fluxo de caixa com o mesmo rigor, desconsiderando as contribuições relativas, dadas pelo prêmio de risco de cada variável, nos riscos dos fluxos de caixa do projeto. Por se tratar de uma taxa de desconto média, o resultado disso, é “penalizar” excessivamente algumas variáveis que contribuem muito pouco com o risco do projeto e insuficientemente outras variáveis que contribuem significativamente com o risco do projeto.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0612004/CA

Por outro lado, a abordagem utilizada em opções reais, conforme Samis et al. (2006), divide o processo de desconto dos fluxos de caixa, para determinação do valor do projeto, em duas etapas, levando em conta, duas fontes de ajustes:

- fator de desconto do risco, dado pelo prêmio de risco da variável: $e^{-\lambda.\sigma.\tau}$.
- fator de desconto referente ao tempo, dado pela taxa livre de risco: $e^{-r.\tau}$.

Dessa forma, caso uma variável seja determinística, não existe ajuste de risco a fazer, pois não existe incerteza associada a esta variável, podendo ser utilizada, neste caso, somente a parcela do fator de desconto referente ao tempo, representada pela taxa livre de risco. Isso se deve ao fato de que uma variável determinística por não ser causadora direta de riscos em um projeto deveria ser considerada livre de risco e dessa forma ter como taxa de desconto somente a taxa livre de risco.

Por sua vez, se a variável for estocástica, deve-se, primeiramente, fazer o ajuste ao risco, utilizando a parcela do fator de desconto referente ao prêmio de risco da variável, e em seguida aplica-se a parcela de desconto referente ao tempo, dado pela taxa livre de risco. Assim, uma variável que seja estocástica deveria ser descontada por uma taxa de desconto que tenha embutida o risco associado a esta variável e o tempo ($\lambda\sigma + r$).

Desse modo, a contribuição de risco de cada elemento que compõe o fluxo de caixa estaria sendo considerada de forma adequada. Dessa forma, a aplicação do fator de desconto nos fluxos de caixa do projeto deve ser decomposta de tal forma que o processo de desconto reflita adequadamente o risco que cada variável contribui no projeto Samis et al. (2006). Esta abordagem esta de acordo com o que é utilizada pela teoria de opções reais Dias (2010).

As seções seguintes apresentam, a título de exemplo, a forma de aplicação do desconto dos fluxos de caixa para cada uma das abordagens apresentadas, considerando um modelo de fluxo de caixa (*FC*), com uma variável estocástica ($Z_{t,w}$) e uma determinística ($\overline{Y}_t$), dado por $FC_{t,w} = Z_{t,w} - \overline{Y}_t$, onde t ε [0 , T] e w ε [0 , m].

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0612004/CA

2.7.2.
Abordagem tradicional

De acordo com o que foi exposto anteriormente, pode-se considerar que o fator de desconto utilizado pela abordagem tradicional, para avaliar o valor do projeto, parte da taxa de desconto ajustada ao risco, dada por $\mu = r + \lambda\sigma$, aplicada diretamente nos fluxos de caixa do projeto, conforme a seguir:

$$V_\tau = \int_{t=\tau}^{T} E_t^P \left(FC_{t,w} \mid Z_\tau, Y_\tau \right).e^{-\mu(t-\tau)}.dt = \int_{t=\tau}^{T} E_t^P \left(\left[Z_{t,w} - \overline{Y}_t \right] \mid Z_\tau, Y_\tau \right).e^{-\mu(t-\tau)}.dt$$

$$V_\tau = \int_{t=\tau}^{T} \left(E_t^P \left(Z_{t,w} \mid Z_\tau \right).e^{-\lambda\sigma.(t-\tau)} - E_t^P \left(\overline{Y}_t \mid Y_\tau \right).e^{-\lambda\sigma.(t-\tau)} \right).e^{-r.(t-\tau)}.dt$$

$$V_\tau = \int_{t=\tau}^{T} E_t^P \left(Z_{t,w} \mid Z_\tau \right).e^{-\lambda\sigma.(t-\tau)}.e^{-r.(t-\tau)}.dt - \int_{t=\tau}^{T} \overline{Y}_t.e^{-\lambda\sigma.(t-\tau)}.e^{-r.(t-\tau)}.dt \qquad (2.25)$$

Note na eq. (2.25) que a parcela referente ao risco gerado pelo fator de risco *Z* está sendo aplicada na variável determinística *Y*, ou seja, uma variável que não contribui diretamente com o risco está sendo penalizada diretamente por uma parcela de risco que não cabe a ela, estando neste caso, aplicando indevidamente a taxa de desconto.

Dessa forma, no caso do exemplo, estará superavaliando o projeto na medida em que estará reduzindo o valor de uma variável que não deveria ser penalizada pelo risco associado a uma outra variável que contribui efetivamente com o risco do projeto. Assim, a variável determinística tem característica de certeza e, neste caso, não deveria ser penalizada por tal risco.

A abordagem de avaliação utilizada por Opções Reais não comete este equívoco, já que aplica o fator de desconto de forma decomposta, conforme apresentado na próxima seção.

2.7.3.
Abordagem utilizada em opções reais

De acordo com Samis et al. (2006), na abordagem utilizada em opções reais, a avaliação é feita partindo do processo estocástico de cada fator de risco, que já tem embutido os fatores de tempo e risco. Dessa forma, é possível avaliar um projeto considerando a parcela de risco que cabe a cada variável que compõe o fluxo de caixa do projeto.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0612004/CA

Esta abordagem deve realizar o desconto de cada fluxo de caixa considerando duas etapas distintas. Na primeira etapa desconta-se o valor esperado de cada fator de risco pelo seu prêmio de risco, que representa a contribuição de incerteza que cada fator de risco insere no fluxo de caixa avaliado. Na segunda etapa desconta-se todo o fluxo de caixa pela taxa que representa a simples passagem do tempo, dada pela taxa livre de risco.

Esta decomposição pode ser visualizada pela relação a seguir

$$\mu = \lambda.\sigma + r \rightarrow e^{-\mu.(t-\tau)} = e^{-\lambda.\sigma.(t-\tau)}.e^{-r.(t-\tau)} \quad \text{(2.26)}$$

(parcela 1) (parcela 2)

Onde a parcela 1 é o prêmio de risco e a parcela 2 é a taxa livre de risco.

Para o cálculo do valor do projeto utilizando a abordagem por Opções Reais, conforme exposto anteriormente, deve-se, primeiramente, decompor o fluxo de caixa em suas variáveis, determinísticas e estocásticas, e em seguida aplicar a parcela do fator de desconto correspondente ao prêmio pelo risco de cada variável estocástica, dada pela parcela 1 da eq. (2.26). A segunda etapa é aplicar o fator de desconto correspondente ao tempo em todo o fluxo de caixa e, neste caso, utiliza-se como taxa de desconto, a taxa livre de risco, dada pela parcela 2 da eq. (2.26). Dessa forma, o valor esperado do projeto poderá ser determinado a partir da seguinte expressão:

$$V_\tau = \int_{t=\tau}^{T} E_\tau^P\left(FC_{t,w} \mid Z_\tau, Y_\tau\right).dt = \int_{t=\tau}^{T} E_\tau^P\left(\left[Z_{t,w} - \overline{Y}_t\right] \mid Z_\tau, Y_\tau\right).dt$$

$$V_\tau = \int_{t=\tau}^{T}\left(E_t^P(Z_{t,w} \mid Z_\tau).e^{-\lambda\sigma.(t-\tau)} - E_t^P(\overline{Y}_t \mid Y_\tau).e^{-0.(t-\tau)}\right).dt$$

aplicação do fator de desconto referente ao risco

$$V_\tau = \int_{t=\tau}^{T}\left(E_t^P(Z_{t,w} \mid Z_\tau).e^{-\lambda\sigma.(t-\tau)} - \overline{Y}_t\right).e^{-r.(t-\tau)}.dt$$

aplicação do fator de desconto referente ao tempo

$$V_\tau = \int_{t=\tau}^{T} E_t^P(Z_{t,w} \mid Z_\tau).e^{-\lambda\sigma.(t-\tau)}.e^{-r.(t-\tau)}.dt - \int_{t=\tau}^{T} \overline{Y}_t.e^{-r.(t-\tau)}.dt \quad \text{(2.27)}$$

Na eq. (2.27), observe que somente a variável aleatória *Z*, que contribui com o risco, sofreu a penalização referente ao risco, enquanto, que ambas, *Z* e *Y*, foram penalizadas pela simples passagem do tempo, por meio da aplicação do fator de desconto referente ao tempo, composto pela taxa livre de risco. Note que a expressão $E_t^P(Z_{t,w} \mid Z_\tau).e^{-\lambda\sigma.(t-\tau)}$ representa o Equivalente Certo do valor esperado da variável aleatória Z em t, conforme apresentado na seção 2.2, já

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0612004/CA

que exclui do valor esperado a parcela de risco, restando, dessa forma, somente a parcela determinística. Com isso podemos descontar esse valor esperado pela taxa livre risco para encontrarmos o mesmo resultado caso a abordagem real fosse aplicada, qual seja, utilizando o valor esperado da variável com risco descontado pela taxa de desconto com risco.

De outro modo, podemos afirmar que $E_t^P(Z_{t,w} \mid Z_\tau).e^{-\lambda\sigma.(t-\tau)}$ representa o valor esperado da variável aleatória Z sob uma medida de probabilidade neutra ao risco Q, de tal forma que podemos encontrar seu valor esperado em t utilizando um processo neutro ao risco e seu valor esperado na data zero utilizando como taxa de desconto a taxa livre de risco.

Observe que a partir do desenvolvimento sugerido pela abordagem utilizada em Opções Reais encontra-se naturalmente um valor esperado na data zero de acordo com os preceitos de uma avaliação neutra ao risco, qual seja, valor esperado neutro ao risco, sob a medida de probabilidade Q, descontado pela taxa de desconto livre de risco (r) equivalente ao valor esperado real, sob a medida de probabilidade real P, descontado pela taxa de desconto ajustada ao risco (μ). Assim, a eq. (2.27) pode ser substituída de tal forma que o valor do projeto seja representado por:

$$V_\tau = \int_{t=\tau}^{T} \left(E_t^Q(Z_{t,w} \mid Z_\tau) - \overline{Y}_\tau \right).e^{-r.(t-\tau)}.dt \qquad (2.28)$$

Conforme visto anteriormente, será conveniente para a avaliação de uma opção, a utilização de uma abordagem neutra ao risco, já que o exercício de opções diversas ao longo do tempo nos remete a taxas de desconto também diferentes. Isso torna a tarefa de avaliar as taxas de desconto muito difícil, daí advindo toda a dificuldade de se trabalhar com a abordagem real, e da necessidade de se trabalhar com a abordagem neutra ao risco quando da avaliação de uma opção.

A título de exemplo, considere que *Z* segue um processo estocástico real do tipo MGB, da seguinte forma: $dZ = \alpha.Z.dt + \sigma.Z.dz$, sendo *dz* o incremento do Processo de *Wiener* dado por $dz = \varepsilon_t.\sqrt{dt}$ e $\varepsilon_t \sim N(0,1)$. O processo estocástico neutro ao risco de Z seria dado por $dZ = (r-\delta).Z.dt + \sigma.Z.dz$. O valor esperado de Z, sob uma medida de probabilidade neutra ao risco Q, em t, será dado por

$$E^Q\left(Z_{t,w} \mid Z_\tau\right) = Z_\tau.e^{(r-\delta).(t-\tau)} \qquad (2.29)$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0612004/CA

Substituindo a eq. (2.29) na eq. (2.28), chega-se a:

$$V_\tau = \int_{t=\tau}^{T} Z_\tau .e^{-\delta.(t-\tau)}.dt - \int_{t=\tau}^{T} Y_\tau .e^{-r.(t-\tau)}.dt = \frac{Z_\tau.(1-e^{-\delta.(t-\tau)})}{\delta} - \frac{Y_\tau.(1-e^{-r.(t-\tau)})}{r}$$

Quando tratar de fluxos de caixa perpétuos, teremos t → infinito e, neste caso, o valor do projeto será dado por:

$$V_\tau = \frac{Z_\tau}{\delta} - \frac{Y_\tau}{r} \qquad (2.30)$$

A eq. (2.30) pode ser encontrada na maioria dos textos de opções reais, que representa o valor do projeto sem opções reais embutidas (Dias, 2010). Note que, por se tratar de um processo de Markov, a única informação relevante utilizada para avaliar o projeto é aquela que esta disponível no momento da avaliação, ou seja, a informação de preços no instante τ. Este resultado vai de encontro com a hipótese de Eficiência Fraca do Mercado, onde os preços passados já estão incorporados nos valores dos ativos e não podem ser utilizados para ganhos acima do mercado.

A Figura 7, conforme Samis et al. (2006), apresenta o processo de avaliação de um projeto de investimento considerando a abordagem tradicional e a abordagem utilizada em opções reais, conforme apresentadas anteriormente.

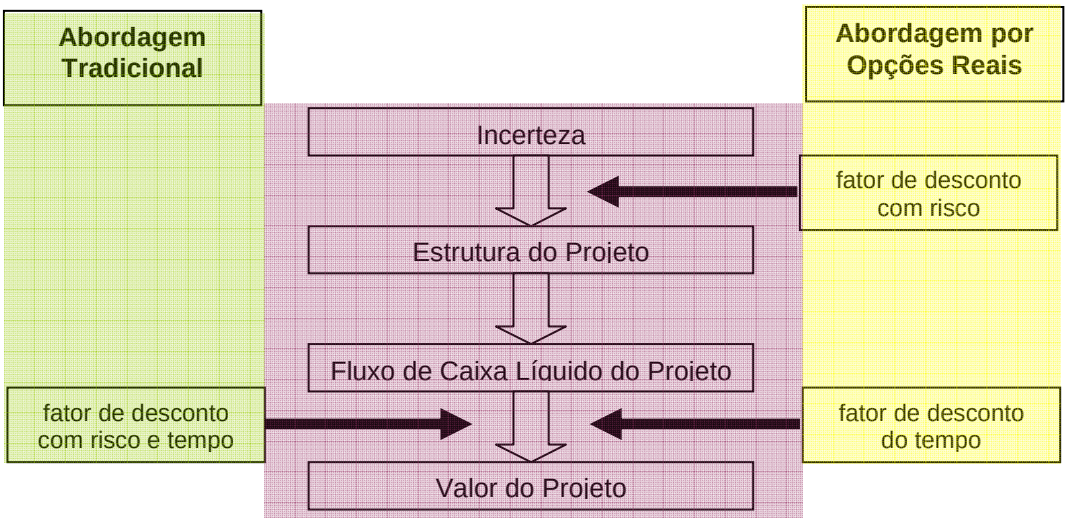

Figura 7 - Abordagem de Avaliação Tradicional e por Opções Reais

O presente trabalho utiliza o modelo de avaliação da abordagem proposta pela Teoria de Opções Reais, por sugerir maior coerência com o processo de avaliação de ativos sob incerteza, em que as diversas variáveis do modelo apresentam contribuições de risco diferentes.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0612004/CA

2.7.4.
Equivalência entre os processos estocásticos neutro ao risco e real

O processo de avaliação apresentado nas seções anteriores parte dos processos estocásticos dos fatores de risco do projeto para calcular seu Valor Esperado e VPL, podendo ser realizados de forma real ou neutro ao risco.

A avaliação do VPL do projeto que parte do processo estocástico real dos fatores de risco utiliza como parâmetro a taxa de crescimento esperado (α), que expressa a preferência de risco do investidor que está avaliando o projeto, e para descontar os fluxos de caixa, com a finalidade de determinar o valor do projeto, usa a taxa com risco μ.

Por outro lado, a avaliação do VPL do projeto que parte do processo estocástico neutro ao risco utiliza como parâmetro a taxa de crescimento neutro ao risco ($r - \delta$), que não considera a preferência de risco do investidor, e para descontar os fluxos de caixa, com a finalidade de determinar o valor do projeto, usa a taxa livre de risco r.

A avaliação da garantia de receita mínima com *CAP* utiliza como ferramenta de precificação a Teoria de Opções Reais. Por se tratar de um derivativo sua avaliação requer alguns artifícios de forma que se possa simplificar e até viabilizar sua precificação.

Considerando que uma opção real altera o perfil de risco de um projeto e, consequentemente, a sua taxa de desconto, torna-se muito difícil determinar as taxas de desconto a serem utilizadas, para precificar a opção real, em cada estado da natureza em que ela foi exercida. Esta é a principal dificuldade para se precificar uma opção real utilizando o processo estocástico real dos fatores de risco. Um artifício geralmente utilizado para simplificar o processo de precificação é a possibilidade de utilizar como taxa de desconto a taxa livre de risco e, para tanto, deve-se partir do processo estocástico neutro ao risco dos fatores de risco do projeto.

É possível demonstrar que o valor presente esperado e a distribuição de probabilidade do VPL do projeto são equivalentes, qualquer que seja o processo estocástico dos fatores de risco do projeto utilizado para realizar a avaliação (real ou neutro ao risco). Dessa forma, considere um projeto com um fluxo de caixa (*FC*) composto de uma variável estocástica (X) e uma determinística (Y) definida por:

$$FC_{t,w} = X_{t,w} - Y_t \qquad (2.31)$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0612004/CA

Considere, ainda, que o processo estocástico seguido pelo fator de risco X seja um MGB e que suas variações sejam expressas da seguinte forma, considerando que o processo seja neutro ao risco e real, respectivamente,

$$dX = (r - \delta).X.dt + \sigma.X.dz \quad (2.32)$$

e

$$dX = \alpha.X.dt + \sigma.X.dz \quad (2.33)$$

A realização da simulação do fator de risco X do projeto para cada um dos processos estocásticos representados pelas equações (2.32) e (2.33) acima deverá ser feita, respectivamente, de acordo com as seguintes expressões:

$$X_{t,\omega}^{nr} = X_{\tau,\omega}^{nr}.e^{[(r-\delta-0,5.\sigma^2).(t-\tau)+\sigma.\sqrt{(t-\tau)}.dz]} \quad (2.34)$$

e

$$X_{t,\omega}^{real} = X_{\tau,\omega}^{real}.e^{[(\alpha-0,5.\sigma^2).(t-\tau)+\sigma.\sqrt{(t-\tau)}.dz]} \quad (2.35)$$

Comparando as equações (2.34) e (2.35), observa-se que existe um diferencial de valor do fator de risco X do projeto, quando a realização é feita a partir de um processo estocástico neutro ao risco e real, podendo afirmar que $X_{t,\omega}^{nr} < X_{\tau,\omega}^{real}$, considerando que ($\mu$ > r). Esta característica faz com que a distribuição de probabilidade do fator de risco que foi realizado a partir do processo estocástico neutro ao risco seja mais deslocada para a esquerda quando comparada com a do processo estocástico real. Dessa forma, as probabilidades calculadas para o valor do fator de risco do projeto a partir do processo estocástico neutro ao risco não representam necessariamente as probabilidades reais e sua utilização para fins de avaliação de risco pode levar a resultados completamente diferentes da realidade.

Contudo, como será demonstrado a seguir, quando se determina o valor presente de um projeto ou de sua opção, seja utilizando o processo estocástico neutro ao risco ou seja o real, ocorre um ajuste por meio da taxa de desconto que leva os resultados ao mesmo valor, já que foram modelados para serem equivalentes. De forma análoga, os valores presentes do projeto e de sua opção, obtidos a partir da simulação de Monte Carlo, utilizando tanto o processo estocástico neutro ao risco quanto o real, também serão iguais. Portanto, as distribuições de probabilidade de ambos serão as mesmas, sendo factível realizar avaliação de risco do governo e do agente privado, respectivamente, por meio da distribuição de probabilidade da opção real e da distribuição de probabilidade do VPL do projeto com garantia, ambas, utilizando o processo

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0612004/CA

estocástico neutro ao risco do fator de risco do projeto e a taxa de desconto livre de risco.

Partindo da estrutura do fluxo de caixa definida pela eq. (2.31) e considerando que o processo estocástico do fator de risco do projeto foi realizado de forma neutra ao risco e real, o valor esperado do projeto pode ser expresso, respectivamente, da seguinte forma:

$$V_\tau = \int_{t=\tau}^{T} \left(E_t^Q(X_{t,w} \mid X_\tau) - \overline{Y}_\tau \right).e^{-r.(t-\tau)}.dt \tag{2.36}$$

e

$$V_\tau = \int_{t=\tau}^{T} \left(E_t^P(X_{t,w} \mid X_\tau).e^{-\lambda.\sigma.(t-\tau)} - \overline{Y}_\tau \right).e^{-r.(t-\tau)}.dt \tag{2.37}$$

Sendo Q a medida de probabilidade neutra ao risco e equivalente a medida de probabilidade real P.

Dado que X segue um MGB podemos expressar seu valor esperado, considerando o processo estocástico do fator de risco do projeto neutro ao risco e real, respectivamente, como:

$$E_t^Q\left(X_{t,w} \mid X_\tau \right) = X_\tau.e^{(r-\delta).(t-\tau)} \tag{2.38}$$

e

$$E_t^P\left(X_{t,w} \mid X_\tau \right) = X_\tau.e^{\alpha.(t-\tau)} \tag{2.39}$$

Substituindo as equações (2.38) e (2.39) nas equações (2.36) e (2.37), respectivamente, pode-se encontrar o valor esperado do projeto quando X segue um MGB:

$$V_\tau = \int_{t=\tau}^{T} \left(X_\tau.e^{(r-\delta).(t-\tau)} - Y_\tau \right).e^{-r.(t-\tau)}.dt \tag{2.40}$$

$$V_\tau = \int_{t=\tau}^{T} \left(X_\tau.e^{\alpha.(t-\tau)}.e^{-\lambda.\sigma.(t-\tau)} - Y_\tau \right).e^{-r.(t-\tau)}.dt \tag{2.41}$$

Ao desenvolver as equações (2.40) e (2.41), ambas resultam na seguinte expressão:

$$V_\tau = \frac{X_\tau.\left(1 - e^{-\delta.(t-\tau)}\right)}{\delta} - \frac{Y_\tau.\left(1 - e^{-r.(t-\tau)}\right)}{r} \tag{2.42}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0612004/CA

A partir da eq. (2.42) é possível notar que o valor esperado do projeto, considerando tanto o processo estocástico do fator de risco do projeto neutro ao risco quanto o real, é absolutamente o mesmo, como já era de se esperar, pois o modelo foi estruturado considerando ambos equivalentes.

Da mesma forma, a distribuição de probabilidade do VPL do projeto definida a partir de um conjunto de valores do VPL, calculados de uma quantidade *m* de simulações do processo estocástico do fator de risco do projeto, pode ser obtida considerando que os referidos processos foram realizados de forma neutra ao risco e real, respectivamente, conforme a seguir:

$$V_{\tau,\omega} = \int_{t=\tau}^{T} \left(X_{\tau,\omega} . e^{\left[(r - \delta - 0{,}5.\sigma).(t-\tau) + \sigma.\sqrt{(t-\tau)}.dz \right]} - Y_{\tau} \right) e^{-r.(t-\tau)} .dt \qquad (2.43)$$

$$V_{\tau,\omega} = \int_{t=\tau}^{T} \left(X_{\tau,\omega} . e^{\left[(\alpha - 0{,}5.\sigma).(t-\tau) + \sigma\sqrt{(t-\tau)}.dz \right]} . e^{-\lambda.\sigma.(t-\tau)} - Y_{\tau} \right) e^{-r.(t-\tau)} .dt \qquad (2.44)$$

Onde $\omega \in [1, m]$, $t \in [\tau, T]$, $dz = \varepsilon_t . \sqrt{dt}$ e $\varepsilon_t \sim N(0,1)$

Ao desenvolver as equações (2.43) e (2.44), ambas resultam na seguinte expressão:

$$V_{\tau,\omega} = \int_{t=\tau}^{T} \left(X_{\tau,\omega} . e^{\left[(-\delta - 0{,}5.\sigma).(t-\tau) + \sigma.\sqrt{(t-\tau)}.dz \right]} - Y_{\tau} . e^{-r.(t-\tau)} \right) dt \qquad (2.45)$$

Desse modo, apesar do diferencial de valor da variável estocástica quando da realização do processo estocástico neutro ao risco e real, pode-se concluir a partir das equações (2.42) e (2.45) que, tanto o valor presente do projeto quanto a sua distribuição de probabilidade serão os mesmos, seja utilizando o processo neutro ao risco ou o processo real. Isto se deve ao fato de que o ajuste realizado pela taxa de desconto torna os valores presentes iguais, dada a equivalência da medida de probabilidade utilizada, conforme demonstrado acima e corroborado por Dias (2008).

Assim, no presente trabalho para fins de determinação do valor esperado da garantia e do projeto e da distribuição de probabilidade da garantia e do VPL com garantia será utilizado o processo estocástico dos fatores de risco do projeto neutro ao risco, na medida em que seus resultados são os mesmos dos encontrados quando se utiliza o processo estocástico real.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0612004/CA

2.8.
Medida de performance Omega

Na literatura financeira, é bem conhecido o fato de que os investidores sempre desejam obter o maior rendimento nos seus investimentos, procurando minimizar quanto for possível o risco envolvido.

Markowitz (1952) foi quem desenvolveu os fundamentos da teoria de carteira de ativos. De acordo com sua teoria, os investidores podem determinar todas as carteiras ótimas, a partir da fronteira eficiente. Esta define o melhor conjunto possível de carteiras no sentido da otimização de Média-Variância, ou seja, todas as carteiras que têm o mínimo nível de risco (variância) para cada nível de retorno (média). A Teoria de Markowitz trata o ativo como uma variável aleatória, sendo que os dois primeiros momentos da sua distribuição de probabilidade (média e variância) caracterizam completamente o perfil de retorno e risco do ativo. Esta teoria parte da pressuposição de que os retornos dos ativos da carteira seguem uma distribuição normal. Entretanto, isso nem sempre é verdadeiro, sobretudo, na avaliação de opções reais, que possuem comportamentos probabilísticos diversos.

Contudo, quando se quer analisar o risco a partir da distribuição de probabilidade da opção real, representativa da garantia dada pelo governo, a complexidade do problema de medir o risco é grande devido ao fato da distribuição de probabilidade da opção real diferir significativamente da distribuição de probabilidade do ativo objeto. Para contornar este problema, recentemente, foi apresentada por Keating & Shadwick (2002) a medida de performance Omega (Ω), que considera todos os momentos da distribuição ao avaliar o risco de um ativo, sendo mais consistente com as distribuições de probabilidade de retornos encontradas na prática, isto é, distribuições não normais. Destacam, assim, a importância de considerar os momentos de ordem superior na avaliação de um investimento.

Castro (2008) abordou a importância da utilização da medida de performance Omega e como aplicá-la na avaliação de investimento e de opções reais.

Para definir a função Omega (Ω), primeiramente deve-se definir exogenamente o retorno limite (L). Este divide a distribuição de probabilidades dos retornos em duas áreas: a área de ganhos e a área de perdas. Este limite varia por indivíduo e pelo tipo de investimento e quanto maior o seu valor maior é o apetite por risco. Da mesma forma, quanto maior a medida Omega mais preferível será o investimento, independente do Limite L requerido.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0612004/CA

Uma vez especificado o retorno limite L, pode-se comparar o valor esperado condicional de ganhos e perdas relativos a ele:

- O ganho esperado será dado para um retorno maior do que L, ou seja, é o valor esperado condicional dos retornos que excedem L, e será dado por $E(r - L \mid r \geq L)$; e

- A perda esperada será dada para um retorno menor do que L, ou seja, é o valor esperado condicional dos retornos que sejam menores do que L, e será expressa por $E(L - r \mid r < L)$.

Para comparar os ganhos e perdas potenciais, será necessário ponderá-los por suas probabilidades. Desse modo, se $Prob(r_i)$ é a probabilidade dos retornos, tem-se que a medida de Performance Omega será dada por:

$$\Omega(L) = \frac{\sum_{i=1}^{m} E(r_i - L \mid r \geq L).Prob(r_i)}{\sum_{i=1}^{m} E(L - r_i \mid r < L).Prob(r_i)}$$

Esta medida daria uma sinalização da qualidade do investimento. Alternativamente, podemos representar a Medida de Performance Omega, na forma contínua, da seguinte forma:

$$\Omega(L) = \frac{\int_L^b \left[1 - F(x)\right].dx}{\int_a^L F(x).dx} \qquad (2.46)$$

Onde F(x) = Função de Distribuição Cumulativa (FDC) dos ganhos “x”; e
L = nível mínimo requerido de ganho; a = retorno mínimo; e b = retorno máximo.

Conforme Castro (2008), a função $\Omega(L)$ permite comparar retornos de diferentes ativos e classificá-los em relação à magnitude dos seus Omegas. A classificação dependerá do intervalo de retornos considerado e incorporará todos os efeitos dos momentos de ordem superior.

A eq. (2.46), da função Omega $\Omega(L)$ na forma contínua, pode ser representada de forma alternativa, conforme Kazemi et al. (2003), como uma divisão de dois valores esperados:

- O numerador é o valor esperado do excesso de ganho (x-L) condicional a resultados positivos, chamado também de Expected Chance (EC).

- O denominador é o valor esperado da perda (L-x) condicional a resultados negativos, chamado também de Expected Shortfall (ES).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0612004/CA

Estas definições podem ser visualizadas na Figura 8 a seguir, extraída de Kazemi et al. (2003):

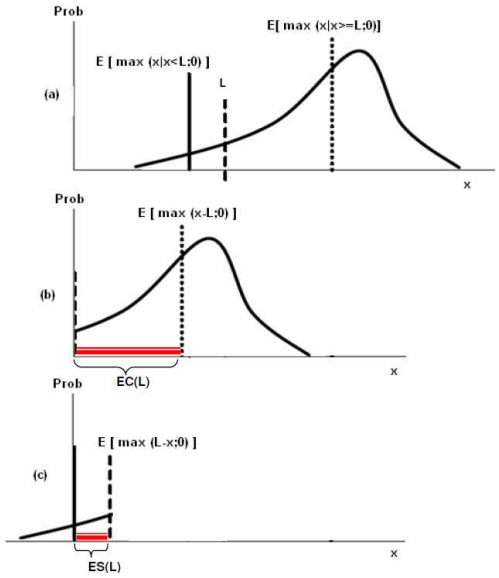

Figura 8 – Definição gráfica dos componentes da função Omega

A idéia básica dessa medida pode ser expressa pela seguinte expressão: "O que se espera ganhar caso se ganhe comparado com o que é esperado perder caso se perca". Dessa forma, a medida Omega poderá ser dada por:

$$\Omega(L) = \frac{\int_L^b [1 - F(x)]dx}{\int_a^L F(x)dx} = \frac{\int_L^b (x - L)f(x)dx}{\int_a^L (L - x)f(x)dx} = \frac{E[Max(x - L; 0)]}{E[Max(L - x; 0)]} = \frac{EC(L)}{ES(L)} \qquad (2.47)$$

A eq. (2.47) pode ser implementada mais facilmente, considerando que pode ser calculada a partir da divisão de uma CALL (numerador) por uma PUT (denominador), ambas, com preço de exercício dado pelo limite L.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0612004/CA