

2 Revisão Bibliográfica

Este capítulo apresenta os principais conceitos, abordagens e a formulação básica das metodologias que estão incluídas no modelo HPA. Conceitos matemáticos e estatísticos mais detalhados podem ser encontrados nas referências bibliográficas citadas.

2.1. Séries Temporais

Uma série temporal é uma coleção de observações de uma variável ordenadas no tempo (Souza e Camargo, 2004). Há, basicamente, dois enfoques usados na análise de séries temporais. Em ambos, o objetivo é construir modelos para as séries, com propósitos determinados. No primeiro enfoque, a análise é feita no domínio temporal e os modelos propostos são modelos paramétricos. No segundo, a análise é conduzida no domínio de frequências e os modelos propostos são modelos não-paramétricos.

Segundo Morettin (2006), a natureza de uma série temporal e a estrutura de seu mecanismo gerador estão relacionadas ao intervalo de ocorrência das observações no tempo. Caso o levantamento das observações da série possa ser feito a qualquer momento do tempo, a série temporal é dita contínua. Entretanto, na maioria das séries, as observações são tomadas em intervalos de tempo discretos e equidistantes.

Uma série temporal discreta pode ser representada por $Z(t_1), \dots, Z(t_n)$, sendo que cada observação está associada a um instante de tempo distinto, existindo uma relação de dependência serial entre essas observações.

O objetivo inicial da análise de séries temporais é a realização de inferências sobre as propriedades ou características básicas do mecanismo gerador das observações da série. Assim, através da abstração de regularidades contidas nos fenômenos observáveis de uma série temporal, pode-se construir um modelo matemático como uma representação simplificada da realidade.

Quando o enfoque é feito no domínio do tempo considera-se a evolução temporal do processo, ou seja, o interesse está na dimensão do evento em cada instante de tempo. Para este tipo de avaliação, são usadas as funções de autocovariância e autocorrelação.

A autocovariância de *lag* k é a covariância entre duas observações defasadas de k intervalos de tempo entre si e pode ser definida por:

$$\gamma_k = Cov [Z_t, Z_{t+k}] = E[(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu)] \quad (2.1)$$

onde μ é a média do processo.

A autocovariância de uma série temporal pode ser estimada por:

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (Z_t - \bar{Z})(Z_{t+k} - \bar{Z}) \quad (2.2)$$

sendo \bar{Z} a média de Z_t descrita por:

$$\bar{Z} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N Z_t \quad (2.3)$$

A autocorrelação é a autocovariância padronizada e tem a função de medir a extensão para o qual um valor tomado no instante t depende daquele tomado no instante $t-k$ (Casella, 2001).

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\text{Cov}[Z_t, Z_{t+k}]}{\sqrt{\text{Var}(Z_t)\text{Var}(Z_{t+k})}} \quad (2.4)$$

sendo: $\gamma_0 = \text{Var}(Z_t) = \text{Var}(Z_{t+k})$ a variância do processo, $\rho_0 = 1$ e $\rho_k = \rho_{-k}$.

A autocorrelação de uma série pode ser estimada pela fórmula:

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0} = \frac{\sum_{t=1}^{N-k} (Z_t - \bar{Z})(Z_{t+k} - \bar{Z})}{\sum_{t=1}^{N-k} (Z_t - \bar{Z})^2} \quad (2.5)$$

Outra função importante é a Autocorrelação Parcial, que mede a correlação entre duas observações seriais Z_t e Z_{t+k} eliminando a dependência dos termos intermediários $Z_{t+1}, Z_{t+2}, \dots, Z_{t+k-1}$, e é representada por:

$$\text{Cor}(Z_t, Z_{t+k} / Z_{t+1}, Z_{t+2}, \dots, Z_{t+k-1}) \quad (2.6)$$

Na análise no domínio da frequência, o interesse está em verificar a frequência com que os eventos ocorrem em determinado período de tempo. A ferramenta utilizada para isso é a Análise Espectral, onde são estabelecidas as características de um processo estocástico em termos de frequências podendo, no caso das séries temporais, determinar as periodicidades existentes nas mesmas (Morettin, 2006). Como o espectro de um processo não é conhecido, este precisa ser estimado, em geral, por meio do Periodograma de janelas espectrais, que possui boas propriedades estatísticas.

2.2. Processo Estocástico

Um processo estocástico pode ser definido como um conjunto de variáveis aleatórias definidas segundo uma lei de probabilidades (Barros, 2004). Uma série temporal é uma realização de um processo estocástico. Assim, uma série y_t pode ser definida como uma função y da variável independente t , que é gerada por um processo estocástico desconhecido (Souza e Camargo, 2004).

Tendo em vista que o processo estocástico gerador de dados não é descrito por funções determinísticas, seu comportamento futuro deve ser descrito probabilisticamente. O processo somente pode ser estatisticamente determinado quando todas as suas funções de distribuição de probabilidade são conhecidas até a T-ésima ordem (Barros, 2004).

Na prática, as funções de probabilidade até a T-ésima ordem não são conhecidas e tem-se acesso a uma única realização do processo estocástico, a partir do qual se deseja inferir sobre o mecanismo gerador da série. Devido a isto, consideram-se duas restrições: estacionariedade e ergodicidade.

Um processo é dito estacionário se não existem mudanças sistemáticas em suas características. A estacionariedade pode ser do tipo forte ou fraca.

Na estacionariedade forte ou estrita, a forma da distribuição conjunta do processo permanece invariante mediante uma translação temporal. Como na prática é difícil especificar a distribuição conjunta de um processo estocástico, há a versão mais fraca, na qual somente alguns momentos do processo permanecem inalterados no tempo (Medeiros, 2005).

Assim, um processo é dito fracamente estacionário ou estacionário de segunda ordem se sua média é constante e sua autocovariância depende apenas do *lag*, isto é:

$$\begin{aligned}
E[Z_t] &= \mu & \forall t \\
\text{Var}[Z_t] &= \sigma^2 & \forall t \\
E[(Z_t - \mu)(Z_{t-k} - \mu)] &= \gamma_k & \forall t
\end{aligned}
\tag{2.7}$$

Um processo é dito ergódico se apenas uma realização é suficiente para obter todas as suas propriedades estatísticas. Por definição, todo processo ergódico é também estacionário.

A série temporal e o processo estocástico relacionam-se de maneira semelhante a uma amostra e sua população de origem. Então, o objetivo da análise de uma série temporal é retirar uma amostra finita de dados equidistantes no tempo (série temporal) de uma realidade (processo estocástico) e identificar um modelo que seja capaz de inferir sobre o comportamento da realidade.

2.3. Previsão de Séries Temporais

Uma previsão é uma estimativa quantitativa de eventos futuros, baseada na informação atual e passada (Souza, 1983).

O horizonte de previsão é o intervalo de tempo, contado a partir da origem de previsão, para o qual as previsões devem ser realizadas. Além disso, denomina-se número de passos à frente da previsão o número de intervalos previstos a partir da origem (Souza, 1989).

Assim, a previsão denotada por $\hat{Z}_t(k)$ é definida como a esperança condicional de Z_{t+k} dados os valores passados:

$$\hat{Z}_t(k) = E(Z_{t+k} | Z_t, Z_{t-1}, \dots) \tag{2.8}$$

onde Z_{t+k} são os valores a serem previstos para $k=1,2,\dots$

A maioria dos métodos de previsão de séries temporais se baseia na suposição de que observações passadas contêm todas as informações sobre o padrão de comportamento da série temporal e de que esse padrão é recorrente no tempo.

Os métodos de previsão, classificados como métodos quantitativos, baseiam-se na extrapolação de características de observações passadas e no inter-relacionamento entre essas observações, fornecendo previsões acuradas se o futuro apresentar comportamento similar ao passado.

Segundo Souza (1989), uma previsão quantitativa elaborada a partir de métodos estatísticos é caracterizada por: sua origem, o número de passos à frente, seu valor pontual e por uma medida de incerteza a ela associada (a variância, por exemplo).

O propósito dos métodos de previsão consiste em distinguir o padrão de qualquer ruído que possa estar contido nas observações e, então, usar esse padrão para prever os valores futuros da série temporal. Assim, pela identificação dessa componente, a previsão para períodos de tempo subsequentes ao instante observado pode ser desenvolvida.

Apesar de a quase totalidade dos métodos de previsão de séries temporais estar fundamentada apenas na análise das observações da série de interesse para a especificação de algum modelo que descreva essas observações (modelos univariados), alguns procedimentos de previsão buscam explicar o comportamento de uma série temporal pela evolução dos fenômenos observacionais de outras séries (modelos multivariados).

2.4. Método Ingênuo (Naíve)

O Método Ingênuo, também conhecido como *Random Walk* (Passeio Aleatório), é o mais simples para realizar a previsão de uma variável (Souza, 2004). Sob esta perspectiva, o valor previsto é igual ao último valor observado, independente do número de passos à frente. O método pode ser representado pela equação:

$$Z_t = Z_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.9)$$

A previsão τ passos à frente a partir do instante t é denotada por $\hat{Z}_t(\tau)$. Pode-se escrever a equação de previsão da seguinte forma:

$$\hat{Z}_t(\tau) = E[(Z_{t-1+\tau} + \varepsilon_{t+\tau}) | Z_t] = E(Z_{t-1+\tau}) \quad (2.10)$$

Por sua simplicidade, o Método Ingênuo é usado como critério de comparação (*benchmark*), isto é, o modelo a ser testado tem que ser sempre melhor do que este. Para tal, pode-se fazer uso de alguns critérios de comparação.

A métrica MAPE, *Mean Absolute Percentage Error*, indica o valor médio do erro percentual das previsões e é definido pela seguinte fórmula:

$$MAPE = \frac{\sum_{k=1}^N \left| \frac{a_k - y_k}{a_k} \right|}{N} \times 100 \quad (2.11)$$

onde N é o número de previsões realizadas e a_k e y_k os valores observado e previsto para o índice k , respectivamente.

O coeficiente U de Theil é outra métrica utilizada para avaliar o desempenho da previsão em relação ao Método Ingênuo. Este coeficiente analisa a qualidade da previsão baseado na equação:

$$U = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (a_k - y_k)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (a_k - a_{k-1})^2}} \quad (2.12)$$

O coeficiente pode ser interpretado da seguinte forma:

$$\begin{cases} U > 1 & \text{O erro do modelo estimado é maior que o erro da previsão ingênua} \\ U < 1 & \text{O erro do modelo estimado é menor que o erro da previsão ingênua} \end{cases}$$

Quanto mais próximo de zero for o coeficiente U , melhor é a previsão do modelo estimado.

2.5. Metodologia de Box & Jenkins

A metodologia proposta por Box & Jenkins surgiu na década de 70 e provocou uma revolução na área de análise e previsão de séries temporais. Esta classe de modelos é largamente utilizada na prática e se firmou como uma das técnicas disponíveis mais eficientes.

Uma das características fundamentais desta metodologia é interpretar a série temporal como uma realização de um vetor aleatório multivariado cuja dimensão é a série disponível (Box & Jenkins, 1970).

A partir de uma única realização do processo e com argumentos de estacionariedade e ergodicidade, procura-se detectar o sistema gerador, através das informações contidas na série.

Os modelos de Box & Jenkins são didaticamente divididos em:

- Modelos autorregressivos (AR), onde a série é explicada em função de suas próprias observações passadas;

- Modelos médias móveis (MA), que explicitam os valores futuros da série em função dos resíduos passados;
- Modelos autorregressivos de médias móveis (ARMA), que são uma combinação dos dois modelos anteriores;
- Modelos (ARIMA), que diferem dos ARMA pela aplicação de diferenças sucessivas na série temporal quando esta não respeita as condições de estacionariedade e ergodicidade, e
- Modelos SARIMA, para séries sazonais.

O modelo de Box & Jenkins tem como base a Teoria Geral de Sistemas Lineares, a qual supõe que a passagem de um ruído branco por um filtro linear de memória infinita gera um processo estacionário de segunda ordem (Souza e Camargo, 2004). Este mecanismo está representado na Figura 2.1.

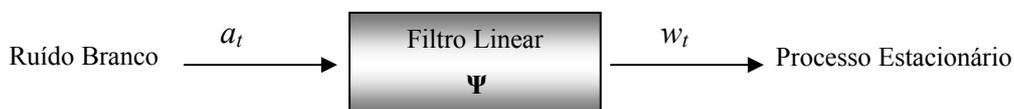


Figura 2.1 Mecanismo de geração de uma série temporal

O objetivo do modelo de Box & Jenkins é, então, encontrar o sistema inverso que, a partir de uma série temporal, seja capaz de gerar um ruído branco, como mostrado na Figura 2.2. Quando o ruído branco é obtido, pode-se dizer que a estrutura de dependência da série temporal foi capturada.



Figura 2.2 Análise de uma série temporal

A metodologia pode ser aplicada a séries estacionárias ou não, e a condição necessária para a aplicação do modelo a séries não estacionárias, é que a estacionariedade possa ser obtida através de diferenças e/ou transformações não lineares da série original. A filosofia de tal modelagem é o princípio da parcimônia e a construção de modelos através de um ciclo iterativo.

Os operadores utilizados para a manipulação dos modelos são:

- Operador de translação para o passado, denotado por B e definido por:

$$\begin{aligned} BZ_t &= Z_{t-1} \\ B^m Z_t &= Z_{t-m} \end{aligned} \quad (2.13)$$

- Operador de translação para o futuro, denotado por F e definido por:

$$\begin{aligned} FZ_t &= Z_{t+1} \\ F^m Z_t &= Z_{t+m} \end{aligned} \quad (2.14)$$

- Operador de diferença, denotado por Δ e definido por:

$$\Delta Z_t = Z_t - Z_{t-1} = (1 - B)Z_t \quad (2.15)$$

sendo $\Delta = 1 - B$.

- Operador da soma, denotado por S e definido por:

$$SZ_t = \sum_{j=0}^{\infty} Z_{t-j} = Z_t + Z_{t-1} + \dots + (1 + B + B^2 + \dots)Z_t \quad (2.16)$$

sendo $S = \Delta^{-1}$.

O modelo de Box & Jenkins segue a formulação:

$$w_t = \Psi(B)a_t = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k a_{t-k} \quad (2.17)$$

O polinômio $\Psi(B)$ possui infinitos parâmetros. Box *et al.* (1994) argumentam que, sob algumas restrições, todo polinômio infinito pode ser expresso pelo quociente de dois polinômios finitos. Então segue que:

$$\Psi(B) = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} \quad (2.18)$$

onde:

$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$ é o polinômio de médias móveis MA(q) e

$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$ é o polinômio autorregressivo AR(p).

Generalizando, têm-se os modelos ARIMA(p,d,q):

$$\phi(B)\nabla^d Z_t = \theta(B)a_t \quad (2.19)$$

O melhor modelo deve ser parcimonioso, ou seja, deve conter o menor número de parâmetros possível para ajustar-se à série de dados observados.

2.5.1. Processo de modelagem dos modelos ARIMA

Pode-se afirmar que a metodologia de Box & Jenkins segue quatro estágios principais:

Etapa 1 – Identificação

Considerada como a fase crítica da metodologia, as principais ferramentas da identificação são a FAC (Função de Autocorrelação), a FACP (Função de Autocorrelação Parcial) e os correlogramas resultantes, que são as representações gráficas das FAC's e FACP's contra o tamanho da defasagem. De acordo com o conceito, a autocorrelação parcial é análoga ao conceito de coeficiente de regressão parcial; assim, esta mede a correlação entre observações (séries temporais) que sejam k períodos afastados.

Na identificação, o objetivo é determinar as ordens (p,d,q) para a componente não sazonal e/ou as ordens (P,D,Q), para a componente sazonal, além de estimativas preliminares dos parâmetros a serem usadas na fase seguinte.

Etapa 2 – Estimação

Esta etapa consiste em estimar os parâmetros dos termos autorregressivo e de média móvel incluídos no modelo, através da maximização da função de verossimilhança condicional, equivalente à estimação de Mínimos Quadrados, supondo-se normalidade de a_t .

Na estimação dos parâmetros desconhecidos, procura-se minimizar a soma do quadrado dos erros, ou seja, no caso do modelo ARIMA(p,d,q), busca-se minimizar:

$$S(\xi) = \sum_{t=1}^T a_t^2, \text{ onde } a_t = \theta^{-1}(B) \cdot \phi(B) \cdot \nabla^d Z_t \quad (2.20)$$

Com a suposição da normalidade dos erros pode-se escrever a função de verossimilhança e proceder à estimação dos parâmetros por Máxima Verossimilhança.

Etapa 3 – Verificação

Nesta fase é necessário verificar se o modelo representa adequadamente os dados. Existem diversos testes para tal procedimento e a grande maioria se baseia na análise dos resíduos dos modelos, ou seja, se os resíduos seguem um comportamento ruído branco.

Desta forma, o processo é iterativo e se o modelo selecionado não é adequado, retorna-se à etapa de identificação para a escolha de outro modelo. Um procedimento muitas vezes utilizado é o de identificar não só um único modelo, mas alguns modelos que serão então estimados e verificados. Se o propósito é realizar previsões, escolhe-se entre os modelos ajustados o melhor no sentido de, por exemplo, fornecer o menor Erro Quadrático Médio de previsão. É possível que vários pesquisadores identifiquem modelos diferentes para uma mesma série temporal (Morettin, 2006).

Etapa 4 – Previsão

O objetivo nesta fase é prever um valor $Z_{t+\tau}$, com horizonte de previsão $\tau \geq 1$, supondo que temos observações $\dots, Z_{t-2}, Z_{t-1}, Z_t$, até o instante t , que é chamado origem das previsões. Esta previsão é de origem t e horizonte τ , denotada por $\hat{Z}_t(\tau)$. A expressão de previsão pode ser escrita da seguinte maneira, utilizando a equação de diferenças (sendo $\tau \geq 1$):

$$\hat{Z}_t = E[Z_{t+\tau} | Z_t] = \phi_1[Z_{t+\tau-1}] + \dots + \phi_p[Z_{t+\tau-p}] - \theta_1[a_{t+\tau-1}] - \dots - \theta_q[a_{t+\tau-q}] + [a_{t+\tau}] \quad (2.21)$$

Porém, os seguintes conceitos devem ser seguidos:

$$[Z_{t+k}] = \hat{Z}_t(k) \rightarrow k > 0$$

$$[Z_{t+k}] = Z_{t+k} \rightarrow k \leq 0$$

$$[a_{t+k}] = 0 \rightarrow k > 0$$

$$[a_{t+k}] = a_{t+k} \rightarrow k \leq 0$$

2.5.2. Testes de adequação do modelo

Existem diversos testes para verificar a adequação do modelo estimado. Box & Jenkins (1970) sugerem, entre outros, o Critério de Sobrefixação, o Teste dos Resíduos Gerados, que pode ser realizado através da verificação do Teste de Portmanteau e do Teste de Periodograma Acumulado.

O Critério de Sobrefixação consiste, basicamente, na elaboração de um modelo com um número de parâmetros superior ao do modelo fixado, que cubra as supostas direções de discrepâncias (Souza, 2004). Caso sejam encontrados parâmetros significativos, há um indicativo de que o modelo foi subidentificado.

Para testar os resíduos, o Teste de Portmanteau estima a autocorrelação residual e através da estatística:

$$Q = n \sum_{j=1}^k r_j^2(\hat{a}) \quad (2.22)$$

A hipótese nula é a de que os resíduos são aleatórios e, para que isso ocorra, o valor de Q deve ser menor do que o valor da abscissa da distribuição Qui-Quadrado com $(k-p-q)$ graus de liberdade.

No teste do Periodograma acumulado, compara-se o Periodograma acumulado da série dos resíduos com o de um ruído branco, com o intuito de se

encontrarem componentes periódicos (Montgomery, 1976). A aplicação desse teste é feita, geralmente, em séries de carga semanal ou mensal, visto que o modelo comporta apenas a sazonalidade, não incluindo a modelagem dos ciclos.

2.6. Regressão Harmônica

A Análise Harmônica ou Análise de Fourier é, tradicionalmente, utilizada para resolver equações diferenciais parciais presentes na Física. Na análise de séries temporais, o objetivo básico é aproximar uma função do tempo por uma soma de componentes senoidais, cujos coeficientes são as transformadas de Fourier da série (Morettin, 2006).

A essência da análise de Fourier é a representação de um conjunto de dados em termos de funções senoidais. Neste ponto, isto parece apropriado para justificar a escolha destas funções, visto que muitas outras famílias de funções periódicas possuem as mesmas propriedades das senóides. Qualquer destas famílias poderia ser utilizada de forma similar (Artis *et al.*, 2007).

As oscilações nas séries podem ser descritas em termos senoidais pela Análise Espectral. Este é um método que descreve a tendência para as oscilações de uma dada frequência que aparece nos dados, em vez das próprias oscilações.

Segundo Bloomfield (1976), a propriedade mais básica das senóides que as torna geralmente adequadas à análise de séries temporais é o seu comportamento sob uma simples mudança de escala de tempo. Uma senóide de frequência ω (em radianos por unidade de tempo) ou período $2\pi/\omega$ pode ser escrita como:

$$f(t) = R \cos(\omega t + \phi) \quad (2.23)$$

onde R é a amplitude e ϕ é a fase.

Outra característica útil das senóides é o seu comportamento sob amostragem (isto é, observando uma função da variável contínua t em um conjunto de valores igualmente espaçados t_0, t_1, \dots), se seu intervalo amostral é Δ , as senóides:

$$R \cos(\omega_1 t + \phi) \quad \text{e} \quad R \cos(\omega_2 t + \phi) \quad (2.24)$$

são imperceptíveis quando $\omega_1 - \omega_2$ é um múltiplo de $2\pi / \Delta$ (Bujosa *et al.*, 2007). Este fenômeno é conhecido como *aliasing*.

Muitas vezes o interesse da Análise Harmônica está em buscar periodicidades nos dados observados (Amaral, 1975). Há duas situações frequentes que podem ocorrer:

- As frequências são conhecidas e o objetivo é estimar amplitudes e fases;
- Há necessidade de estimar amplitudes, frequências e fases.

Quando o modelo possui uma única periodicidade, que é conhecida, pode-se representar os dados segundo a equação (Morettin, 2006):

$$Z_t = \mu + R \cos(\omega t + \phi) + \varepsilon_t \quad (2.25)$$

ou, de forma equivalente,

$$Z_t = \mu + A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) + \varepsilon_t \quad (2.26)$$

em que $A = R \cos \phi$, $B = -R \sin \phi$, R é a amplitude, ϕ é o ângulo de fase, ω é a frequência e ε_t é a componente aleatória.

De (2.25) e (2.26) tem-se que $R^2 = A^2 + B^2$, então:

$$\phi = \begin{cases} \arctan\left(-\frac{B}{A}\right), & A > 0, \\ \arctan\left(-\frac{B}{A}\right) - \pi, & A < 0, B > 0, \\ \arctan\left(-\frac{B}{A}\right) + \pi, & A < 0, B < 0, \\ -\pi/2, & A = 0, B > 0, \\ \pi/2, & A = 0, B < 0, \\ \text{arbitrário} & A = 0, B = 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

O problema é, então, estimar A , B e μ para um ω fixado, o que é feito utilizando o Método de Mínimos Quadrados. Os estimadores $\hat{\mu}$, \hat{A} e \hat{B} são obtidos pela minimização da soma do quadrado dos erros dada pela equação:

$$S(\mu, A, B) = \sum_{t=1}^N (Z_t - \mu - A \cos(\omega t) - B \sin(\omega t))^2 \quad (2.28)$$

A estimação segundo a equação acima resulta em um sistema de equações cuja solução não é trivial. Assim, uma maneira alternativa para encontrar os estimadores é usar a notação matricial para reescrever a equação (2.26) (Bloomfield, 1976).

$$Z = W\theta + \varepsilon \quad (2.29)$$

em que:

$$Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_N)'$$

$$\theta = (\mu, A, B)$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\omega) & \sin(\omega) \\ 1 & \cos(2\omega) & \sin(2\omega) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(N\omega) & \sin(N\omega) \end{bmatrix}$$

que fornece o estimador:

$$\hat{\theta} = (W'W)^{-1}W'Z \quad (2.30)$$

cuja solução é:

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \frac{\sum_{t=1}^N Z_t}{N} = \bar{Z} \\ \hat{R} &= \hat{A}^2 + \hat{B}^2 \\ \hat{\phi} &= \arctg\left(\frac{-\hat{B}}{\hat{A}}\right) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Se $\omega \neq \pi$:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N Z_t \cos(\omega t) \\ \hat{B} &= \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N Z_t \text{sen}(\omega t) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Se $\omega = \pi$:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N Z_t (-1)^t \\ \hat{B} &= 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

Quando $\omega \neq \frac{2\pi}{N}$ e não muito próximo de zero, uma solução aproximada é dada por (Morettin, 2006):

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu} &= \hat{\mu} = \bar{Z} \\
\tilde{A} &= \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N (Z_t - \bar{Z}) \cos(\omega t) \\
\tilde{B} &= \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N (Z_t - \bar{Z}) \text{sen}(\omega t) \\
\tilde{R} &= \tilde{A} + \tilde{B} \\
\tilde{\phi} &= \text{arctg} \left(-\frac{\tilde{B}}{\tilde{A}} \right)
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Quando um modelo tem periodicidades múltiplas (k periodicidades), a equação (2.26) pode ser reescrita da forma:

$$Z_t = \mu + A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \text{sen}(\omega_1 t) + \dots + A_k \cos(\omega_k t) + B_k \text{sen}(\omega_k t) + \varepsilon_t \tag{2.35}$$

onde $\omega_1, \dots, \omega_k$ são frequências conhecidas.

O modelo (2.35) é uma regressão linear, conhecida como Regressão Harmônica, que segue a equação (2.29) onde as matrizes que a compõem são agora:

$$\theta = (\mu, A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_k)'$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\omega_1) & \text{sen}(\omega_1) & \dots & \cos(\omega_k) & \text{sen}(\omega_k) \\ 1 & \cos(2\omega_1) & \text{sen}(2\omega_1) & \dots & \cos(2\omega_k) & \text{sen}(2\omega_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(N\omega_1) & \text{sen}(N\omega_1) & \dots & \cos(N\omega_k) & \text{sen}(N\omega_k) \end{bmatrix}$$

Quando $\omega_1 = \frac{2\pi i}{N}, \omega_2 = \frac{2\pi j}{N}, \dots, \omega_k = \frac{2\pi m}{N}$, isto é, são frequências de

Fourier, a solução exata é dada por:

$$\hat{\mu} = \bar{Z} \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}\hat{A}_k &= \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N Z_t \cos(\omega_k t) \quad k=1,2,\dots \\ \hat{B}_k &= \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N Z_t \text{sen}(\omega_k t) \quad k=1,2,\dots\end{aligned}\tag{2.37}$$

Para $\omega = \pi$:

$$\begin{aligned}\hat{A}_k &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N Z_t (-1)^t \\ \hat{B}_k &= 0\end{aligned}\tag{2.38}$$

2.6.1. Regressão Harmônica com Tendência Polinomial

Quando a série a ser modelada possui alguma tendência, o modelo (2.35) pode ser estendido para (Al-Madfai *et al.*, 2001):

$$\begin{aligned}Z_t &= \mu + at + bt^2 + \dots + ct^p + A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \text{sen}(\omega_1 t) + \dots + \\ &+ A_k \cos(\omega_k t) + B_k \text{sen}(\omega_k t) + \varepsilon_t\end{aligned}\tag{2.39}$$

o que significa que o modelo segue a equação (2.29) cuja matriz Z permanece a mesma considerada para a Regressão Harmônica com múltiplas periodicidades e a matriz W é da forma:

$$W = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & \dots & t^p & \cos(\omega_1) & \text{sen}(\omega_1) & \dots & \cos(\omega_k) & \text{sen}(\omega_k) \\ 1 & 2t & 2t^2 & \dots & 2t^p & \cos(2\omega_1) & \text{sen}(2\omega_1) & \dots & \cos(2\omega_k) & \text{sen}(2\omega_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & Nt & Nt^2 & \dots & Nt^p & \cos(N\omega_1) & \text{sen}(N\omega_1) & \dots & \cos(N\omega_k) & \text{sen}(N\omega_k) \end{bmatrix}$$

onde p é o grau do polinômio que modela a tendência.

O vetor θ é agora:

$$\theta = (\mu, a, b, \dots, c, A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_k)'$$

A estimação via Mínimos Quadrados Ordinários é dada pela equação (2.30).

2.6.2. Periodograma

Quando os ω são frequências desconhecidas é necessário estender o método anterior de forma a incluir a estimação destas frequências. Assim, os estimadores de μ , A e B dependem de ω e são, portanto, denotados por $\hat{\mu}(\omega)$, $\tilde{A}(\omega)$, $\tilde{B}(\omega)$, respectivamente (Young *et al.*, 1999).

O melhor valor para ω é o que maximiza a quantidade:

$$\tilde{R}^2(\omega) = \tilde{A}^2(\omega) + \tilde{B}^2(\omega) \quad (2.40)$$

o que é equivalente a maximizar a quantidade abaixo, denominada Periodograma:

$$\begin{aligned} I(\omega) &= \frac{N}{8\pi} \tilde{R}^2(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi N} \left[\left(\sum_{t=1}^N (Z_t - \bar{Z}) \cos(\omega t) \right)^2 + \left(\sum_{t=1}^N (Z_t - \bar{Z}) \text{sen}(\omega t) \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.41)$$

O Periodograma é uma técnica utilizada para determinar as componentes de frequência contidas na série (Taylor *et al.*, 2007).

Uma notação mais compacta para o Periodograma é:

$$I(\omega) = \frac{2}{N} \left| \sum_{t=1}^N Z_t e^{-i\omega t} \right|^2 \quad (2.42)$$

Apesar de as equações (2.41) e (2.42) serem definidas para qualquer frequência $\omega \in [-\pi, \pi]$, o cálculo das ordenadas do Periodograma faz-se apenas para um conjunto finito de abscissas (Morettin, 2006). Espera-se que o Periodograma apresente um pico quando calculado para uma frequência que coincida exatamente com uma das frequências “verdadeiras”.

2.6.3. Teste de Fisher

Pode-se recorrer a testes de hipóteses para analisar a significância estatística dos máximos do Periodograma. Os principais são o Teste de Fisher e sua extensão, o Teste de Whittle, que são apresentados a seguir.

Segundo Morettin (1983), o Teste de Fisher é utilizado para testar o valor do maior pico no Periodograma. Considera-se o modelo:

$$X_t = Y_t + Z_t \quad (2.43)$$

onde X_t , $t=1,2,\dots,N$ são observações discretas de um processo estacionário com média zero e espectro misto. Y_t e Z_t são processos decorrelacionados, onde Y_t é a parte contínua do espectro e Z_t , um ruído branco.

A hipótese nula é: $H_0 : A_j = 0$ para todo j , sob a condição de que X_t seja Normal, onde A_j é o coeficiente de ordem j da Regressão Harmônica. A Estatística de Fisher é:

$$g = \frac{\max[I_j(\omega)]}{\sum_{j=1}^m I_j(\omega)} \quad (2.44)$$

em que $m = \frac{N}{2}$.

Fisher (1929) mostrou que, sob H_0 , a distribuição exata de g (equação 2.44) é:

$$P(g > z) = m(1-z)^{m-1} - \binom{m}{2}(1-2z)^{m-1} + \dots + (-1)^{k-1}(1-kz)^{m-1} \quad (2.45)$$

onde $k = \frac{1}{z}$.

Podem-se encontrar tabelas para a distribuição acima dada por Fisher (1929) e Shimshoni (1971).

Se H_0 é rejeitada, pode-se concluir que há uma periodicidade em X_t cuja frequência corresponde ao $\max[I_j(\omega)]$. Se isto ocorre para $j = j'$, então esta frequência é $\hat{\omega}_0 = \frac{2\pi j'}{N}$.

Whittle (1952) sugere a possibilidade de testar o pico de 2ª ordem pela omissão do termo $I_j(\omega)$ em (2.44) e ajustando-se o valor de m para $m-1$.

Se é conhecido que X_t tem exatamente r componentes periódicas, quando H_0 é falsa, então o teste baseado em:

$$g^{(r)} = \frac{I^{(r)}(\omega)}{\sum_{j=1}^m I_j(\omega)} \quad (2.46)$$

pode ser usado, onde $I^{(r)}(\omega)$ é a r -ésima maior coordenada.

2.7. Ajuste polinomial de curvas

Um ajuste de curvas é um mecanismo ou artifício que fornece uma relação funcional quando há uma relação estatística (Anton, 2001).

Quando algum fenômeno ou situação é analisado através de dados numéricos, há a necessidade de saber qual a relação funcional correspondente $y = f(x)$.

Uma das formas de se trabalhar com uma função definida por uma tabela de valores é a interpolação polinomial. Porém esta técnica não é adequada quando se quer extrapolar ou quando há erros inerentes ao experimento em questão, visto que estes são imprevisíveis.

O ajuste por Mínimos Quadrados é uma boa solução para este problema. Considerando um ajuste polinomial, ou seja, $y = a + bx + cx^2 + \dots$, pode-se proceder ao ajuste de Mínimos Quadrados para descobrir a função que define a curva utilizando a equação (Anton, 2001):

$$S = (X'X)^{-1} X'y \quad (2.47)$$

onde:

$$S = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ \vdots \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Encontrada a equação que determina a dinâmica dos dados, pode-se utilizar alguns critérios para verificar qualidade do ajuste. O coeficiente de Correlação de Pearson é calculado como segue:

$$r^2 = 1 - \frac{N \sum (y - y_{aj})^2}{N \sum y^2 - (\sum y)^2} \quad (2.48)$$

onde y são os dados observados e y_{aj} são os valores ajustados pelo polinômio.

Quanto mais próximo de 1 for o r^2 , melhor é o ajuste da curva. Outra forma de validar o ajuste é o MAPE (equação 2.11): quanto menor for este valor, mais adequada é a curva ajustada.