3
Modelo Matemático com Ângulos seqüenciais - início do movimento

Um corpo no espaço tem seis graus de liberdade, três de translação e três de rotação. Este trabalho se restringe à dinâmica de rotação do corpo, considerando como fixo um sistema referencial que translada com origem no centro de massa do rotor. Limita-se portanto o estudo à rotação ao redor do centro de massa. Para os três graus de liberdade (rotação pura) escolhe-se três coordenadas generalizadas na forma de ângulos seqüenciais.

No Giroscópio de laboratório apresentado no Capítulo 2 e utilizado para a visualização de comportamento, o rotor é suportado por dois anéis (ou quadros) (suspensão cardânica). A partir da base fixa cada anel acrescenta um grau de liberdade ao movimento, e um grau de liberdade provém do próprio rotor, em um total de três graus de liberdade. Embora existam três corpos, a dinâmica deste sistema é descrita com apenas três coordenadas generalizadas.

O problema básico que será estudado neste trabalho consiste em um corpo (rotor), com uma velocidade angular inicial, e quantidade de movimento angular constante alinhadas na mesma direção (eixo z_0), quando é impactado por uma força externa instantânea em direção perpendicular ao eixo z_0 (impacto que ocorre sobre um dos quadros cardânicos). O impacto gera uma mudança instantânea na direção da quantidade de movimento angular, iniciando um movimento cônico do eixo de simetria (e_s) em torno do eixo da quantidade de movimento angular.

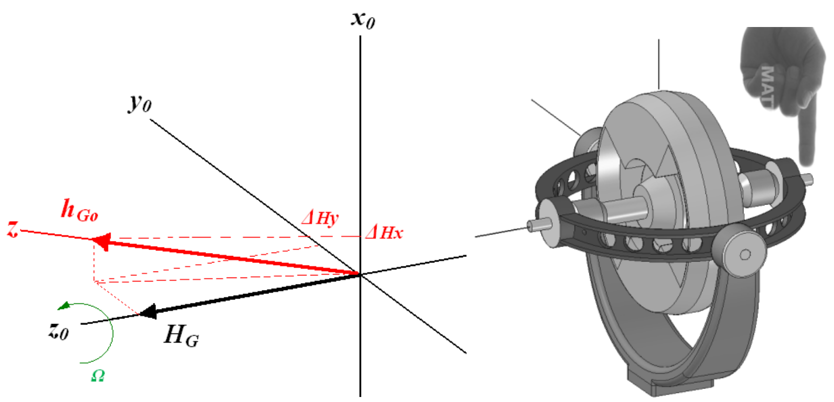

Figura 3.1: Quantidade de movimento angular durante o impacto.

Para entender o processo de impacto, dois sistemas referenciais são considerados: o primeiro (R) com eixos (x_0, y_0, z_0), onde z_0 está alinhado com o eixo de simetria do rotor (e_s), e o segundo (F) com eixos (x, y, z) onde a quantidade de movimento angular (depois do impacto) tem a direção z. Antes do impacto a quantidade de movimento angular escrita no SR (R) é:

$$^{R}\mathbf{H}_G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H_G \end{bmatrix}$$

Depois do impacto a quantidade de movimento angular muda de posição e agora é mais fácil escrevê-la no SR (F):

$$^{F}\mathbf{h}_{G_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_{G_0} \end{bmatrix}$$

R e F são os sistemas referenciais apresentados na Eq. (1.3) e Eq. (2.1).

O corpo (rotor) possui simetria porém não é axissimétrico. Considerando um SR (S) fixo ao corpo resulta uma matriz de inércia diagonal, visto que os produtos de inércia são todos nulos. Os momentos principais de inércia serão designados por I_1, I_2, I_3. Usando a matriz de transformação de coordenadas, Eq. (1.4), obtém-se a matriz de inércia no SR (R).

$$^{R}\mathbf{I}_G = {}^{R}\mathbf{T}^{S}\, {}^{S}\mathbf{I}_G\, {}^{S}\mathbf{T}^{R} = I_3 \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

Onde:

$$A = \mu_1 \cos^2\gamma + \mu_2 \sin^2\gamma \tag{3.2}$$

$$B = (\mu_1 - \mu_2)\cos\gamma \sin\gamma \tag{3.3}$$

$$C = \mu_1 \sin^2\gamma + \mu_2 \cos^2\gamma \tag{3.4}$$

$$\mu_1 = I_1/I_3 \qquad \mu_2 = I_2/I_3 \tag{3.5}$$

Pela equação de Euler $\mathbf{M} = d\,\mathbf{H}/d\,t$, considerando um impacto de duração muito pequena pode-se escrever: $\mathbf{M}\,\Delta t = \Delta\mathbf{H}$. Com a matriz de inércia e o vetor velocidade angular é possível obter a quantidade de movimento angular do corpo (ou do rotor no Giroscópio) no SR (R). Trabalha-se neste SR porque convenientemente ele foi definido depois do impacto.

$$ {}^{R}\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \qquad {}^{R}\mathbf{h}_{G_0} = {}^{R}\mathbf{I}_G \, {}^{R}\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \left(A\ \omega_x + B\ \omega_y\right) I_3 \\ \left(B\ \omega_x + C\ \omega_y\right) I_3 \\ \omega_z\ I_3 \end{bmatrix} \tag{3.6} $$

Se o impacto acontece apenas no eixo x (Figura 3.1), ele produz a seguinte variação da quantidade de movimento angular, da Eq.(3.6):

$$ \begin{bmatrix} M_x\,\Delta t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta H_x \\ \Delta H_y \\ \Delta H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(A\ \Delta\omega_x + B\ \Delta\omega_y\right) I_3 \\ \left(B\ \Delta\omega_x + C\ \Delta\omega_y\right) I_3 \\ \Delta\omega_z\ I_3 \end{bmatrix} $$

Daqui se obtém a variação da velocidade angular:

$$ \Delta\omega_x = \frac{C}{\mu_1\ \mu_2} \frac{M_x\ \Delta t}{I_3} \qquad \Delta\omega_y = -\frac{B}{\mu_1\ \mu_2} \frac{M_x\ \Delta t}{I_3} \qquad \Delta\omega_z = 0 \tag{3.7} $$

Se o impacto acontece apenas no eixo y ele produz a seguinte variação da quantidade de movimento angular, da Eq.(3.6):

$$ \begin{bmatrix} 0 \\ M_y\,\Delta t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta H_x \\ \Delta H_y \\ \Delta H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(A\ \Delta\omega_x + B\ \Delta\omega_y\right) I_3 \\ \left(B\ \Delta\omega_x + C\ \Delta\omega_y\right) I_3 \\ \Delta\omega_z\ I_3 \end{bmatrix} $$

Obtendo-se a variação da velocidade angular:

$$ \Delta\omega_x = -\frac{B}{\mu_1\ \mu_2} \frac{M_y\ \Delta t}{I_3} \qquad \Delta\omega_y = \frac{A}{\mu_1\ \mu_2} \frac{M_y\ \Delta t}{I_3} \qquad \Delta\omega_z = 0 \tag{3.8} $$

Em ambos os casos, impacto em x e y, o valor da quantidade de movimento angular no eixo z não muda porque $\Delta\omega_z = 0$, e a velocidade angular já existente $\omega_z = \Omega$ no eixo z não mudará devido ao impacto. Depois do impacto apenas as componentes da velocidade angular nos eixos x e y variarão e serão: $\omega_x = \Delta\,\omega_x$ e $\omega_y = \Delta\,\omega_y$.

3.1. Corpo no Espaço

As equações de movimento são obtidas por métodos diferentes, uma vez aproveitando as integrais de quantidade de movimento e energia no caso em que são constantes, outra vez utilizando a formulação de Lagrange. Neste capitulo valemo-nos dos ângulos cardânicos para descrever o movimento do corpo seguindo o raciocínio de rotações seqüenciais. A matriz de inércia de um corpo, escrita em seu próprio SR, pode ser apresentada como:

$$ {}^{S}\mathbf{I}_G = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \tag{3.9} $$

Usando a matriz de transformação de coordenadas, Eq. (1.4), pode-se levar a matriz de inércia ao SR(R), conforme Eq.(3.1).

A velocidade angular a partir de rotações seqüenciais elementares, usando Eq.(1.2) e Eq.(1.4) é obtida no SR(R) como:

$$ {}^{R}\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}\cos\beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma} \end{bmatrix} \tag{3.10} $$

Depois do impacto, o vetor quantidade de movimento angular volta a ficar constante e escrito no SR (F) vale: ${}^{F}\mathbf{h}_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & h_G \end{bmatrix}^T$. A quantidade de movimento angular no SR (F) se calcula a partir da velocidade angular da Eq.(3.10), e da matriz de inércia da Eq.(3.1).

$$ {}^{F}\mathbf{h}_G = Cte = {}^{F}\mathbf{T}^{R} \; {}^{R}\mathbf{h}_G = {}^{F}\mathbf{T}^{Q} \; {}^{Q}\mathbf{T}^{R} \; {}^{R}\mathbf{I}_G \; {}^{R}\boldsymbol{\omega} \tag{3.11} $$

É conveniente trabalhar com equações adimensionais. O processo de normalização das equações começa pela definição da quantidade de movimento angular no instante depois do impacto. Define-se a quantidade de movimento angular do corpo depois do impacto $h_G = I_3\ v$. O tempo será mudado de segundos para um valor adimensional $\tau = v\ t$, onde v representa uma velocidade angular equivalente (instantaneamente depois do impacto) [1]. A representação da derivada em relação ao tempo adimensional τ, é:

$$ \dot{\alpha} = v\,\alpha' \qquad \dot{\beta} = v\,\beta' \qquad \dot{\gamma} = v\,\gamma' \tag{3.12} $$

Resolvendo a Eq.(3.11), aplicando o procedimento de normalização usando as derivadas da Eq.(3.12), e utilizando o raciocínio do problema inverso do item 1.3.5 no Capítulo 1, obtém-se o sistema de equações de movimento.

$$ \begin{bmatrix} \gamma' \\ \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix} = \frac{1}{\mu_1\,\mu_2\cos\beta} \begin{bmatrix} \mu_1\,\mu_2\cos\beta & -C\sin\beta & B\sin\beta \\ 0 & C & -B \\ 0 & -B\cos\beta & A\cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta \\ -\cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha \end{bmatrix} \tag{3.13} $$

A energia cinética se calcula utilizando a velocidade angular da Eq.(3.10) e a quantidade de movimento angular inicial depois do impacto: ${}^{F}\mathbf{h}_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & h_G \end{bmatrix}^T$, este valor é constante durante o movimento.

$$2\ E_C = \boldsymbol{\omega}^T\ \mathbf{h}_G = {}^{R}\boldsymbol{\omega}^T\ {}^{R}\mathbf{T}^F\ {}^{F}\mathbf{h}_G \tag{3.14}$$

A energia cinética na sua forma adimensional é definida como:

$$EE = 2E_C/h_G v \qquad\qquad EE = \beta' \sin\alpha + \gamma' \cos\alpha \cos\beta \tag{3.15}$$

As equações de movimento obtidas para descrever a dinâmica do corpo no espaço por este caminho são de primeira ordem, sendo portanto necessárias apenas condições iniciais de posição (ângulo inicial) [1]. A energia cinética também pode ser representada apenas com os ângulos, substituindo na Eq.(3.15) as velocidades da Eq.(3.13), resultando:

$$\begin{aligned} EE &= (\cos\alpha\cos\beta)^2 + \\ &+ \frac{1}{\mu_1\mu_2}\left[\mu_1\left(\cos\gamma\sin\alpha + \sin\gamma\cos\alpha\sin\beta\right)^2 + \mu_2\left(\sin\gamma\sin\alpha - \cos\gamma\cos\alpha\sin\beta\right)^2\right] \end{aligned} \tag{3.16}$$

As equações de Lagrange nos permitem chegar às equações de movimento por outro caminho: inicia-se a análise pela energia cinética, a Lagrangeana no caso é composta apenas pela energia cinética de rotação. A energia cinética de um corpo, escrito no seu próprio SR (S), é calculada seguindo o raciocínio das rotações elementares (item 1.3.2 do Capítulo 1).

$${}^{S}\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}\cos\beta\ \cos\gamma + \dot{\beta}\sin\gamma \\ -\dot{\alpha}\cos\beta\ \sin\gamma + \dot{\beta}\cos\gamma \\ \dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma} \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

Com esta velocidade angular e a matriz de inércia da Eq.(3.9) se obtém a energia cinética escrita no SR (S):

$$E_C = \frac{1}{2}\ {}^{S}\boldsymbol{\omega}^T\ {}^{S}\mathbf{I}_G\ {}^{S}\boldsymbol{\omega}$$

$$E_C = \frac{1}{2}\left(I_1\left(\dot{\alpha}\cos\beta\cos\gamma + \dot{\beta}\sin\gamma\right)^2 + I_2\left(-\dot{\alpha}\cos\beta\sin\gamma + \dot{\beta}\cos\gamma\right)^2 + I_3\left(\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma}\right)^2\right) \tag{3.18}$$

No sistema conservativo as equações de Lagrange se aplicam facilmente:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial\dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial\alpha} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial\dot{\beta}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial\beta} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial\dot{\gamma}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial\gamma} = 0$$

Os resultados das equações anteriores nos fornecem equações de movimento de segunda ordem do corpo. Aqui também se trabalha com equações adimensionais, usando o mesmo procedimento de normalização anterior, e a mesma hipótese anterior: $h_G = I_3\ v$ e $\tau = v\ t$, obtendo-se acelerações angulares $\ddot{\alpha} = v^2\alpha''$ $\ddot{\beta} = v^2\beta''$ $\ddot{\gamma} = v^2\gamma''$.

Normalizando, simplificando e arranjando as equações obtidas por Lagrange, temos:

$$\alpha'' = \frac{1}{\mu_1\ \mu_2 \cos\beta}\Big\{(\mu_1+\mu_2-1)B\cos\beta\ \gamma'\ \alpha' + (\mu_1+\mu_2-1)C\sin\beta\ \alpha'\ \beta'$$
$$+\big(C(\mu_1+\mu_2-1)-2\ \mu_1\ \mu_2\big)\gamma'\ \beta' + (\mu_1+\mu_2-1)B\cos\beta\sin\beta\,(\alpha')^2\Big\} \quad (3.19)$$

$$\beta'' = \frac{1}{\mu_1\ \mu_2}\Big\{(\mu_1+\mu_2-1)B\ \gamma'\ \beta' + \big(A(\mu_1+\mu_2-1)-\mu_1\ \mu_2\big)\cos\beta\sin\beta\,(\alpha')^2$$
$$+(\mu_1+\mu_2-1)B\sin\beta\ \alpha'\ \beta' + \big(A(\mu_1+\mu_2-1)-2\ \mu_1\ \mu_2\big)\cos\beta\ \gamma'\ \alpha'\Big\} \quad (3.20)$$

$$\gamma'' = \frac{1}{\mu_1\ \mu_2 \cos\beta}\Big\{(-\mu_1\ \mu_2)B\cos\beta\,(\beta')^2 + (\mu_1+\mu_2-1)B\sin\beta\cos\beta\ \gamma'\ \alpha'$$
$$+\big((\mu_1+\mu_2-1)\sin^2\beta + \mu_1\ \mu_2\cos^2\beta\big)B\cos\beta\,(\alpha')^2$$
$$+\big(C(\mu_1+\mu_2-1)\sin^2\beta + (1-D)\mu_1\ \mu_2\cos^2\beta\big)\alpha'\ \beta'$$
$$+\big(C(\mu_1+\mu_2-1)-2\ \mu_1\ \mu_2\big)\sin\beta\ \gamma'\ \beta'\Big\} \quad (3.21)$$

Onde os parâmetros μ_1 e μ_2 são os valores de momentos de inércia normalizados descritos na Eq.(3.5). Também os parâmetros A, B e C foram apresentados antes: Eq.(3.2), Eq.(3.3) e Eq.(3.4). O novo parâmetro D se escreve:

$$D = (\mu_1-\mu_2)\left(\cos^2\gamma - \sin^2\gamma\right) \quad (3.22)$$

A energia cinética da Eq.(3.18) pode-se escrever na sua forma adimensional, seguindo o critério de normalização anterior para energia cinética na Eq.(3.15), resulta:

$$EE = \mu_1\left(\alpha'\cos\beta\cos\gamma + \beta'\sin\gamma\right)^2 + \mu_2\left(-\alpha'\cos\beta\sin\gamma + \beta'\cos\gamma\right)^2 + \left(\alpha'\sin\beta + \gamma'\right)^2 \quad (3.23)$$

As equações Eq.(3.15) e Eq.(3.23), representam o mesmo valor de energia cinética do corpo no espaço, elas têm formas diferentes por que foram escritas em sistemas referenciais diferentes, mas no cálculo numérico resulta o mesmo valor.

3.1.1. Condição inicial do corpo no espaço

Inicialmente as equações de movimento são de primeira ordem, Eq.(3.13), sendo necessárias apenas as condições iniciais de posição: α_0, β_0 e γ_0.

A Figura 3.1 apresenta um esquema do impacto. Restringimo-nos a duas direções, impacto em y (ΔH_y) e impacto em x (ΔH_x), que podem ser as componentes de um impacto qualquer ortogonal ao eixo de simetria do rotor (e_s). O ângulo γ_0 não depende do impacto, mas em um rotor sem axissimetria sua posição angular na rotação própria influencia na dinâmica do movimento resultante. Este ângulo modifica a direção da configuração inercial do rotor, por exemplo: se $\gamma_0=0°$ a inércia μ_1 teria a direção x e μ_2 a direção y, se $\gamma_0=90°$ a inércia μ_1 teria a direção y e μ_2 a direção x (onde x e y refere-se a vetores em (R)).

As equações de segunda ordem, Eq.(3.19), Eq.(3.20) e Eq.(3.21) são integradas com condições iniciais de posição e velocidade: α_0, β_0, γ_0, α'_0, β'_0 e γ'_0. O resultado deve ser igual ao das equações de primeira ordem, Eq.(3.13), cuja solução se inicia com uma posição inicial mas cujas equações definem as velocidades no instante inicial:

$$\begin{bmatrix} \gamma'_0 \\ \alpha'_0 \\ \beta'_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\mu_1\,\mu_2\cos\beta_0}\begin{bmatrix} \mu_1\,\mu_2\cos\beta_0 & -C_0\sin\beta_0 & B_0\sin\beta_0 \\ 0 & C_0 & -B_0 \\ 0 & -B_0\cos\beta_0 & A_0\cos\beta_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha_0\cos\beta_0 \\ -\cos\alpha_0\sin\beta_0 \\ \sin\alpha_0 \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

Na comparação dos dois sistemas deve haver igualdade de energia cinética e de quantidade de movimento angular. Analisam-se agora soluções para dois casos em particular, impactos na direção do eixo x ou y em forma isolada.

Primeiro Caso. Se o impacto acontece no eixo y (ΔH_y), os ângulos que descrevem a posição inicial são: $\alpha_0\neq 0$, $\beta_0=0$ e γ_0 *qualquer*. Os valores das velocidades angulares iniciais são:

$$\begin{bmatrix} \gamma'_0 \\ \alpha'_0 \\ \beta'_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\mu_1\,\mu_2}\begin{bmatrix} \mu_1\,\mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & C_0 & -B_0 \\ 0 & -B_0 & A_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha_0 \\ 0 \\ \sin\alpha_0 \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

A energia inicial que será constante durante o movimento, nas duas formas apresentadas nas Eq.(3.15) e Eq.(3.23), é respectivamente:

$$EE_0 = \beta'_0\sin\alpha_0 + \gamma'_0\cos\alpha_0 = 1 + \left(\frac{A_0}{\mu_1\mu_2} - 1\right)\sin^2\alpha_0 \tag{3.26}$$

$$EE_0 = \mu_1\left(\alpha_0'\cos\gamma_0 + \beta_0'\sin\gamma_0\right)^2 + \mu_2\left(-\alpha_0'\sin\gamma_0 + \beta_0'\cos\gamma_0\right)^2 + \left(\gamma_0'\right)^2 \tag{3.27}$$

Até agora a posição do ângulo γ_0 não tem um valor específico, deste valor depende tanto a energia inicial quanto as velocidades iniciais. Experimentalmente inclusive seria um desafio sincronizar um impacto com uma posição angular definida para o rotor. Para simplificar as equações, convenientemente trabalha-se com $\gamma_0=0$, os parâmetros adimensionais iniciais: $A_0=\mu_1$, $B_0=0$ e $C_0=\mu_2$. Então, as condições inicias recalculadas com $\alpha_0\neq 0$, $\beta_0=0$ e $\gamma_0=0$ serão:

$$\begin{bmatrix} \gamma_0' \\ \alpha_0' \\ \beta_0' \end{bmatrix} = \frac{1}{\mu_1\,\mu_2}\begin{bmatrix} \mu_1\,\mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha_0 \\ 0 \\ \sin\alpha_0 \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

$$EE_0 = 1 + \left(\frac{1}{\mu_2} - 1\right)\sin^2\alpha_0 \tag{3.29}$$

A energia é obtida através da Eq.(3.27):

$$\begin{aligned} EE_0 &= \mu_1\left(\alpha_0'\right)^2 + \mu_2\left(\beta_0'\right)^2 + \left(\gamma_0'\right)^2 = \mu_1\left(0\right)^2 + \mu_2\left(\frac{\sin\alpha_0}{\mu_2}\right)^2 + \left(\cos\alpha_0\right)^2 = \\ &= \frac{1}{\mu_2}\sin^2\alpha_0 + \cos^2\alpha_0 = 1 + \left(\frac{1}{\mu_2} - 1\right)\sin^2\alpha_0 \end{aligned} \tag{3.30}$$

A energia adimensionalizada aumenta com a intensidade do impacto se $\mu_2<1$. A velocidade $\gamma'_0=\cos\alpha_0$ é definida após impacto, e pode ser utilizada como um indicador da intensidade do mesmo. Para $\beta_0=0$ a velocidade angular $\gamma'_0=\cos\alpha_0 =\omega_z$ vai servir como um parâmetro de controle do comportamento do sistema na terminologia da dinâmica não linear. Seguindo o raciocínio da Eq.(3.8), ela toma um valor normalizado diferente em cada intensidade de impacto.

Utilizando de rotações seqüenciais (item 1.3.2 do Capitulo 1) é fácil obter a velocidade angular inicial no SR(R), Eq.(3.10). Lembrando que ω_z não muda de valor ($\Delta\omega_z=0$) durante o impacto, e as velocidades ω_x e ω_y eram nulas antes do impacto, então depois do impacto: $\Delta\omega_x=\omega_x$ e $\Delta\omega_y=\omega_y$.

$${}^R\omega_0 = \begin{bmatrix} \alpha_0'\cos\left(\beta_0\right) \\ \beta_0' \\ \alpha_0'\sin\left(\beta_0\right) + \gamma_0' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

Substituindo estas variações de velocidade na Eq.(3.8), temos:

$$\Delta\omega_x = -\frac{B_0}{\mu_1\ \mu_2}\frac{M_y\ \Delta t}{I_3} = \alpha_0'\cos\left(\beta_0\right) \qquad \Delta\omega_y = \frac{A_0}{\mu_1\ \mu_2}\frac{M_y\ \Delta t}{I_3} = \beta_0' \tag{3.32}$$

Substituindo as velocidades iniciais da Eq.(3.25) na equação anterior, para um valor de γ_0 qualquer, relaciona-se o ângulo inicial e a magnitude de impacto do momento impulsivo:

$$\frac{M_y \ \Delta t}{I_3} = \sin \alpha_0 \tag{3.33}$$

Este resultado mostra que um valor de impacto na direção positiva do eixo *y* gera um ângulo positivo α_0.

Segundo Caso. Se o impacto acontece no eixo *x* (ΔH_x), os ângulos que descrevem a posição inicial são: $\alpha_0=0$, $\beta_0 \neq 0$ e γ_0 *qualquer*. As velocidades angulares iniciais neste caso são:

$$\begin{bmatrix} \gamma_0' \\ \alpha_0' \\ \beta_0' \end{bmatrix} = \frac{1}{\mu_1 \ \mu_2 \cos \beta_0} \begin{bmatrix} \mu_1 \ \mu_2 \cos \beta_0 & -C_0 \sin \beta_0 & B_0 \sin \beta_0 \\ 0 & C_0 & -B_0 \\ 0 & -B_0 \cos \beta_0 & A_0 \cos \beta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta_0 \\ -\sin \beta_0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

A energia cinética inicial normalizada para este caso, na forma da Eq.(3.15):

$$EE_0 = \gamma_0' \cos \beta_0 = 1 + \left(\frac{C_0}{\mu_1 \mu_2} - 1 \right) \sin^2 \beta_0 \tag{3.35}$$

Para simplificar as equações trabalha-se com $\gamma_0=0$, os parâmetros adimensionais iniciais: $A_0=\mu_1$, $B_0=0$ e $C_0=\mu_2$. Então, as condições inicias recalculadas com $\alpha_0=0$, $\beta_0 \neq 0$ e $\gamma_0=0$ serão:

$$\begin{bmatrix} \gamma_0' \\ \alpha_0' \\ \beta_0' \end{bmatrix} = \frac{1}{\mu_1 \ \mu_2 \cos \beta_0} \begin{bmatrix} \mu_1 \ \mu_2 \cos \beta_0 & -\mu_2 \sin \beta_0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1 \cos \beta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta_0 \\ -\sin \beta_0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

A energia inicial:

$$EE_0 = 1 + \left(\frac{1}{\mu_1} - 1 \right) \sin^2 \beta_0 \tag{3.37}$$

A energia cinética do corpo representada pela Eq.(3.23) tem a mesma forma da Eq.(3.37) quando for simplificada depois substituir nela as condições iniciais do caso.

Com o mesmo raciocínio do processo de impacto ($\Delta\omega_x=\omega_x$ e $\Delta\omega_y=\omega_y$), explicado no caso anterior. Substituindo estas variações de velocidade na Eq.(3.7), temos:

$$\Delta\omega_x = \frac{C_0}{\mu_1 \ \mu_2} \frac{M_x \ \Delta t}{I_3} = \alpha_0' \cos(\beta_0) \qquad \Delta\omega_y = -\frac{B_0}{\mu_1 \ \mu_2} \frac{M_x \ \Delta t}{I_3} = \beta_0' \tag{3.38}$$

Substituindo as velocidades iniciais da Eq.(3.36) na equação anterior, para um valor de γ_0 qualquer, relaciona-se o ângulo inicial e a magnitude de impacto do momento impulsivo:

$$\frac{M_x\ \Delta t}{I_3} = -\sin\beta_0 \tag{3.39}$$

Este resultado mostra que para um valor de impacto na direção positiva do eixo x gera um ângulo negativo β_0.

3.2.
Sistema conservativo

Se negligenciarmos qualquer tipo de atrito no Giroscópio, porém considerarmos a inércia dos seus quadros, teremos um sistema conservativo de três corpos e três graus de liberdade. Os corpos que compõem o sistema estão representados na Figura 2.2. As equações de movimento serão obtidas pelas equações de Lagrange, mantendo as coordenadas generalizadas usadas em rotações seqüenciais. A energia cinética total do sistema é a soma das energias cinéticas de cada corpo. Por ser a energia cinética um escalar seu valor é calculado em qualquer SR, mas a representação das equações pode mudar segundo o SR. Convenientemente calcula-se a energia de cada corpo no seu próprio SR. Não há variação de energia potencial.

O cálculo da energia cinética do quadro externo se faz no SR(Q), neste SR a matriz de inércia é constante no tempo, os produtos de inércia são nulos pela simetria.

$$^{Q}\mathbf{I}_{QExt} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

O quadro externo apenas tem um grau de liberdade, a sua velocidade angular é:

$$^{Q}\boldsymbol{\omega}_{QExt} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

A energia cinética do quadro externo é:

$$E_{C\,QExt} = \frac{1}{2}\dot{\alpha}^2\ I_x \tag{3.42}$$

O cálculo da energia cinética do quadro interno se faz no SR (R), este corpo tem geometria muito parecida à de um anel delgado (Fig. 2.2), pela simetria os produtos de inércia são nulos.

$$ {}^{R}\mathbf{I}_{QInt} = \begin{bmatrix} I_{R\,x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{R\,y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{R\,z} \end{bmatrix} \tag{3.43} $$

O quadro interno tem dois graus de liberdade, calcula-se sua velocidade angular mediante as duas primeiras rotações seqüenciais.

$$ {}^{R}\boldsymbol{\omega}_{QInt} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}\,\cos\beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha}\,\sin\beta \end{bmatrix} \tag{3.44} $$

A energia cinética do quadro interno é:

$$ E_{C\,QInt} = \frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 \cos^2\!\beta \, I_{\mathrm{R\,x}} + \frac{1}{2}\dot{\beta}^2 \, I_{\mathrm{R}\,y} + \frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 \sin^2\!\beta \, I_{\mathrm{R\,z}} \tag{3.45} $$

O rotor tem três graus de liberdade, e a energia cinética do rotor no SR (S) está representada por Eq.(3.18). A energia cinética total do sistema é:

$$ \begin{aligned} E_{C\,Sist} &= \frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 \, I_{\mathrm{x}} + \frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 \cos^2\!\beta \, I_{R\,x} + \frac{1}{2}\dot{\beta}^2 \, I_{R\,y} + \frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 \sin^2\!\beta \, I_{R\,z} \\ &+ \frac{1}{2}\Big(I_1 \left(\dot{\alpha}\cos\beta\cos\gamma + \dot{\beta}\sin\gamma\right)^2 + I_2\left(-\dot{\alpha}\cos\beta\sin\gamma + \dot{\beta}\cos\gamma\right)^2 + I_3\left(\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma}\right)^2 \Big) \end{aligned} \tag{3.46} $$

Aplica-se a equação de Lagrange à energia cinética do sistema, para cada ângulo, da seguinte forma:

$$ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{CSist}}{\partial \dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial E_{CSist}}{\partial \alpha} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{CSist}}{\partial \dot{\beta}}\right) - \frac{\partial E_{CSist}}{\partial \beta} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{CSist}}{\partial \dot{\gamma}}\right) - \frac{\partial E_{CSist}}{\partial \gamma} = 0 $$

As equações de movimento do sistema são normalizadas pelo mesmo processo anterior, Eq.(3.12), para trabalhar em forma adimensional. Para simplificar as equações o quadro interno tem a distribuição inercial de um anel delgado, $I_{Rx}=I_p$ e $I_{Ry}=I_{Rz}=I_d$. Depois de arranjar e simplificar as equações de movimento temos:

$$ \begin{aligned} \alpha'' = {} & \frac{1}{\left(A\mu_d + \mu_1\,\mu_2\right)\cos^2\beta + \left(\mu_x + \mu_d \sin^2\beta + \mu_p \cos^2\beta\right)\left(C + \mu_d\right)} \Big\{ \big(\mu_1 \\ & + \mu_2 + 2\mu_d - 1\big) B \cos^2\beta \; \gamma' \, \alpha' + \left(\mu_1 + \mu_2 + \mu_p - 1\right) B \cos^2\beta \sin\beta \left(\alpha'\right)^2 \\ & + \left(C + \mu_d\right)\left(\mu_1 + \mu_2 + 2\mu_p - 2\mu_d - 1\right)\cos\beta \sin\beta \; \alpha' \, \beta' \\ & + \Big(\left(\mu_1 + \mu_2 - 1\right) C - 2\mu_1\,\mu_2 - \left(d+1\right)\mu_d \Big)\cos\beta \; \gamma' \, \beta' \Big\} \end{aligned} \tag{3.47} $$

$$\begin{aligned}\beta'' = {} & \frac{1}{\left(A\mu_d + \mu_1\,\mu_2\right)\cos^2\beta + \left(\mu_x + \mu_d\sin^2\beta + \mu_p\cos^2\beta\right)\left(C + \mu_d\right)}\Big\{\big(\mu_1 \\ & + \mu_2 + 2\mu_p - 2\mu_d - 1\big)B\sin\beta\cos^2\beta\,\alpha'\,\beta' + \Big(\big(A\left(\mu_1 + \mu_2 - 1\right) \\ & - 2\mu_1\,\mu_2\big)\cos^2\beta + \left(\mu_x + \mu_d\sin^2\beta + \mu_p\cos^2\beta\right)\left(D - 1\right)\Big)\cos\beta\,\gamma'\,\alpha' \\ & + \Big(\big(A\left(\mu_1 + \mu_2 + \mu_p - \mu_d - 1\right) - \mu_1\,\mu_2\big)\cos^2\beta + \left(A + \mu_p - \mu_d - 1\right)\big(\mu_x \\ & + \mu_p\cos^2\beta + \mu_d\sin^2\beta\big)\Big)\cos\beta\sin\beta\left(\alpha'\right)^2 + \Big(\left(\mu_1 + \mu_2 - 1\right)\cos^2\beta + 2\,\mu_x \\ & + \mu_d\sin^2\beta + \mu_p\cos^2\beta\Big)B\,\gamma'\,\beta'\Big\}\end{aligned} \tag{3.48}$$

$$\begin{aligned}\gamma'' = {} & \frac{1}{\left(A\mu_d + \mu_1\,\mu_2\right)\cos^2\beta + \left(\mu_x + \mu_d\sin^2\beta + \mu_p\cos^2\beta\right)\left(C + \mu_d\right)}\Big\{\Big(\big(\mu_d \\ & + C\big)\left(-\mu_x - \mu_d\sin^2\beta - \mu_p\cos^2\beta\right) + \left(-\mu_1\,\mu_2 - A\,\mu_p\right)\cos^2\beta\Big)B\left(\beta'\right)^2 \\ & + \Big(\left(C + \mu_d\right)\left(\mu_1 + \mu_2 + 2\mu_p - 2\mu_d - 1\right)\sin^2\beta + \left(A\,\mu_d + \mu_1\,\mu_2\right)\left(1 - D\right)\cos^2\beta \\ & + \left(\mu_x + \mu_d\sin^2\beta + \mu_p\cos^2\beta\right)\left(1 - D\right)\left(C + \mu_d\right)\Big)\cos\beta\,\alpha'\,\beta' \\ & + \Big(\left(A\,\mu_d + \mu_1\,\mu_2\right)\cos^2\beta + \left(\mu_1 + \mu_2 + \mu_p - 1\right)\sin^2\beta + \big(\mu_d\sin^2\beta + \mu_p\cos^2\beta \\ & + \mu_x\big)\left(C + \mu_d\right)\Big)B\cos^2\beta\left(\alpha'\right)^2 + \left(\mu_1 + \mu_2 + 2\mu_d - 1\right)B\sin\beta\cos^2\beta\,\gamma'\,\alpha' \\ & + \Big(\left(\mu_1 + \mu_2 - 1\right)C - 2\mu_1\,\mu_2 - \left(D + 1\right)\mu_d\Big)\sin\beta\cos\beta\,\gamma'\,\beta'\Big\}\end{aligned} \tag{3.49}$$

Onde os parâmetros A, B, C e D foram apresentados anteriormente, Eq.(3.2), Eq.(3.3), Eq.(3.4) e Eq.(3.22). Os momentos de inércia μ_1 e μ_2 do rotor foram apresentados na Eq.(3.5). O valor μ_x é o momento de inércia normalizado do quadro externo no eixo x (Eq.(3.40)), os valores μ_p e μ_d são os momentos de inércia do quadro interno, Eq.(3.43), e são definidos da seguinte forma:

$$\mu_x = I_x / I_3 \qquad \mu_p = I_{Rx} / I_3 \qquad \mu_d = I_{Ry} / I_3 = I_{Rz} / I_3 \tag{3.50}$$

A equação adimensional da energia cinética, seguindo o mesmo raciocínio da Eq.(3.15), é:

$$\begin{aligned}EE_{Sist} = {} & \alpha'^2\,\mu_x + \alpha'^2\cos^2\beta\,\mu_p + \beta'^2\,\mu_d + \alpha'^2\sin^2\beta\,\mu_d + \mu_1\left(\alpha'\cos\beta\cos\gamma + \beta'\sin\gamma\right)^2 \\ & + \mu_2\left(-\alpha'\cos\beta\sin\gamma + \beta'\cos\gamma\right)^2 + \left(\alpha'\sin\beta + \gamma'\right)^2\end{aligned} \tag{3.51}$$

A quantidade de movimento angular também fundamental para entender o processo de impacto, é a soma das quantidades de movimentos angulares de cada corpo do sistema. Convenientemente calculamos a quantidade de movimento angular no SR(R), isto diminui a complexidade do cálculo numérico. A quantidade de movimento angular do rotor se calcula com a velocidade angular da Eq.(3.10) e a matriz de inércia da Eq.(3.1).

$$ {}^{R}\mathbf{H}_{Rot} = I_3 \begin{bmatrix} A\,\dot{\alpha}\,\cos\beta + B\,\dot{\beta} \\ B\,\dot{\alpha}\,\cos\beta + C\,\dot{\beta} \\ \dot{\alpha}\,\sin\beta + \dot{\gamma} \end{bmatrix} \tag{3.52} $$

A quantidade de movimento angular do quadro interno se calcula com a velocidade angular da Eq.(3.44) e a matriz inércia da Eq.(3.44).

$$ {}^{R}\mathbf{H}_{QInt} = \begin{bmatrix} I_{R\,x}\,\dot{\alpha}\,\cos\beta \\ I_{R\,y}\,\dot{\beta} \\ I_{R\,z}\,\dot{\alpha}\,\sin\beta \end{bmatrix} \tag{3.53} $$

A velocidade angular da Eq.(3.41) e a matriz de inércia da Eq.(3.40) nos fornecem a quantidade de movimento angular do quadro externo no SR(Q), o passo seguinte é levá-lo ao sistema referencial (R) mediante a matriz transformação de coordenadas da Eq.(1.4).

$$ {}^{R}\mathbf{H}_{QExt} = \begin{bmatrix} I_x\,\dot{\alpha}\,\cos\beta \\ 0 \\ I_x\,\dot{\alpha}\,\sin\beta \end{bmatrix} \tag{3.54} $$

Finalmente, a quantidade de movimento angular do sistema resulta da soma dos vetores das Eq.(3.52), Eq.(3.53) e Eq.(3.54).

$$ {}^{R}\mathbf{H}_{Sist} = \begin{bmatrix} I_3\left(A\,\dot{\alpha}\,\cos\beta + B\,\dot{\beta}\right) + I_{R\,x}\,\dot{\alpha}\,\cos\beta + I_x\,\dot{\alpha}\,\cos\beta \\ I_3\left(B\,\dot{\alpha}\,\cos\beta + C\,\dot{\beta}\right) + I_{R\,y}\,\dot{\beta} \\ I_3\left(\dot{\alpha}\,\sin\beta + \dot{\gamma}\right) + I_{R\,z}\,\dot{\alpha}\,\sin\beta + I_x\,\dot{\alpha}\,\sin\beta \end{bmatrix} \tag{3.55} $$

A equação anterior é normalizada pelo mesmo processo antes apresentado na Eq.(3.12), e os valores dos momentos de inércia adimensionais das Eq.(3.5) e Eq.(3.50). A quantidade de movimento angular do sistema na forma normalizada:

$$ {}^{R}\mathbf{H}_{0\,Sist} = \begin{bmatrix} \left(A + \mu_p + \mu_x\right)\alpha'\cos\beta + B\,\beta' \\ \left(C + \mu_d\right)\beta' + B\,\alpha'\cos\beta \\ \left(1 + \mu_d + \mu_x\right)\alpha'\sin\beta + \gamma' \end{bmatrix} \tag{3.56} $$

Tendo a quantidade de movimento angular do sistema no SR (R) pode-se representa-la em qualquer outro sistema referencial. A representação no SR(F) é particularmente útil para observar a variação do vetor no espaço acompanhando o movimento.

3.2.1. Condição inicial do sistema conservativo

As equações que descrevem o movimento são de segunda ordem, sendo necessárias portanto condições iniciais de posição e velocidade mas, para elas descreverem o resultado de um impacto deve-se ter em conta os aspectos discutidos no item 3.1.1. Os ângulos iniciais (α_0, β_0 e γ_0) aparecem da definição dos dois SR imediatamente depois do impacto, e as velocidades iniciais são obtidas da mudança do vetor quantidade de movimento angular.

No instante inicial (depois do impacto) a quantidade de movimento angular é a mesma apresentada na Eq.(3.11), transformando-a ao SR (R), e depois de passando-a pelo processo de normalização resulta na forma adimensional:

$$ {}^{R}\mathbf{H}_{0Sist\,(t=0)} = {}^{R}\mathbf{T}^{Q}\ {}^{Q}\mathbf{T}^{F}\ {}^{F}\mathbf{h}_{G} = \begin{bmatrix} -\sin(\beta_0)\cos(\alpha_0) \\ \sin(\alpha_0) \\ \cos(\beta_0)\cos(\alpha_0) \end{bmatrix} \tag{3.57} $$

Igualando as equações Eq.(3.56) e Eq.(3.57) obtêm-se as velocidades angulares inicias.

$$ \alpha_0' = -\frac{\sin\beta_0\cos\alpha_0\ \mu_d + C_0\sin\beta_0\cos\alpha_0 + B_0\sin\alpha_0}{\left(\left(\mu_x+\mu_p\right)\left(\mu_d+C_0\right)+A_0\ \mu_d+\mu_1\ \mu_2\right)\cos\beta_0} \tag{3.58} $$

$$ \beta_0' = \frac{B_0\sin\beta_0\cos\alpha_0 + \left(\mu_x+\mu_p\right)\sin\alpha_0 + A_0\sin\alpha_0}{\left(\mu_x+\mu_p\right)\left(\mu_d+C_0\right)+A_0\ \mu_d+\mu_1\ \mu_2} \tag{3.59} $$

$$ \gamma_0' = \frac{1}{\left(\left(\mu_x+\mu_p\right)\left(\mu_d+C_0\right)+A_0\ \mu_d+\mu_1\ \mu_2\right)\cos\beta_0}\left\{\left(\left(\mu_x+\mu_p\right)\left(\mu_d+C_0\right)+A_0\ \mu_d\right.\right. $$

$$ \left.\left. +\mu_1\ \mu_2\right)\cos^2\beta_0\cos\alpha_0 + \left(\mu_x+\mu_d+1\right)\left(\left(\mu_d+C_0\right)\sin\beta_0\cos\alpha_0 + B_0\sin\alpha\right)\sin\beta_0\right\} \tag{3.60} $$

Com as velocidades inicias em função dos ângulos inicias, as condições iniciais possíveis ficam completamente definidas. No caso do corpo no espaço a magnitude do impacto fica completamente definida pelo ângulo inicial, e no caso do sistema vale a mesma conclusão.

Seguindo o raciocínio das condições iniciais do impacto, Eq.(3.6), e usando a quantidade de movimento angular para o sistema conservativo da Eq.(3.56), temos a equação que relaciona a magnitude do impacto com o ângulo inicial. Por exemplo, no impacto em y (ΔH_y), os ângulos que descrevem a posição inicial são: $\alpha_0 \neq 0$, $\beta_0 = 0$ (para um valor de γ_0 qualquer), então:

$$\Delta\omega_x = -\frac{B_0}{\left(\left(\mu_x+\mu_p\right)\left(\mu_d+C_0\right)+A_0\ \mu_d+\mu_1\ \mu_2\right)}\frac{M_y\ \Delta t}{I_3} = \alpha_0' \cos\left(\beta_0\right)$$

$$\Delta\omega_y = \frac{\left(A_0+\mu_x+\mu_p\right)}{\left(\left(\mu_x+\mu_p\right)\left(\mu_d+C_0\right)+A_0\ \mu_d+\mu_1\ \mu_2\right)}\frac{M_y\ \Delta t}{I_3} = \beta_0'$$

Substituindo as velocidades iniciais da Eq.(3.58) e Eq.(3.59) chega-se a:

$$\frac{M_y\ \Delta t}{I_3} = \sin\alpha_0$$

Para o impacto no eixo x (ΔH_x) chega-se ao mesmo resultado da Eq.(3.39). Portanto a magnitude do impacto fica definida pelo ângulo inicial.

3.3. Sistema com atrito

Não considerando o atrito com o meio que envolve o aparelho, a dissipação se limita ao atrito que existe entre os corpos componentes do Giroscópio. Considera-se viscoso este atrito para efeito de representação matemática. Continuando a usar rotações seqüenciais trabalha-se com os quatro SR da Eq.(1.3). Atente-se que o SR (Q) é solidário ao quadro externo, o SR (R) ao quadro interno e o SR (S) ao rotor. Em muitas ocasiões, nas fórmulas, faz-se referencia ao SR em lugar do corpo.

Para explicitar as forças entre os corpos, as equações de movimento serão obtidas pelas leis de Newton e Euler, os três corpos do sistema serão analisados isoladamente (Figura 2.2). Existem momentos ou forças internas de ação e reação nas uniões (mancais) dos corpos que compõem o sistema, estas forças relacionam as equações obtidas na análise de cada corpo, e finalmente, se obtêm as equações de movimento do Giroscópio.

Inicia-se a análise pelo quadro externo, este corpo tem apenas um grau de liberdade e a sua velocidade angular foi apresentada na Eq.(3.41). O quadro externo interage com o sistema fixo (F) pelo mancal que há na sua base (Fig. 2.5). A equação que relaciona uma componente do momento (torque) do quadro interno sobre o quadro externo é:

$$M_{R/Q}^{(x)} - M_{Q/F}^{Atrito} = I_x\,\ddot{\alpha} \tag{3.61}$$

Onde $M^{(x)}_{R/Q}$ é o momento do quadro interno sobre o quadro externo (componente do eixo x comum entre o SR (F) e SR (Q)), $M^{Atrito}_{Q/F}$ é o momento resistivo no mancal que fica na base do quadro externo, I_x foi definida na Eq.(3.40). O momento resistivo devido ao atrito viscoso com coeficiente C_{FQ} entre (F) e (Q):

$$M^{Atrito}_{Q/F} = C_{FQ}\ \ddot{\alpha} \tag{3.62}$$

A equação Eq.(3.61) representada no SR(Q), pode ser escrita como:

$$M^{(x)}_{R/Q} = I_x\ \ddot{\alpha} + C_{FQ}\ \ddot{\alpha} \tag{3.63}$$

Continua-se a análise pelo quadro interno, a velocidade do quadro interno foi apresentada na Eq.(3.44). O momento (torque) do quadro externo sobre o quadro interno através dos mancais, no SR(R):

$${}^{R}\mathbf{M}_{Q/R} = \begin{bmatrix} M^{(x'')}_{Q/R} \\ -C_{QR}\ \dot{\beta} \\ M^{(z'')}_{Q/R} \end{bmatrix} \tag{3.64}$$

De forma equivalente o momento no quadro externo devido ao quadro interno, no SR(Q), pode se escrever de forma geral como:

$${}^{Q}\mathbf{M}_{R/Q} = \begin{bmatrix} M^{(x)}_{R/Q} \\ M^{(y')}_{R/Q} \\ M^{(z')}_{R/Q} \end{bmatrix} \tag{3.65}$$

O atrito viscoso também está presente no mancal que une o quadro interno e o rotor. Os momentos oriundos do rotor sobre o quadro interno no SR(R):

$${}^{R}\mathbf{M}_{S/R} = \begin{bmatrix} M^{(x'')}_{S/R} \\ M^{(y'')}_{S/R} \\ C_{RS}\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \tag{3.66}$$

O momento no quadro interno será calculado utilizando a lei de Euler. O ponto de referência indicado por R indica o centro de massa do quadro interno, que, ao desconsiderar imprecisões de fabricação, coincide com o centro de massa do rotor (S).

$${}^{R}\mathbf{M}_{R} = \frac{d\,\mathbf{H}_R}{d\,t} = {}^{R}\dot{\mathbf{H}}_R + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_R\ \mathbf{H}_R \tag{3.67}$$

A matriz de inércia do quadro interno foi apresentada na Eq.(3.43), e depois foi simplificada assumindo uma geometria de um anel delgado. Nestas condições a quantidade de movimento angular do quadro interno, Eq.(3.53), se escreve como:

$$ {}^{R}\mathbf{H}_{R} = \begin{bmatrix} I_p\ \dot{\alpha}\ \cos\beta \\ I_d\ \dot{\beta} \\ I_d\ \dot{\alpha}\ \sin\beta \end{bmatrix} \tag{3.68} $$

A matriz associada til (item 1.3 do Capítulo 1) à velocidade angular do quadro interno, mostrada na Eq.(3.44), é escrita como:

$$ \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{R} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\alpha}\sin\beta & \dot{\beta} \\ \dot{\alpha}\sin\beta & 0 & -\dot{\alpha}\cos\beta \\ -\dot{\beta} & \dot{\alpha}\cos\beta & 0 \end{bmatrix} \tag{3.69} $$

E, para completar a Eq.(3.67), deriva-se o vetor quantidade de movimento angular da Eq.(3.68), resultando:

$$ {}^{R}\dot{\mathbf{H}}_{R} = \begin{bmatrix} I_p\ \left(\ddot{\alpha}\ \cos\beta - \dot{\alpha}\ \dot{\beta}\ \sin\beta\right) \\ I_d\ \ddot{\beta} \\ I_d\ \left(\ddot{\alpha}\ \sin\beta + \dot{\alpha}\ \dot{\beta}\ \cos\beta\right) \end{bmatrix} \tag{3.70} $$

Substituindo as três ultimas equações anteriores na Eq.(3.67) temos:

$$ {}^{R}\mathbf{M}_{R} = \begin{bmatrix} I_p\ \left(\ddot{\alpha}\ \cos\beta - \dot{\alpha}\ \dot{\beta}\ \sin\beta\right) \\ I_d\ \ddot{\beta} + \left(I_p - I_d\right)\ \dot{\alpha}^2\ \sin\beta\ \cos\beta \\ I_d\ \left(\ddot{\alpha}\ \sin\beta + \dot{\alpha}\ \dot{\beta}\ \cos\beta\right) - \left(I_p - I_d\right)\ \dot{\alpha}\ \dot{\beta}\ \cos\beta \end{bmatrix} \tag{3.71} $$

Outro caminho para chegar ao momento no quadro interno, é pela soma dos momentos que exercem o quadro externo e o rotor.

$$ {}^{R}\mathbf{M}_{R} = {}^{R}\mathbf{M}_{Q/R} + {}^{R}\mathbf{M}_{S/R} \tag{3.72} $$

Calcula-se o momento do quadro externo sobre o quadro interno no SR(Q), transformando a Eq.(3.64) do SR (R) para (Q):

$$ {}^{Q}\mathbf{M}_{Q/R} = \begin{bmatrix} M_{Q/R}^{(x)} \\ M_{Q/R}^{(y')} \\ M_{Q/R}^{(z')} \end{bmatrix} = {}^{Q}\mathbf{T}^{R}\ {}^{R}\mathbf{M}_{Q/R} = \begin{bmatrix} M_{Q/R}^{(x'')}\cos\beta + M_{Q/R}^{(z'')}\sin\beta \\ -C_{QR}\ \dot{\beta} \\ M_{Q/R}^{(z'')}\cos\beta - M_{Q/R}^{(x'')}\sin\beta \end{bmatrix} \tag{3.73} $$

Os momentos de ação e reação entre o quadro interno e externo são:

$$ {}^{Q}\mathbf{M}_{Q/R} = -{}^{Q}\mathbf{M}_{R/Q} \tag{3.74} $$

Igualando a componente no eixo x da Eq.(3.74) com a Eq.(3.63) obtida da análise do quadro externo:

$$M_{Q/R}^{(x)} = -M_{R/Q}^{(x)} = -I_x\,\ddot{\alpha} - C_{FQ}\,\dot{\alpha} \tag{3.75}$$

Na Eq.(3.72) substitui-se as equações Eq.(3.71) e Eq.(3.66):

$$\begin{bmatrix} I_p\left(\ddot{\alpha}\cos\beta - \dot{\alpha}\,\dot{\beta}\sin\beta\right) \\ I_d\,\ddot{\beta} + \left(I_p - I_d\right)\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta \\ I_d\left(\ddot{\alpha}\sin\beta + \dot{\alpha}\,\dot{\beta}\cos\beta\right) - \left(I_p - I_d\right)\dot{\alpha}\,\dot{\beta}\cos\beta \end{bmatrix} = {}^{R}\mathbf{M}_{Q/R} + \begin{bmatrix} M_{S/R}^{(x'')} \\ M_{S/R}^{(y'')} \\ C_{RS}\,\dot{\gamma} \end{bmatrix} \tag{3.76}$$

Então o momento do quadro externo sobre o quadro interno no SR(R):

$${}^{R}\mathbf{M}_{Q/R} = \begin{bmatrix} I_p\left(\ddot{\alpha}\cos\beta - \dot{\alpha}\,\dot{\beta}\sin\beta\right) - M_{S/R}^{(x'')} \\ I_d\,\ddot{\beta} + \left(I_p - I_d\right)\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta - M_{S/R}^{(y'')} \\ I_d\left(\ddot{\alpha}\sin\beta + \dot{\alpha}\,\dot{\beta}\cos\beta\right) - \left(I_p - I_d\right)\dot{\alpha}\,\dot{\beta}\cos\beta - C_{RS}\,\dot{\gamma} \end{bmatrix} \tag{3.77}$$

Passando o momento anterior ao SR(Q):

$${}^{Q}\mathbf{M}_{Q/R} = {}^{Q}\mathbf{T}^{R}\;{}^{R}\mathbf{M}_{Q/R} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} {}^{R}\mathbf{M}_{Q/R} \tag{3.78}$$

Considerando apenas a componente em x do momento ${}^{Q}M_{Q/R}$ no SR(Q), Eq.(3.78), obtém-se o mesmo resultado que a Eq.(3.75),

$$\begin{aligned} -I_x\,\ddot{\alpha} - C_{FQ}\,\dot{\alpha} \quad &= \quad \left(I_p\left(\ddot{\alpha}\cos\beta - \dot{\alpha}\,\dot{\beta}\sin\beta\right) - M_{S/R}^{(x'')}\right)\cos\beta \\ &+\left(I_d\left(\ddot{\alpha}\sin\beta + \dot{\alpha}\,\dot{\beta}\cos\beta\right) - \left(I_p - I_d\right)\dot{\alpha}\,\dot{\beta}\cos\beta - C_{RS}\,\dot{\gamma}\right)\sin\beta \end{aligned} \tag{3.79}$$

Arranjando a equação anterior tem-se:

$$\begin{aligned} M_{S/R}^{(x'')}\cos\beta &= \ddot{\alpha}\left(I_x + I_p\cos^2\beta + I_d\sin^2\beta\right) + C_{AF}\,\dot{\alpha} - C_{BC}\,\dot{\gamma}\sin\beta \\ &-2\left(I_p - I_d\right)\dot{\alpha}\,\dot{\beta}\cos\beta\sin\beta \end{aligned} \tag{3.80}$$

Considerando o momento do quadro externo sobre o quadro interno no SR (R), Eq.(3.77), a componente no eixo y' deve ser igual à componente da Eq.(3.64), eliminando com isso mais uma incógnita.

$$I_d\,\ddot{\beta} + \left(I_p - I_d\right)\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta - M_{S/R}^{(y'')} = -C_{QR}\,\dot{\beta} \tag{3.81}$$

Arranjando a equação anterior:

$$M_{S/R}^{(y'')} = I_d\,\ddot{\beta} + \left(I_p - I_d\right)\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta + C_{QR}\,\dot{\beta} \tag{3.82}$$

O último corpo analisado é o rotor, SR (S). A velocidade do rotor no SR (R) foi apresentada na Eq.(3.10), e a matriz de inércia na Eq.(3.1). O momento do quadro interno sobre o rotor, pelo efeito de ação e reação na Eq.(3.66), pode ser calculado também pela lei de Euler:

$$ {}^{R}\mathbf{M}_{R/S} = -{}^{R}\mathbf{M}_{S/R} = -\begin{bmatrix} M_{S/R}^{(x'')} \\ M_{S/R}^{(y'')} \\ C_{RS}\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = {}^{R}\dot{\mathbf{H}}_{R/S} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{R}\ {}^{R}\mathbf{H}_{R/S} \tag{3.83} $$

A quantidade de movimento angular ${}^{R}\mathbf{H}_{R/S}$ é a mesma da Eq.(3.52), e pode ser simplificada como:

$$ {}^{R}\mathbf{H}_{R/S} = I_3 \begin{bmatrix} A\ \dot{\alpha}\ \cos\beta + B\ \dot{\beta} \\ B\ \dot{\alpha}\ \cos\beta + C\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha}\ \sin\beta + \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} \tag{3.84} $$

A matriz associada til da velocidade angular foi apresentada na Eq.(3.69). O produto da matriz associada pela quantidade de movimento angular simplificada da Eq.(3.84), dá como resultado:

$$ \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{R}\ {}^{R}\mathbf{H}_{R/S} = \begin{bmatrix} -h_y\ \dot{\alpha}\ \sin\beta + h_z\ \dot{\beta} \\ h_x\ \dot{\alpha}\ \sin\beta - h_z\ \dot{\alpha}\ \cos\beta \\ -h_x\ \dot{\beta} + h_y\ \dot{\alpha}\ \cos\beta \end{bmatrix} \tag{3.85} $$

Deriva-se a forma simplificada do vetor quantidade de movimento angular, Eq.(3.84), e junto com a Eq.(3.85), substitui-se na Eq.(3.83) para obter o momento do quadro interno sobre o rotor.

$$ -1 \begin{bmatrix} M_{S/R}^{(x'')} \\ M_{S/R}^{(y'')} \\ C_{RS}\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{h}_x - h_y\ \dot{\alpha}\ \sin\beta + h_z\ \dot{\beta} \\ \dot{h}_y + h_x\ \dot{\alpha}\ \sin\beta - h_z\ \dot{\alpha}\ \cos\beta \\ \dot{h}_z - h_x\ \dot{\beta} + h_y\ \dot{\alpha}\ \cos\beta \end{bmatrix} \tag{3.86} $$

Estas são as incógnitas que faltavam nas equações: Eq.(3.80) e Eq.(3.82). Quando se substitui as incógnitas na Eq.(3.86) obtemos as equações que descrevem o movimento do sistema.

Ao analisar a primeira linha da Eq.(3.86), precisa-se multiplicar pelo termo *cosβ* para que a incógnita fique igual à da Eq.(3.80):

$$ M_{S/R}^{(x'')}\ \cos\beta + \left(\dot{h}_x - h_y\ \dot{\alpha}\ \sin\beta + h_z\ \dot{\beta}\right)\cos\beta = 0 \tag{3.87} $$

As outras linhas da Eq.(3.86) são:

$$M_{S/R}^{(y'')} + \dot{h}_y + h_x \ \dot{\alpha} \ \sin\beta - h_z \ \dot{\alpha} \ \cos\beta = 0 \tag{3.88}$$

$$C_{RS} \ \dot{\gamma} + \dot{h}_z - h_x \ \dot{\beta} + h_y \ \dot{\alpha} \ \cos\beta = 0 \tag{3.89}$$

Agora, faltam apenas as derivadas de h_x, h_y e h_z, que são obtidas derivando a Eq.(3.84) o que inclui os parâmetros apresentados nas equações Eq.(3.2), Eq.(3.3) e Eq.(3.4). Considerando algumas propriedades dos parâmetros A, B, C e D, com: $\dot{A} = -2\,\dot{B}\,\dot{\gamma}$, $\dot{C} = 2\,\dot{B}\,\dot{\gamma}$, $\dot{B} = \dot{D}\,\dot{\gamma}$, as derivadas são:

$$\dot{h}_x = I_3\left(-2\,B\,\dot{\gamma}\cos\beta\,\dot{\alpha} - A\sin\beta\,\dot{\alpha}\,\dot{\beta} + A\cos\beta\,\ddot{\alpha} + D\,\dot{\gamma}\,\dot{\beta} + B\,\ddot{\beta}\right) \tag{3.90}$$

$$\dot{h}_y = I_3\left(D\,\dot{\gamma}\cos\beta\,\dot{\alpha} - B\sin\beta\,\dot{\alpha}\,\dot{\beta} + B\cos\beta\,\ddot{\alpha} + 2\,B\,\dot{\gamma}\,\dot{\beta} + C\,\ddot{\beta}\right) \tag{3.91}$$

$$\dot{h}_z = I_3\left(\sin\beta\,\ddot{\alpha} + \dot{\alpha}\,\dot{\beta}\cos\beta + \ddot{\gamma}\right) \tag{3.92}$$

Substituindo todas as incógnitas que apresentam as equações: Eq.(3.80), Eq.(3.82), Eq.(3.90), Eq.(3.91) e Eq.(3.92) nas equações finais: Eq.(3.87), Eq.(3.88) e Eq.(3.89), obtêm-se as equações de movimento:

$$\begin{aligned}&\left(I_3\,A\cos^2\beta + I_x + I_p\cos^2\beta + I_d\sin^2\beta\right)\ddot{\alpha} + I_3\,B\,\ddot{\beta}\cos\beta - 2\,I_3\,B\,\dot{\alpha}\,\dot{\gamma}\cos^2\beta \\ &-\left(\left(A + C - 1\right)I_3 + 2\left(I_p - I_d\right)\right)\dot{\alpha}\,\dot{\beta}\cos\beta\sin\beta + \left(D + 1\right)I_3\,\dot{\beta}\,\dot{\gamma}\cos\beta \\ &-I_3\,B\left(\alpha'\right)^2\sin\beta\cos^2\beta + C_{FQ}\,\dot{\alpha} - C_{RS}\,\dot{\gamma} = 0\end{aligned} \tag{3.93}$$

$$\begin{aligned}&\left(I_3\,C + I_d\right)\ddot{\beta} + I_3\,B\,\ddot{\alpha}\cos\beta + \left(I_3\left(A + 1\right) + I_p - I_d\right)\sin\beta\cos\beta\left(\dot{\alpha}\right)^2 + 2\,I_3\,b\,\dot{\gamma}\,\dot{\beta} \\ &+I_3\left(D - 1\right)\dot{\alpha}\,\dot{\gamma}\cos\beta + C_{QR}\,\dot{\beta} = 0\end{aligned} \tag{3.94}$$

$$I_3\,\ddot{\gamma} + I_3\,\ddot{\alpha}\sin\beta + I_3\left(1 - D\right)\dot{\alpha}\,\dot{\beta}\cos\beta + I_3\,B\cos^2\beta\left(\dot{\alpha}\right)^2 - I_3\,B\left(\dot{\beta}\right)^2 + C_{RS}\,\dot{\gamma} = 0 \tag{3.95}$$

Estas equações devem ser normalizadas, com o mesmo processo definido anteriormente, as derivadas se alteram de acordo com a Eq.(3.12), e as inércias adimensionais com as Eq.(3.5) e Eq.(3.50). Um novo parâmetro resulta do processo de normalização para o coeficiente de atrito viscoso, em sua forma normalizada se escreve:

$$k_{FQ} = \frac{C_{FQ}}{\nu\ I_3}, \quad k_{QR} = \frac{C_{QR}}{\nu\ I_3}, \quad k_{RS} = \frac{C_{RS}}{\nu\ I_3} \tag{3.96}$$

Finalmente, as equações do movimento que descrevem a dinâmica do Giroscópio, na sua forma adimensional, são:

$$\alpha'' = \frac{1}{\left(A\mu_d + \mu_1\,\mu_2\right)\cos^2\beta + \left(\mu_x + \mu_d\,\sin^2\beta + \mu_p\,\cos^2\beta\right)\left(C + \mu_d\right)}\Big\{\big(\mu_1$$

$$+\mu_2 + 2\mu_d - 1\big)B\,\cos^2\beta\,\gamma'\,\alpha' + \left(\mu_1 + \mu_2 + \mu_p - 1\right)B\,\cos^2\beta\,\sin\beta\,\left(\alpha'\right)^2$$

$$+\left(C + \mu_d\right)\left(\mu_1 + \mu_2 + 2\mu_p - 2\mu_d - 1\right)\cos\beta\,\sin\beta\,\alpha'\,\beta'$$

$$+\left(\left(\mu_1 + \mu_2 - 1\right)C - 2\mu_1\,\mu_2 - \left(d + 1\right)\mu_d\right)\cos\beta\,\gamma'\,\beta'$$

$$+\left(\mu_d + C\right)\sin\beta\,k_{RS}\,\gamma' + B\,\cos\beta\,k_{QR}\,\beta' - \left(\mu_d + C\right)k_{FQ}\,\alpha'\Big\} \tag{3.97}$$

$$\beta'' = \frac{1}{\left(A\mu_d + \mu_1\,\mu_2\right)\cos^2\beta + \left(\mu_x + \mu_d\,\sin^2\beta + \mu_p\,\cos^2\beta\right)\left(C + \mu_d\right)}\Big\{\big(\mu_1$$

$$+\mu_2 + 2\mu_p - 2\mu_d - 1\big)B\,\sin\beta\,\cos^2\beta\,\alpha'\,\beta' + \Big(\big(A\left(\mu_1 + \mu_2 - 1\right)$$

$$-2\mu_1\,\mu_2\big)\cos^2\beta + \left(\mu_x + \mu_d\,\sin^2\beta + \mu_p\,\cos^2\beta\right)\left(D - 1\right)\Big)\cos\beta\,\gamma'\,\alpha'$$

$$+\Big(\Big(A\left(\mu_1 + \mu_2 + \mu_p - \mu_d - 1\right) - \mu_1\,\mu_2\Big)\cos^2\beta + \left(A + \mu_p - \mu_d - 1\right)\big(\mu_x$$

$$+\mu_p\,\cos^2\beta + \mu_d\,\sin^2\beta\big)\Big)\cos\beta\,\sin\beta\,\left(\alpha'\right)^2 + \Big(\left(\mu_1 + \mu_2 - 1\right)\cos^2\beta + 2\,\mu_x$$

$$+\mu_d\,\sin^2\beta + \mu_p\,\cos^2\beta\Big)B\,\gamma'\,\beta' + B\,\cos\beta\,\sin\beta\,k_{RS}\,\gamma'$$

$$+\left(A\,\cos^2\beta + \mu_x + \mu_d\,\sin^2\beta + \mu_p\,\cos^2\beta\right)k_{QR}\,\beta' - B\,\cos\beta\,k_{FQ}\,\alpha'\Big\} \tag{3.98}$$

$$\gamma'' = \frac{1}{\left(A\mu_d + \mu_1\,\mu_2\right)\cos^2\beta + \left(\mu_x + \mu_d\,\sin^2\beta + \mu_p\,\cos^2\beta\right)\left(C + \mu_d\right)}\Big\{\Big(\big(\mu_d$$

$$+C\big)\left(-\mu_x - \mu_d\,\sin^2\beta - \mu_p\,\cos^2\beta\right) + \left(-\mu_1\,\mu_2 - A\,\mu_p\right)\cos^2\beta\Big)B\,\left(\beta'\right)^2$$

$$+\Big(\left(C + \mu_d\right)\left(\mu_1 + \mu_2 + 2\mu_p - 2\mu_d - 1\right)\sin^2\beta + \left(A\,\mu_d + \mu_1\,\mu_2\right)\left(1 - D\right)\cos^2\beta$$

$$+\left(\mu_x + \mu_d\,\sin^2\beta + \mu_p\,\cos^2\beta\right)\left(1 - D\right)\left(C + \mu_d\right)\Big)\cos\beta\,\alpha'\,\beta'$$

$$+\Big(\left(A\,\mu_d + \mu_1\,\mu_2\right)\cos^2\beta + \left(\mu_1 + \mu_2 + \mu_p - 1\right)\sin^2\beta + \big(\mu_d\,\sin^2\beta + \mu_p\,\cos^2\beta$$

$$+\mu_x\big)\left(C + \mu_d\right)\Big)B\,\cos^2\beta\,\left(\alpha'\right)^2 + \left(\mu_1 + \mu_2 + 2\mu_d - 1\right)B\,\sin\beta\,\cos^2\beta\,\gamma'\,\alpha'$$

$$+\left(\left(\mu_1 + \mu_2 - 1\right)C - 2\mu_1\,\mu_2 - \left(D + 1\right)\mu_d\right)\sin\beta\,\cos\beta\,\gamma'\,\beta' + \Big(\left(C - \mu_d\right)\big(\mu_x$$

$$+\mu_p\,\cos^2\beta + \left(1 + \mu_d\right)\sin^2\beta\big) + \left(A\,\mu_d + \mu_1\,\mu_2\right)\cos^2\beta\Big)k_{RS}\,\gamma'$$

$$+B\,\cos\beta\,\sin\beta\,k_{QR}\,\beta' - \left(C + \mu_d\right)\sin\beta\,k_{FQ}\,\alpha'\Big\} \tag{3.99}$$

A expressão matemática para a energia cinética adimensional do Giroscópio é a mesma escrita na Eq.(3.51). A análise da condição inicial é a mesma que no caso do sistema conservativo, porque o sistema é o mesmo e porque no processo de impacto o atrito não está envolvido. Então as velocidades iniciais em função dos ângulos iniciais são as expressões matemáticas: Eq.(3.58), Eq.(3.59) e Eq.(3.60).

3.4.
Trajetória do eixo do rotor

Uma forma elegante de observar o movimento consiste em acompanhar a trajetória de um ponto do eixo do rotor (eixo de simetria (e_s) porém não de axissimetria), vetor de coordenadas (x,y,z). Antes do impacto o eixo permanece fixo no espaço e por conseqüência as coordenadas (x,y,z) ficam constantes, depois do impacto o eixo passa a apresentar movimento de nutação e precessão. Convenientemente trabalha-se com um vetor unitário, cuja trajetória espacial é sobre uma esfera de radio unitário.

$$x = \sin\beta \qquad y = -\cos\beta\sin\alpha \qquad z = \cos\beta\cos\alpha \tag{3.100}$$

Estas coordenadas ajudam muito na visualização do movimento, estando escritas no SR(F). No instante inicial, antes do impacto, o valor é: $\mathbf{r}(0,0,1)$. Finalmente, com isto se podem definir claramente os dois lados do hemisfério, um quando $z>0$ e o outro quando $z<0$. Esta distinção será muito importante quando consideramos a estabilidade do sistema e procurarmos definir as bacias de atração. Um movimento instável será causador de passeio deste vetor pelos dois hemisférios.