

## 2. Referencial Teórico

Este capítulo é dividido em quatro seções, a primeira seção traz uma revisão do modelo de Black e Scholes (1973) apresentando as fórmulas referentes ao mesmo e as principais premissas que o constituem. A segunda seção aborda a literatura relacionada ao entendimento de volatilidade implícita como um estimador eficiente da volatilidade realizada e os diversos métodos utilizados no cálculo da mesma. A terceira seção apresenta uma revisão dos estudos sobre o comportamento da volatilidade no tempo. Também chamada de estrutura a termo da volatilidade, ela procura avaliar o comportamento dos participantes do mercado diante das variações na volatilidade para opções de curto prazo diante de uma expectativa racional de apreçamento. A quarta seção revisa a literatura acerca do cone de volatilidade apresentando suas principais propriedades e os resultados da ferramenta na compra e venda de volatilidade.

### 2.1. Modelo de Black-Scholes

O grande desafio para os participantes do mercado de opções é saber se o preço de uma opção está alto ou baixo. Neste contexto, o artigo de Black e Scholes (1973) foi muito importante ao apresentar através de um modelo matemático uma forma de calcular o valor justo para o prêmio de uma opção europeia sem dividendos. De acordo com Black e Scholes (1973) o prêmio de uma opção de compra ou venda é função do preço do ativo-objeto, do preço de exercício, do tempo até o exercício, da taxa de juros livre de risco e da

volatilidade do ativo-objeto até o exercício e essa relação se dá através da seguinte fórmula:

$$c = SN(d_1) - Xe^{-rT} N(d_2) \quad (1)$$

$$d_1 = [\ln(S / X) + (r + s^2 / 2)T] / [svT] \quad (2)$$

$$d_2 = d_1 - svT \quad (3)$$

$$p = Xe^{-rT} N(-d_2) - SN(-d_1) \quad (4)$$

Onde:

c = preço justo da opção de compra segundo o modelo de Black-Scholes;

p = preço justo da opção de venda segundo o modelo de Black-Scholes;

S = preço do ativo-objeto da opção na data presente;

X = preço de exercício da opção;

T = período de tempo até a data de vencimento da opção;

r = taxa de juros livre de risco ao período;

s = volatilidade do ativo-objeto ao período;

N(d) = função de densidade acumulada da distribuição Normal padronizada.

No entanto este modelo é baseado em uma série de premissas, dentre as quais se podem destacar: (i) os retornos do ativo-objeto seguem uma distribuição normal, (ii) o preço do ativo-objeto segue um movimento geométrico browniano, (iii) a volatilidade do ativo-objeto é um valor conhecido e constante ao longo do tempo e (iv) a premissa de não distribuição de dividendos.

Merton (1973) e Amim (1993) relaxam a premissa de normalidade dos retornos do ativo-objeto. Neste trabalho os autores consideram que o retorno do

ativo-objeto segue um processo de saltos em conjunto com um processo de normalidade.

Hull e White (1987), Amin e Ng (1993) e Heston (1993) relaxam a premissa de volatilidade constante até o prazo de vencimento da opção. O comportamento da volatilidade é modelado por um processo estocástico independente do preço do ativo-objeto. Os resultados encontrados indicam que o modelo de Black e Scholes (1973) avalia opções no dinheiro e subestima o preço de opções dentro do dinheiro e fora do dinheiro.

Apesar da grande quantidade de modelos de apreçamento das opções, nenhum deles consegue explicar completamente as anomalias apresentadas pela volatilidade e diante disso o modelo de Black e Scholes (1973) ainda continua a ser a maior referência no apreçamento de opções talvez por sua simplicidade em relação aos demais modelos mais complexos que acabam apresentando grande defasagem de atualização.

## **2.2. Volatilidade implícita**

Os primeiros estudos sobre a informação contida na volatilidade implícita indicam que a mesma contém informações substanciais sobre a volatilidade futura. Latane e Rendleman (1976), Chiras e Manaster (1978) e Beckers (1981) analisaram amostras de ativos no Chicago Board Options Exchange (CBOE) e descobriram que a volatilidade implícita é melhor que o desvio padrão da série histórica como previsor da volatilidade futura. A principal premissa por trás desses estudos é a de que se o mercado é eficiente, a volatilidade implícita deve ser um excelente previsor da volatilidade futura e deve agrupar as informações

contidas em todas as outras variáveis e informações no mercado que explicam a volatilidade futura.

Estudos mais recentes procuram analisar o conteúdo de informação da volatilidade implícita em cenários mais dinâmicos. Esses estudos examinaram se a volatilidade implícita de uma opção prevê a volatilidade realizada durante o tempo até o exercício de uma opção. Os resultados encontrados nesta recente literatura foram bastante divergentes.

Day e Lewis (1992) e Lamoureux e Lastrapes (1993) estudam dados sobrepostos do índice de opções S&P 100 no período de 1985 a 1989 e opções que expiram de 1982 a 1984 respectivamente, concluem que a volatilidade histórica contém mais informações que explicam a volatilidade futura que volatilidade implícita. Canina e Figlewski (1993) investigam opções de compra do OEX de março de 1983 a março de 1987 e ressaltam que a volatilidade implícita não tem correlação com a volatilidade futura e não incorpora nenhuma informação sobre a volatilidade observada.

Em outra vertente de resultados, Fleming (1994) utiliza uma árvore binomial que incorpora os dividendos e exercícios antecipados para calcular a volatilidade implícita de opções OEX. O autor utiliza uma abordagem estatística para o tratamento dos dados sobrepostos e conclui que a volatilidade implícita é um estimador viesado, mas que a magnitude do viés não é significativa economicamente, além disso, ele acrescenta que a mesma é mais eficiente que a volatilidade histórica na previsão da volatilidade futura. Jorion (1995) analisa a volatilidade no mercado futuro de moedas e conclui que a volatilidade implícita é um previsor eficiente apesar de ser viesado. Christensen e Prabhala (1998) investigam a relação entre a volatilidade implícita e a volatilidade realizada para o

mercado de opções OEX, em sua metodologia os autores utilizaram dados não sobrepostos de novembro de 1983 até maio de 1995 e seus resultados indicaram a volatilidade implícita como um estimador não viesado e eficiente na previsão da volatilidade futura.

Diversas metodologias foram apresentadas para estimar a previsão da volatilidade implícita. Tripp (1977) e Schmalensee and Trippi (1978) apresentam a média ponderada da volatilidade implícita. O método é bastante simples e utiliza pesos iguais para todos os N valores de volatilidade implícita:

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i \quad (5)$$

No entanto existe uma preocupação em utilizar pesos iguais, uma vez que o modelo de Black e Scholes (1973) é mais acurado para algumas opções que outras. Por isso colocar mais peso nas observações em que o modelo performa melhor seria mais razoável. Ao defrontar com esse problema, os autores simplesmente descartam opções que estão próximas do exercício e distantes do “dinheiro”.

Além disso, algumas opções são mais sensíveis à volatilidade que outras. Por isso erros de estimação como aqueles induzidos pela falta de sincronia dos dados e pela singularidade do preço são provavelmente maiores para opções que os preços são insensíveis à volatilidade. Portanto colocar mais peso nas opções com maior vega, ou seja, mais sensíveis à volatilidade aparentam ser mais adequadas que o modelo de pesos iguais. Latane e Rendleman (1976) sugerem o modelo de ponderação por vega:

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N w_i} \sqrt{\sum_{i=1}^N w_i^2 \sigma_i^2} \quad (6)$$

no qual os pesos,  $w_i$ , são os vegas. No entanto devido ao fato do somatório dos vegas não ser igual 1, a metodologia é sujeita a críticas apesar de apresentar vantagens com a ponderação de acordo com a sensibilidade das opções.

Chiras e Manaster (1978) sugerem a ponderação pela elasticidade da volatilidade ao invés dos vegas:

$$\hat{\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^N \sigma_i \frac{\delta C_i}{\delta \sigma_i} \frac{\sigma_i}{C_i}}{\sum_{i=1}^N \frac{\delta C_i}{\delta \sigma_i} \frac{\sigma_i}{C_i}} \quad (7)$$

Beckers (1981) e Whaley (1982) sugerem um modelo de minimização dos erros quadrados:

$$\sum_{i=1}^N w_i [C_i - BS_i(\hat{\sigma})]^2 \quad (8)$$

Onde  $C_i$ , é o preço do mercado e BS, o preço da opção  $i$ . Os pesos,  $w_i$ , podem ser escolhidos de varias formas, como pesos iguais e pelos vegas. Beckers (1981) avalia a performance de três metodologias: a ponderação por vegas, a função dos erros quadrados e a utilização da volatilidade implícita da opção com maior vega. O resultado do estudo indica que a metodologia com do maior vega apresenta a melhor performance entre as três abordagens. Portanto o estimador da volatilidade implícita deve ser a volatilidade da opção com maior vega, ou seja, a opção mais “no dinheiro”.

$$\hat{\sigma} = \sigma_{ATM} \quad (9)$$

Gemmil (1986) avaliou seis metodologias diferentes: pesos iguais, pesos por elasticidade, mínimos quadrados do erro dos preços, opção mais dentro do dinheiro, opção mais fora do dinheiro e a mais no dinheiro. Os modelos foram aplicados sobre opções de 13 companhias no London Traded Options Market no período de maio de 1978 até julho de 1983. Os resultados encontrados, consistentes com Beckers (1981), indicam que o cálculo da volatilidade implícita com a opção mais no dinheiro apresentou o melhor desempenho.

### 2.3. Estrutura a termo da volatilidade

A estrutura a termo da volatilidade implícita caracteriza a relação entre a volatilidade implícita e o tempo. O comportamento da volatilidade implícita ao longo do tempo até exercício é conhecido como estrutura a termo da volatilidade e o comportamento através do preço de exercício é chamado de sorriso de volatilidade. (DUPIRE, 1994; RUBINSTEIN, 1994).

A estrutura a termo é útil no apreçamento de opções em que a volatilidade do ativo-objeto pode ser assumida como função do tempo. A literatura referente ao tema procura avaliar se a volatilidade implícita para opções com longo prazo até o exercício é consistente com a volatilidade futura estimada com base na volatilidade implícita da opção de curto prazo assumindo a hipótese de expectativa racional do mercado em que os participantes do mercado não reagem além do esperado com a chegada de novas informações.

Se as premissas definidas por Black e Scholes (1973) de que a volatilidade é conhecida e constante fossem reais, não haveria espaço dentro do mercado de opções para desvios na expectativa do mercado uma vez que o preço das mesmas seria completamente determinado pelo ativo-objeto. No entanto, na prática essas premissas não são verdadeiras e o que se percebe é que as opções apresentam certa independência em relação ao ativo-objeto. O mercado de opções acaba sendo um reflexo de um mercado de volatilidade abrindo espaço para avaliação da consistência da estrutura temporal da volatilidade com a expectativa racional do mercado.

Portanto, baseado na premissa de que a volatilidade implícita segue um processo estocástico de reversão à média, um incremento na volatilidade de uma opção de curto prazo deve ser acompanhada pela volatilidade de uma opção de longo prazo através de um movimento suave. Diante disso, uma variação da volatilidade no longo prazo com uma amplitude igual à variação apresentada por uma opção de curto prazo pode ser considerada como uma reação não esperada, representando um comportamento não racional dos participantes do mercado na medida em que os mesmos dão mais ênfase a inovações na volatilidade implícita para opções de curto prazo do que para os dados históricos que indicam que essa inovação não vai persistir.

Em um dos primeiros estudos sobre a estrutura a termo da volatilidade Porteba e Summers (1986) mostram que a volatilidade para uma opção de longo prazo não se move da mesma forma que a volatilidade de uma opção no curto prazo. Stein (1989) apresenta um modelo que deriva o relacionamento entre a volatilidade implícita de opções no dinheiro e o seu tempo até o exercício. Na metodologia utilizada, o autor testa a estrutura a termo da volatilidade implícita

utilizando o índice de opções S&P 100, considerando como opções de curto prazo aquelas com no máximo 30 dias até o exercício e opções de longo prazo entre 30 e 60 dias até o exercício e assumindo que volatilidade instantânea segue um processo contínuo de reversão à média AR (1). Os resultados do estudo indicam a existência de evidências de reação na mesma direção e acima do esperado em magnitude na estrutura a termo da volatilidade implícita, dado o nível de reversão à média na volatilidade.

Em seguida Diz e Finuance (1993) analisam também o índice de opções S&P 100 e ressaltam problemas no modelo de Stein (1989) relativos ao tratamento dos resíduos. Além disso, os autores apresentam um ajuste na modelagem de Stein (1989) ao incorporarem o método das diferenças e contrariando os resultados de Stein (1989) não obtêm evidências de reação fora do esperado nas variações entre a opção de longo prazo e curto prazo. Os autores também ressaltam que um modelo simplificado de reversão à média não consegue capturar adequadamente todas as propriedades da série temporal da volatilidade implícita.

Xu e Taylor (1994) descrevem os movimentos na estrutura a termo da volatilidade implícita de opções de moedas estrangeiras no Philadelphia Stock Exchange. Os autores examinam opções de peso e dólar, dólar e marco, dólar e yen e dólar e franco suíço e mostram que a inclinação da estrutura a termo muda frequentemente no período de 1985 até 1989. A metodologia utilizada pelos autores modela a estrutura a termo da volatilidade através de dois métodos: (i) regressão e (ii) filtro Kalman. Estes métodos assumem que as expectativas revertem monotonicamente de uma opção de curta duração para um nível de opções de longa duração à medida que as expectativas aumentam. Os resultados

do estudo indicam a existência de um efeito significativo de estrutura a termo, e que a estrutura a termo às vezes inclina para cima, às vezes inclina para baixo e sua direção muda em média a cada dois a três meses. Além disso, existem variações significativas na volatilidade de longo prazo, embora essas mudanças ocorram mais lentamente que na volatilidade de curto prazo e ainda indica a presença de elementos não estacionários na estrutura a termo na medida em que alguns dos parâmetros dos modelos auto-regressivos mudam durante o período investigado. Assim como Xu e Taylor (1994), Campa e Chang (1995) analisam a estrutura a termo de opções de moeda estrangeira e mostram que para todas as moedas e todos os prazos até o exercício a diferença entre a volatilidade de curto prazo e longo prazo indicam a direção das variações futuras no longo e curto prazo, mesmo para pequenos horizontes de tempo como um mês.

Heynen *et al.* (1994) testam a relação entre a volatilidade implícita no longo e curto prazo para o índice EOE e para ação da Philips através de três diferentes modelos para o comportamento da volatilidade, o modelo de GARCH de Bollerslev (1986), o modelo EGARCH de Nelson (1991) e a estrutura a termo para um modelo estocástico de reversão à média como utilizado em Stein (1989). Os autores mostram que a hipótese de que a volatilidade implícita é formada racionalmente é rejeitada para o modelo GARCH e reversão à média. No entanto para o modelo EGARCH a hipótese conjunta da especificação correta do modelo e a eficiência ex-ante não é rejeitada e para esse modelo a expectativa sobre a volatilidade média esperada pode ser considerada como formada racionalmente.

Utilizando um modelo de apreçamento de opção com volatilidade estocástica Buyon *et al.* (2002) derivam a medida da variância esperada através do intervalo entre as opções com diferentes preços de exercício baseado na relação

entre o modelo de volatilidade estocástica e os modelos de Black e Scholes (1973) e Garman e Kohlhagen (1983). Os autores não encontraram resultados que suportem a hipótese de expectativas de acordo com estrutura a termo e a variância no longo prazo aumenta de acordo com a variância no curto prazo.

Recentemente Dixit, *et al.* (2007) estudaram a ineficiência de precificação no mercado de opções indiano através do teste da hipótese de expectativa racional na estrutura a termo da volatilidade implícita do índice de opções. A metodologia utilizada busca responder se a volatilidade implícita, tanto para opções de curta duração quanto longa duração, segue um processo de reversão à média e se para opções de longa duração a volatilidade implícita é consistente com a volatilidade futura estimada a partir da volatilidade implícita correspondente às opções de curta duração. Para testar se a volatilidade implícita segue um processo de reversão à média os autores testaram se a série temporal é um processo estacionário, ou seja, a média, a variância e autocovariância para diferentes defasagens permanecem iguais, independente do ponto de tempo de análise. Para isso são utilizadas duas técnicas: (i) o correlograma e (ii) o teste da raiz unitária.

O correlograma é uma ferramenta gráfica onde são plotados os coeficientes de autocorrelação contra suas respectivas defasagens, portanto para um correlograma  $ACF_k$ , que especifica a autocorrelação com uma defasagem  $k$ , não é nada mais do que a correlação entre  $Y_t$  e  $Y_{t-k}$ , onde  $Y$  é a série temporal analisada e com base no padrão do ACF pode se decidir se a série é estacionária ou não.

O teste da raiz unitária procura identificar se a serie temporal contém ou não uma raiz unitária. Os resultados encontrados revelam que a volatilidade implícita estimada tanto para opções de curta duração como longa duração

seguem um processo de reversão à média. A hipótese de expectativa racional da volatilidade implícita é testada através da comparação entre o coeficiente de elasticidade empírico e coeficiente de elasticidade teórico e o resultado obtido apresenta violações na hipótese de racionalidade esperada na estrutura a termo da volatilidade implícita.

#### **2.4. Cone de volatilidade**

Burghardt e Lane (1990) analisam a variação da distribuição da volatilidade histórica em relação ao tempo até o exercício. Os modelos de cálculo da volatilidade mais tradicionais baseados na volatilidade histórica utilizam horizontes de tempo fixos para determinação do valor da mesma e com isso não consideram se o tempo até o exercício da opção em que se quer calcular a volatilidade é de um, dois ou três meses. Diante disso a comparação da volatilidade implícita com a volatilidade histórica parece inapropriada, uma vez que os horizontes de tempo utilizados no cálculo de cada uma são diferentes.

A comparação da volatilidade com a distribuição da volatilidade histórica para um horizonte de tempo igual ao da volatilidade implícita pode ser um indicador eficiente do comportamento futuro da volatilidade. Vender uma volatilidade implícita para um mês a 15% pode parecer uma boa idéia se tivermos uma previsão de 12%. Mas pode não parecer uma idéia tão boa se a volatilidade realizada de um mês tiver apresentado um intervalo de 11% a 35%. Não é apenas a previsão necessária, mas o entendimento da previsão dentro do contexto de intervalo de volatilidade. Uma maneira simples de fazer isso é através da distribuição da volatilidade em relação ao tempo até o exercício, também chamada de cone de volatilidade.

Para cada horizonte de tempo até o exercício são calculadas as variações dos retornos do ativo-objeto e, a partir desta base, são calculados os desvios padrões para uma faixa de dados do tamanho do tempo até o exercício definido e através de incrementos de defasagem diários, semanais, mensais ou anuais são construídos os valores que compõem a distribuição da volatilidade histórica para o horizonte de tempo definido. Esse mesmo método é aplicado para diversos valores de horizonte de tempo até o exercício e com isso se obtém uma distribuição da volatilidade histórica para cada faixa de tempo.

A representação gráfica das estatísticas com o valor da volatilidade no eixo das coordenadas e o tempo até o exercício nas abscissas mostra que a volatilidade para opções de curto prazo apresenta uma amplitude maior do que para opções de longo prazo, Figlewski (1997). Em virtude desta característica, denomina-se essa figura de cone de volatilidade devido ao seu formato cônico com maior amplitude para horizonte de tempo pequeno e seu estreitamento à medida que tempo até o exercício aumenta.

Em seu artigo Burghardt e Lane (1990) utilizam dados sobrepostos de 1986 a 1988 para Yen Japonês para formar os cones de volatilidade. Os autores verificam empiricamente que a volatilidade histórica no curto prazo tem uma maior amplitude que a volatilidade no longo prazo e avaliam a eficiência do modelo através de duas hipóteses: (i) a volatilidade implícita deve ser um previsor sem viés da subsequente volatilidade realizada, ou seja, se o mercado é eficiente e todas as informações relevantes estão contidas na volatilidade implícita, a distribuição condicional da volatilidade realizada subsequente é centralizada na volatilidade implícita e (ii) a posição da volatilidade implícita em relação ao cone

de volatilidade histórica não deve trazer nenhuma informação sobre a distribuição da volatilidade realizada.

A metodologia utilizada para testar a eficiência do mercado seguiu as seguintes etapas:

- Identificar todas as vezes que a volatilidade implícita era negociada acima do último decil ou abaixo do primeiro decil do cone de volatilidade no período referente ao tempo de exercício.
- Calcular para opções com 3 a 6 meses do exercício a volatilidade realizada a partir da data identificada acima até o exercício.
- Verificar a diferença entre a volatilidade resultante e a volatilidade implícita da opção.

Os resultados obtidos indicam que para os dias em que a volatilidade implícita estava acima do decil no cone de volatilidade, a previsão da volatilidade implícita da volatilidade realizada foi sistematicamente maior, com uma diferença média de 2,93%. Ao mesmo tempo quando a volatilidade estava abaixo do primeiro decil no cone de volatilidade, a volatilidade implícita mostrou-se viesada para baixo, pois a diferença média apresentada foi de 1,71%. Portanto os resultados mostram que o mercado não é inteiramente eficiente quando a volatilidade implícita é operada em valores muito altos ou muito baixos para opções de longo prazo e o cone de volatilidade pode prover informações se a opção está com preço alto ou baixo.

Em extensão ao trabalho de Burghardt e Lane (1990) Hodges e Tompkins (2002) descrevem como o cone de volatilidade provê informação sobre as propriedades amostrais da volatilidade para diferentes horizontes. O estudo

apresenta um modelo para correção do viés gerado pelo uso de dados sobrepostos através da generalização do processo estocástico do ativo objeto.

Os ajustes de viés foram testados através da simulação onde os preços do ativo objeto foram estimados utilizando quatro modelos alternativos: (i) o movimento geométrico browniano, (ii) distribuição condicional Student-t, (iii) processo de salto e (iv) distribuição condicional Gaussian. Para os quatro modelos foram gerados cem anos de dados em que foram estimadas as propriedades amostrais do cone de volatilidade. As amostras são então segmentadas em vinte amostras de cinco anos cada e os valores de volatilidade são determinados para dados sobrepostos. O desvio padrão médio da volatilidade das 20 amostras é comparado com o desvio padrão verdadeiro determinado com a amostra inteira dos 100 anos. Finalmente, o fator de ajuste derivado previamente é multiplicado pelo desvio padrão médio da volatilidade para avaliar-se o viés foi corrigido. O estudo propõe então que a variância calculada a partir de uma série de dados sobrepostos precisa ser multiplicada pelo seguinte fator de ajuste:

$$m = \frac{1}{1 - \frac{h}{n} + \frac{h^2 - 1}{3n^2}} \quad (10)$$

Onde  $h$  é o comprimento de cada intervalo de tempo, por exemplo, 20 dias e  $n = (T - h) + 1$  é o número de intervalo de tempo distintas disponíveis para um total de T observações.

Os autores ainda ressaltam que a comparação entre os modelos e série empírica do S&P 500 de 1985 a 2000 o coeficiente de variação foi utilizado por ser um método geral de comparação e que o modelo que utilizou o processo de

volatilidade estocástica capturou melhor a dinâmica observada pela série empírica do que os processos independentes e identicamente distribuídos como o movimento geométrico browniano e o processo de salto.