4
Método Matemático com Quatérnios

Neste capítulo se obtêm as equações de movimento do corpo no espaço utilizando a teoria de Quatérnios. Na formulação por quatérnios não se utilizam SR intermediários, apenas se usa o SR fixo (F) e outro SR solidário ao corpo (S).

$$\underset{(x,y,z)}{F} \xrightarrow{\mathbf{v},\theta} \underset{(x''',y''',z''')}{S} \tag{4.1}$$

O problema a ser estudado é o mesmo descrito pela Figura 3.1, o impacto inicial apenas muda a posição do vetor quantidade de movimento angular, definindo dois sistemas referenciais imediatamente depois do impacto.

4.1.
Corpo no Espaço

Usando quatérnios, e seguindo um raciocínio baseado no vetor de rotação ou em parâmetros de Euler, são definidos o vetor (instantâneo) de rotação **p** e o ângulo de rotação θ, para acompanhar o movimento [27].

A matriz de inércia do corpo no SR (S) foi mostrada na Eq.(3.9). Com a quantidade de movimento angular (depois do impacto) calcula-se a velocidade angular do corpo no SR fixo.

$${}^{F}\mathbf{h}_G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_G \end{bmatrix} = Cte = {}^{F}\mathbf{T}^{S} \quad {}^{S}\mathbf{I}_G \quad {}^{S}\mathbf{T}^{F} \quad {}^{F}\boldsymbol{\omega}_S \tag{4.2}$$

Então a velocidade angular do corpo no espaço será:

$${}^{F}\boldsymbol{\omega}_S = \left({}^{F}\mathbf{T}^{S}\ {}^{S}\mathbf{I}_G\ {}^{S}\mathbf{T}^{F}\right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_G \end{bmatrix} = {}^{F}\mathbf{T}^{S}\left({}^{S}\mathbf{I}_G\right)^{-1}\ {}^{S}\mathbf{T}^{F} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_G \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

Onde a matriz de transformação de coordenadas ${}^{F}\mathbf{T}^{S}$ será obtida por quatérnios mediante a equação Eq.(1.13) do Capítulo 1:

$$
{}^{F}\mathbf{T}^{S} = \begin{bmatrix} 1-2\,v_z^2-2\,v_y^2 & 2\,v_y\,v_x-2\,l\,v_z & 2\,v_z\,v_x+2\,l\,v_y \\ 2\,v_y\,v_x+2\,l\,v_z & 1-2\,v_z^2-2\,v_x^2 & 2\,v_z\,v_y-2\,l\,v_x \\ 2\,v_z\,v_x-2\,l\,v_y & 2\,v_z\,v_y+2\,l\,v_x & 1-2\,v_y^2-2\,v_x^2 \end{bmatrix} \tag{4.4}
$$

A matriz de transformação de coordenadas ${}^{S}\mathbf{T}^{F}$ é a transposta de ${}^{F}\mathbf{T}^{S}$. É importante lembrar a propriedade básica dos Quatérnios:

$$
\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ l \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}^T.\mathbf{v} + l^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 + l^2 = 1 \tag{4.5}
$$

Até aqui é fácil obter a velocidade angular, Eq.(4.3), substituindo a matriz de transformação de coordenadas da Eq.(4.4) na seguinte equação:

$$
{}^{F}\boldsymbol{\omega}_S = {}^{F}\mathbf{T}^{S} \left(\frac{1}{I_3} \begin{bmatrix} 1/\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) {}^{S}\mathbf{T}^{F} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_G \end{bmatrix} \tag{4.6}
$$

Para trabalhar com equações adimensionais introduz-se a quantidade de movimento angular do corpo $h_G = I_3\ v$. O tempo se tornará uma grandeza adimensional $\tau = v\ t$, onde v representa uma velocidade angular equivalente (instantaneamente depois do impacto). Representação da derivada temporal na forma adimensional:

$$
\dot{v}_x = v\,v_x' \qquad \dot{v}_y = v\,v_y' \qquad \dot{v}_z = v\,v_z' \qquad \dot{l} = v\,l' \tag{4.7}
$$

A velocidade angular na sua forma normalizada, depois de calcular, arranjar e simplificar a Eq.(4.6), é:

$$
{}^{F}\boldsymbol{\omega}_S = \begin{bmatrix} \dfrac{\left(1-2v_z^2-2v_y^2\right)\left(2v_zv_x-2lv_y\right)}{\mu_1} + \dfrac{\left(2v_yv_x-2lv_z\right)\left(2v_zv_y+2lv_x\right)}{\mu_2} + \left(2v_zv_x+2lv_y\right)\left(1-2v_y^2-2v_x^2\right) \\ \dfrac{\left(2v_yv_x+2lv_z\right)\left(2v_zv_x-2lv_y\right)}{\mu_1} + \dfrac{\left(1-2v_z^2-2v_x^2\right)\left(2v_zv_y+2lv_x\right)}{\mu_2} + \left(2v_zv_y-2lv_x\right)\left(1-2v_y^2-2v_x^2\right) \\ \dfrac{\left(2v_zv_x-2lv_y\right)^2}{\mu_1} + \dfrac{\left(2v_zv_y+2lv_x\right)^2}{\mu_2} + \left(1-2v_y^2-2v_x^2\right)^2 \end{bmatrix} \tag{4.8}
$$

Onde, μ_1 e μ_2 são os momentos de inércia normalizados do corpo, mostrados nas Eq.(3.5). Com a velocidade angular em termos das componentes dos quatérnios, agora é possível, utilizar a solução do problema inverso [26]. A Equação (1.17) do item 1.3.5 no Capítulo 1 apresenta a solução do problema inverso utilizando Quatérnios. Aplicando o mesmo princípio de normalização anterior, Eq.(4.7), a solução do problema inverso na sua forma adimensional é:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{v}' \\ l' \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} l\,\mathbf{E}-\tilde{\mathbf{v}} & -\mathbf{v} \\ \mathbf{v}^T & l \end{bmatrix}\begin{bmatrix} {}^F\boldsymbol{\omega}_S \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

Finalmente, substituindo a velocidade angular da Eq.(4.8) na solução do problema inverso, Eq.(4.9), obtêm-se as equações que descrevem o movimento.

$$v'_x = \frac{((-2v_y v_x{}^2 - 2v_y{}^3 + v_y)\mu_1 - 2l^2\, v_y + 2v_z\, l\, v_x)\mu_2 - 2\mu_1 v_z (v_z v_y + l\, v_x)}{2\mu_1\mu_2} \tag{4.10}$$

$$v'_y = \frac{((2v_x v_y{}^2 + 2v_x{}^3 - v_x)\mu_1 + 2v_z{}^2 v_x - 2v_z\, l\, v_y)\mu_2 + 2\mu_1\, l\,(v_z v_y + l\, v_x)}{2\mu_1\mu_2} \tag{4.11}$$

$$v'_z = \frac{(l\,(1-2v_y{}^2 - 2v_x{}^2)\mu_1 - 2v_x v_z v_y + 2\,l\, v_y{}^2)\mu_2 + 2\mu_1 v_x (v_z v_y + l\, v_x)}{2\mu_1\mu_2} \tag{4.12}$$

$$l' = \frac{(v_z(2v_y{}^2 + 2v_x{}^2 - 1)\mu_2 - 2v_y\, l\, v_x - 2v_z v_y{}^2)\mu_1 + 2\mu_2 v_x (l\, v_y + v_z v_x)}{2\mu_1\mu_2} \tag{4.13}$$

Usando a velocidade angular da Eq.(4.8) e a quantidade de movimento angular da Eq.(4.2) é possível obter uma expressão para a energia cinética. Passando pelo mesmo processo de normalização da Eq.(3.15), a energia cinética é:

$$EE = \frac{(2\,v_z\,v_x - 2\,l\,v_y)^2}{\mu_1} + \frac{(2\,v_z\,v_y + 2\,l\,v_x)^2}{\mu_2} + (1-2\,v_y{}^2 - 2\,v_x{}^2)^2 \tag{4.14}$$

Outro método para conseguir as equações de movimento, com quatérnios, é utilizando a energia cinética e aplicando-se as equações de Lagrange, tendo como restrição o modulo unitário do quatérnio. Aqui se utiliza o resultado de um artigo científico [10] para conseguir as equações de movimento. O procedimento compõe-se de diversas etapas: primeiro se aplica as equações de Lagrange na energia cinética do corpo sem nenhum tipo de restrição, para obter as segundas derivadas das componentes do quatérnio. A seguir considera-se o Princípio de Gauss de aceleração mínima, obtendo a Equação Fundamental do Movimento Vinculado [11], com a restrição (ou vínculo) de quatérnio de modulo unitário. Finalmente resultam as novas derivadas das componentes do quatérnio. A equação final se escreve:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \frac{-1}{2} Q_*\left(\mathbf{I}\right)^{-1}\tilde{\boldsymbol{\omega}}\,\mathbf{I}\,\boldsymbol{\omega} - \left(\dot{v}_x^2 + \dot{v}_y^2 + \dot{v}_z^2 + \dot{l}^2\right)\mathbf{q} \tag{4.15}$$

Onde, $\mathbf{I}$ é a matriz de inércia do corpo no seu próprio SR, $\mathbf{I} = {}^S\mathbf{I}_G$ da Eq.(3.9), $\boldsymbol{\omega}$ é a velocidade angular do corpo no SR (F) como na Eq.(1.18), $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ é a matriz til associada à velocidade angular, e Q_* é parte da matriz $\hat{\mathbf{q}}$ associada ao Quatérnio $\mathbf{q}$, Eq.(1.16). A matriz 4x3 Q_* tem a seguinte forma:

$$Q_* = \begin{bmatrix} -\mathbf{v}^T \\ l\,\mathbf{E} + \tilde{\mathbf{v}} \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

Onde **E** é a matriz identidade 3x3. l e **v** são componentes do quatérnio. Substituindo as variáveis identificadas anteriormente na Eq.(4.15), chega-se às equações de movimento. O resultado deve passar pelo processo de normalização antes descrito, Eq.(4.7), finalmente se conseguem as equações adimensionais:

$$\begin{aligned} v_x'' = \frac{1}{\mu_1\mu_2}&(-2(v_x v_y' - v_y v_x' + v_z\, l' - l\, v_z')\left(l\left(v_z v_x' - v_x v_z' + v_y\, l' - l\, v_y'\right)\mu_2 + v_z\left(v_y v_z' - v_z v_y'\right.\right. \\ &\left.\left. + v_x\, l' - l\, v_x'\right)\mu_1\right) + 2l\left(v_x v_y' - v_y v_x' + v_z\, l' - l\, v_z'\right)\left(v_z v_x' - v_x v_z' + v_y\, l' - l\, v_y'\right)\mu_2^2 \\ &+ 2v_z\left(v_x v_y' - v_y v_x' + v_z\, l' - l\, v_z'\right)\left(v_y v_z' - v_z v_y' + v_x\, l' - l\, v_x'\right)\mu_1^2 - v_x\left(v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2 + l'^2\right)\mu_1\,\mu_2 \\ &+ 2v_y\left(v_z v_x' - v_x v_z' + v_y\, l' - l\, v_y'\right)\left(v_y v_z' - v_z v_y' + v_x\, l' - l\, v_x'\right)\left(\mu_1 - \mu_2\right)\mu_1\,\mu_2) \end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned} v_y'' = \frac{1}{\mu_1\mu_2}&(2(v_x v_y' - v_y v_x' + v_z\, l' - l\, v_z')\left(-v_z\left(v_z v_x' - v_x v_z' + v_y\, l' - l\, v_y'\right)\mu_2 + l\left(v_y v_z' - v_z v_y'\right.\right. \\ &\left.\left. + v_x\, l' - l\, v_x'\right)\mu_1\right) + 2v_z\left(v_x v_y' - v_y v_x' + v_z\, l' - l\, v_z'\right)\left(v_z v_x' - v_x v_z' + v_y\, l' - l\, v_y'\right)\mu_2^2 \\ &- 2l\left(v_x v_y' - v_y v_x' + v_z\, l' - l\, v_z'\right)\left(v_y v_z' - v_z v_y' + v_x\, l' - l\, v_x'\right)\mu_1^2 - v_y\left(v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2 + l'^2\right)\mu_1\,\mu_2 \\ &- 2v_x\left(v_z v_x' - v_x v_z' + v_y\, l' - l\, v_y'\right)\left(v_y v_z' - v_z v_y' + v_x\, l' - l\, v_x'\right)\left(\mu_1 - \mu_2\right)\mu_1\,\mu_2) \end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned} v_z'' = \frac{1}{\mu_1\mu_2}&(2(v_x v_y' - v_y v_x' + v_z\, l' - l\, v_z')\left(-v_y\left(v_z v_x' - v_x v_z' + v_y\, l' - l\, v_y'\right)\mu_2 + v_x\left(v_y v_z' - v_z v_y'\right.\right. \\ &\left.\left. + v_x\, l' - l\, v_x'\right)\mu_1\right) + 2v_y\left(v_x v_y' - v_y v_x' + v_z\, l' - l\, v_z'\right)\left(v_z v_x' - v_x v_z' + v_y\, l' - l\, v_y'\right)\mu_2^2 \\ &- 2v_x\left(v_x v_y' - v_y v_x' + v_z\, l' - l\, v_z'\right)\left(v_y v_z' - v_z v_y' + v_x\, l' - l\, v_x'\right)\mu_1^2 - v_z\left(v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2 + l'^2\right)\mu_1\,\mu_2 \\ &+ 2l\left(v_z v_x' - v_x v_z' + v_y\, l' - l\, v_y'\right)\left(v_y v_z' - v_z v_y' + v_x\, l' - l\, v_x'\right)\left(\mu_1 - \mu_2\right)\mu_1\,\mu_2) \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned} l'' = \frac{1}{\mu_1\mu_2}&(-2(v_x v_y' - v_y v_x' + v_z\, l' - l\, v_z')\left(-v_x\left(v_z v_x' - v_x v_z' + v_y\, l' - l\, v_y'\right)\mu_2 + v_y\left(v_y v_z' - v_z v_y'\right.\right. \\ &\left.\left. + v_x\, l' - l\, v_x'\right)\mu_1\right) - 2v_x\left(v_x v_y' - v_y v_x' + v_z\, l' - l\, v_z'\right)\left(v_z v_x' - v_x v_z' + v_y\, l' - l\, v_y'\right)\mu_2^2 \\ &+ 2v_y\left(v_x v_y' - v_y v_x' + v_z\, l' - l\, v_z'\right)\left(v_y v_z' - v_z v_y' + v_x\, l' - l\, v_x'\right)\mu_1^2 - l\left(v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2 + l'^2\right)\mu_1\,\mu_2 \\ &- 2v_z\left(v_z v_x' - v_x v_z' + v_y\, l' - l\, v_y'\right)\left(v_y v_z' - v_z v_y' + v_x\, l' - l\, v_x'\right)\left(\mu_1 - \mu_2\right)\mu_1\,\mu_2) \end{aligned} \tag{4.20}$$

Estas são as equações diferenciais de segunda ordem que descrevem a dinâmica do Corpo no espaço.

4.1.1.
Condição inicial

As condições iniciais dos quatérnios devem coincidir com aquelas expressas pelos ângulos cardânicos, já que o problema a ser estudado é o mesmo. Os resultados obtidos com quatérnios e com ângulos cardânicos estão relacionados pela matriz transformação ${}^{F}\mathbf{T}^{S}$. Seguindo o raciocínio da Matriz Rotação do item 1.3.3 no Capítulo 1, a matriz rotação (e a matriz transformação) da Eq.(1.8) pode ser separada na soma de duas matrizes, uma matriz simétrica e outra anti-simétrica. A parte anti-simétrica pode ser calculada como:

$$\tilde{\mathbf{p}}\,\sin\theta = \frac{1}{2}\left({}^{F}\mathbf{T}^{S} - {}^{S}\mathbf{T}^{F}\right) \tag{4.21}$$

Substituindo o resultado da Eq.(1.5) na equação anterior tem-se uma relação entre os parâmetros de Euler-Rodrigues e os ângulos cardânicos.

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \dfrac{\cos\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma + \sin\alpha\,\cos\gamma + \sin\alpha\,\cos\beta}{2\,\sin\theta} \\ \dfrac{\sin\beta + \cos\alpha\,\sin\beta\,\cos\gamma - \sin\alpha\,\sin\gamma}{2\,\sin\theta} \\ \dfrac{\sin\alpha\,\sin\beta\,\cos\gamma + \cos\alpha\,\sin\gamma + \cos\beta\,\sin\gamma}{2\,\sin\theta} \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

O ângulo θ é calculado a partir do traço das matrizes, transformação e rotação, já que estas devem ser iguais [13]. Calcula-se o traço da matriz que resulta da Eq.(1.5) e o traço da matriz apresentada na Eq.(4.4).

$$\cos\beta\,\cos\gamma - \sin\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma + \cos\alpha\,\cos\gamma + \cos\alpha\,\cos\beta = 4l^2 - 1 \tag{4.23}$$

É importante lembrar da construção dos quatérnios:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x\,\sin(\theta/2) \\ p_y\,\sin(\theta/2) \\ p_z\,\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \qquad \text{Onde: } p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = 1 \tag{4.24}$$

Então, da Eq.(4.23), o ângulo θ é completamente definido por:

$$\cos(\theta/2) = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta} \tag{4.25}$$

Lembrando as propriedades da trigonometria com respeito à duplicação dos ângulos: $\cos\theta = 2\cos^2(\theta/2) - 1$ e $\sin\theta = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$, a Eq.(4.23) pode-se escrever também:

$$2\cos\theta+1=\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta \tag{4.26}$$

As componentes do Quatérnio, em função dos ângulos cardânicos são obtidas substituindo as equações Eq.(4.22) e Eq.(4.25) na Eq.(4.24).

$$\mathbf{q}=\begin{bmatrix} \dfrac{\cos\alpha\ \sin\beta\ \sin\gamma+\sin\alpha\ \cos\gamma+\sin\alpha\ \cos\beta}{2\sqrt{1+\cos\beta\ \cos\gamma-\sin\alpha\ \sin\beta\ \sin\gamma+\cos\alpha\ \cos\gamma+\cos\alpha\ \cos\beta}} \\ \dfrac{\sin\beta+\cos\alpha\ \sin\beta\ \cos\gamma-\sin\alpha\ \sin\gamma}{2\sqrt{1+\cos\beta\ \cos\gamma-\sin\alpha\ \sin\beta\ \sin\gamma+\cos\alpha\ \cos\gamma+\cos\alpha\ \cos\beta}} \\ \dfrac{\sin\alpha\ \sin\beta\ \cos\gamma+\cos\alpha\ \sin\gamma+\cos\beta\ \sin\gamma}{2\sqrt{1+\cos\beta\ \cos\gamma-\sin\alpha\ \sin\beta\ \sin\gamma+\cos\alpha\ \cos\gamma+\cos\alpha\ \cos\beta}} \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{1+\cos\beta\ \cos\gamma-\sin\alpha\ \sin\beta\ \sin\gamma+\cos\alpha\ \cos\gamma+\cos\alpha\ \cos\beta} \end{bmatrix} \tag{4.27}$$

Uma forma de verificar a correção destes resultados é calcular os valores para dois casos particulares de impacto, na direção do eixo x ou y, em forma isolada. Para o impacto no eixo y (ΔH_y), os ângulos cardânicos iniciais são: $\alpha_0\neq 0$, $\beta_0=0$ e $\gamma_0=0$. Os valores das componentes iniciais do Quatérnio são:

$$\mathbf{q}_0=\begin{bmatrix} \dfrac{2\sin\alpha_0}{2\sqrt{2(1+\cos\alpha_0)}} \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{2(1+\cos\alpha_0)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{\sin\alpha_0}{2\cos(\alpha_0/2)} \\ 0 \\ 0 \\ \cos(\alpha_0/2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sin(\alpha_0/2) \\ 0 \\ 0 \\ \cos(\alpha_0/2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \\ v_{z0} \\ l_0 \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

Neste caso se conclui que $\alpha_0=\theta_0$, observado apenas a igualdade dos traços das matrizes, na Eq.(4.26), temos o mesmo resultado. A energia cinética inicial segundo a Eq.(4.14) é.

$$EE_0=\frac{(2\,l_0\,v_{x0})^2}{\mu_2}+(1-2\,v_{x0}^2)^2 \tag{4.29}$$

A energia cinética tem o mesmo valor que na Eq.(3.29), se o ângulo inicial da Eq.(4.28) for substituído na Eq.(4.29). A condição inicial das derivadas das componentes, para as equações de segunda ordem, são calculadas substituindo as componentes iniciais do quatérnio da Eq.(4.28) nas equações: Eq.(4.10), Eq.(4.11), Eq.(4.12) e Eq.(4.13).

$$v'_{x0}=l'_0=0 \qquad v'_{y0}=\frac{\left((2v_{x0}^{\ 2}-1)\mu_2+2l_0^2\right)v_{x0}}{2\mu_2} \qquad v'_{z0}=\frac{\left((1-2v_{x0}^{\ 2})\mu_2+2v_{x0}^2\right)l_0}{2\mu_2} \tag{4.30}$$

Se o impacto acontece em x (ΔH_x), os ângulos iniciais são: $\alpha_0=0$, $\beta_0\neq 0$ e $\gamma_0=0$. Os valores das componentes iniciais do Quatérnio:

$$\mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{2\sin\beta_0}{2\sqrt{2(1+\cos\beta_0)}} \\ 0 \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{2(1+\cos\beta_0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{\sin\beta_0}{2\cos(\beta_0/2)} \\ 0 \\ \cos(\beta_0/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(\beta_0/2) \\ 0 \\ \cos(\beta_0/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \\ v_{z0} \\ l_0 \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

Portanto $\beta_0=\theta_0$. A energia cinética inicial, Eq.(4.14), é:

$$EE_0 = \frac{(2\,l_0\,v_{y0})^2}{\mu_1} + (1-2\,v_{y0}{}^2)^2 \tag{4.32}$$

A energia cinética tem o mesmo valor que na Eq.(3.37). A condição inicial para o sistema de equações é calculada substituindo as componentes iniciais do quatérnio da Eq.(4.31) nas equações: Eq.(4.10), Eq.(4.11), Eq.(4.12) e Eq.(4.13).

$$v'_{y0} = l'_0 = 0 \qquad v'_{x0} = \frac{((1-2v_{y0}{}^2)\mu_1 - 2l_0^2)\,v_{y0}\,\mu_2}{2\mu_1\mu_2} \qquad v'_{z0} = \frac{(\,(1-2v_{y0}{}^2)\mu_1 + 2v_{y0}{}^2)\,l_0\,\mu_2}{2\mu_1\mu_2} \tag{4.33}$$

Estas são todas as condições necessárias para garantir que se está estudando o mesmo problema que no Capítulo 3.

4.2. Trajetória do eixo do rotor

No raciocínio do item 1.3.4 do Capítulo 1 apontou-se uma propriedade do *operador de rotação* [20]. Se $\mathbf{q}_r$ e $\mathbf{q}_t$ são vetores puros, a operação que inclui um quatérnio e o seu conjugado $\mathbf{q}\mathbf{q_r}\mathbf{q}^* = \mathbf{q_t}$ representa a rotação do vetor $\mathbf{q}_r$ para $\mathbf{q}_t$.

Considera-se: $\mathbf{q}_r=[0,0,1,0]^T$ o vetor unitário no eixo do rotor (e_s) antes do impacto, e $\mathbf{q}_t=[x,y,z,0]^T$ o vetor no eixo do rotor durante o movimento. A *operação de rotação* é feita com o quatérnio $\mathbf{q}$ obtido das equações de movimento.

$$\mathbf{q}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.34}$$

As coordenadas do vetor (no e_s) em qualquer instante do movimento são:

$$x = 2v_z\,v_x + 2s\,v_y \qquad y = -2s\,v_x + 2v_z\,v_y \qquad z = -v_x^2 - v_y^2 + v_z^2 + s^2 \tag{4.35}$$

Estas coordenadas ajudam muito na visualização do movimento [15]. Elas definem de forma clara os dois lados do hemisfério, um lado quando $z>0$ e o outro lado quando $z<0$.