1
Introdução

A Mecânica Clássica tem suas raízes nos trabalhos de Newton, Euler, Lagrange, Gauss, Jacobi, etc. O estudo da dinâmica de um corpo no espaço é um tema fascinante e, sendo uma temática antiga, existe uma imensa variedade de textos disponíveis sobre o tema. Ainda hoje se estuda com muito interesse as teorias desenvolvidas nos últimos 200 anos. Um fato importante na evolução da Mecânica foi o aparecimento das ferramentas computacionais, linguagem de programação, e pacotes de programas especializados nas diferentes áreas da engenharia que apóiam a demanda moderna de tratamentos na Mecânica Analítica. É importante continuar com a investigação no contexto clássico para integrá-lo de uma maneira inteligente às aplicações modernas na engenharia, porém dentro do marco histórico evidente sobre o assunto da Mecânica Clássica. Muito se fez porém muito resta a fazer, vide o mundo novo da dinâmica na micro e na nano escala.

1.1.
Histórico

Galileu descobriu que um corpo que está se movimentando submetido à gravidade terrestre adquire uma aceleração constante. Newton perseguiu um objetivo maior: obter um código de leis que governassem o movimento de um corpo sob todas as combinações possíveis de forças. A revolução do pensamento científico que culminou com as descobertas de Newton, levou-nos a uma visão do universo como um gigantesco giroscópio funcionando como um mecanismo de extraordinária precisão. Gerolamo Cardano (1501-1576) inventou varios dispositivos mecânicos, incluindo aquele que chamamos suspensão cardânica composto de três anéis concêntricos unidos permitindo o movimento de rotação livre de uma bússola, além do Eixo Cardan com junta universal que permite a transmissão de movimento rotativo em vários ângulos. Cardano declarou que o movimento perpétuo é impossível, exceto em corpos celestes.

As principais conquistas científicas do século XVIII consistiram em equações para modelar diversos fenômenos físicos, mas houve menos sorte na tentativa de resolver estas equações. A palavra "análise" adquiriu uma especial conotação durante esse século, quando aspectos teóricos do cálculo foram sendo consolidados: um dos principais artífices de tal desenvolvimento foi Leonard Euler (1707-1783), o matemático mais prolífico de todos os tempos. Os ângulos de Euler foram definidos para descrever a orientação de um corpo rígido no espaço euclidiano 3-dimensional. Há varias formas de definir os três partâmetros necessários para descrever a orientação de um corpo no espaço; na técnica originada em Euler qualquer orientação pode ser obtida pela composição de três rotações elementares sequenciais.

Em 1750, Joseph Louis Lagrange (1736-1813) partiu das idéias de Euler e elaborou uma nova formulação que deu origem à Mecânica Analítica. Duas abordagens distintas que haviam estado presentes durante décadas, foram formuladas eficientemente por Lagrange. A primeira consistia no principio de conservação da energia, e a segunda na introdução de coordenadas generalizadas. Estas idéias foram retomadas por Hamilton (1805-1865), que reformulou novamente a Dinâmica, dando-lhe maior generalidade. Apesar de todos os importantes sucessos alcançados em física e matemática, a própria natureza constitui um desafio na sua compreensão e embora os matemáticos tenham podido concretizar algo sobre a ordem do universo e as razões dessa ordem, a vida ainda se dava em um mundo desordenado.

William Rowan Hamilton inventou em 1843 um número hiper-complexo de 4 componentes, a que deu o nome quatérnio. Foi uma invenção matemática cuja utilidade somente começou a se tornar evidente 150 anos depois, quando apareceram aplicações na engenharia aeroepacial. Apesar do número hiper-complexo poder ser definido com componentes de 1 até n, poucas aplicações foram encontrados para o número hiper-complexo de $n>4$.

Ao final do século XIX a ciência se balizava em dois paradigmas muito diferentes para a modelagem matemática. O primeiro e mais antigo, a análise de grande precisão através das equações diferenciais, e o segundo que inclui o conceito de grandezas estocásticas com descrição de sistemas dinâmicos com um maior grau de complexidade. Henri Poincaré (1854-1912) conhecia a importância das probabilidades no mundo físico, sabia que o azar faz parte da vida diária, e como também acreditava no determinismo clássico, queria encontrar onde estava a fonte do azar. Ele observou vários mecanismos mediante os quais a descrição determinística do mundo poderia dar lugar de forma natural à idealização probabilística, um destes mecanismos sendo a sensibilidade às condições iniciais. A famosa “memória” de Poincaré sobre o problema dos três corpos foi publicada em 1890: ela se tornou famosa por reunir os fundamentos em mecânica celeste de autores de renome, e por conter a primeira descrição matemática do comportamento caótico em um sistema Dinâmico. O Caos é um tipo de comportamento que pode ocorrer ocasionalmente em alguns sistemas, seu estudo está mais ligado à Dinâmica não linear. Sistemas simples podem gerar comportamentos muito complicados, e o mesmo sistema com pequenas variações nas condições inicias se pode comportar de forma radicalmente diferente: este tipo de comportamento imprevisível é chamado de caótico. Alexander Lyapunov (1857-1918) recebeu a influência das idéias de Poincaré, e utilizou uma definição de estabilidade mais abrangente que a definição de estabilidade de Poisson utilizada por Poincaré. Lyapunov se empenhou em uma investigação qualitativa em teoria de estabilidade, em 1892 seus resultados foram publicados como notáveis.

O giroscópio foi inventado em 1850 por Jean Bernard Léon Foucault (1819-1868), utilizado para mostrar que a Terra de fato gira sobre seu próprio eixo. A experiência realizada por Foucault mostrou que o rotor mantém a orientação original no espaço, apesar do movimento de rotação da Terra. O giroscópio veio a substituir a bússola na navegação marítima. Na aviação, serviu de giro-compasso e piloto automático, permitindo o vôo em condições de visibilidade zero. Nos vôos espaciais o dispositivo é fundamental para a orientação das espaçonaves. Os giroscópios também têm sido utilizados para estabilizar plataformas de tiro e para estabilizar plataformas inerciais, sobre as quais estão fixados captadores de aceleração para a navegação inercial usados em aviões e mísseis construídos antes do aparecimento do GPS. As agências espaciais utilizam um aparelho baseado no giroscópio, conhecido como giroscópio humano, para o treinamento de astronautas.

Em 1937, Kurt Magnus completou seus estudos de matemática, física e química na Universidade de Gottingen, com sua tese Doutoral "Oscillations of force-related gyroscopes", sob a orientação de Ludwing Prandtl e Max Schuler.

Ambos professores despertaram seu interesse em Mecânica e, especialmente, em vibrações e giroscópios, de tal forma que ele ficou fascinado por este campo de investigação. Ao final da Segunda Guerra Mundial, ele foi forçado a trabalhar para um instituto de investigação na União Soviética, sendo depois de 7 anos finalmente libertado. Embora estes tenham sido anos difíceis para Magnus, ele conseguiu um ganho pessoal científico considerável. Em 1966, aceitou o convite para dirigir o departamento recém fundado de Mecânica na Universidade Técnica de Munique, onde ficou até sua aposentadoria como professor emérito em 1980. Ele fez deste lugar um sítio muito importante da investigação cientifica no domínio da Mecânica. O trabalho cientifico de Kurt Magnus é caracterizado por suas numerosas publicações importantes sobre teoria e tecnologia do giroscópio.

Na década de 1960, a pós-graduação foi sendo introduzida em algumas universidades brasileiras, e foi nesses anos que a UFRJ concedeu o grau de M.Sc ao Prof. Hans Ingo Weber, que logo depois recebeu uma bolsa do DAAD - Serviço Alemão de Intercâmbio Acadêmico e em 1971 terminou o seu Dr.-Ing. na Universidade Técnica de Munique, sob a orientação de Kurt Magnus, com a tese “Controle de atitude de satélites usando rodas de reação". Em 1974, na UNICAMP, participou na criação de um dos primeiros departamentos de Projeto Mecânico no Brasil. Naqueles primeiros tempos algumas iniciativas foram fortemente ligadas ao Prof. Weber: uma conferência nacional em Engenharia Mecânica, a fundação da ABCM - Associação Brasileira de Engenharia e Ciências Mecânicas. Em 1998 assumiu a posição de professor titular da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Desde aquela época ele é ativo na área de Dinâmica de Sistemas Mecânicos e uma característica comum ao seu trabalho cientifico é a harmonia entre o estudo analítico/numérico e experimental ao descrever algum fenômeno específico. Weber recebeu muitos reconhecimentos cientificos, entre eles: do Governo brasileiro a Medalha do Mérito Científico (2002), da SBMAC o diploma de Mérito por sua expressiva contribuição para o desenvolvimento cientifico (2003), o prêmio ABCM de Engenharia Mecânica Brasileira (2007) e foi convidado para ser membro permanente da Academia Nacional de Engenharia (2008).

O autor desta tese iniciou sua atividade cientifica na área de motores de combustão interna, depois de graduar-se como engenheiro mecânico pela Univerdidad Nacional de Ingeniería (Lima-Perú) em 2001, trabalhou alguns anos na indústria “Metal Mecânica” até viajar ao Brasil, terminou o curso de mestrado no ano 2006 na PUC-Rio na área de dinâmica veicular. Durante o mestrado aumentou seu interesse pela dinâmica de corpos no espaço (satélites), conheceu o Professor Weber na matéria de Dinâmica, identificou-se com a metodologia e o conteúdo da matéria procurando assim aprofundar mais nesta linha de pesquisa. Nos últimos anos o autor publicou alguns artigos científicos com orientação do Professor Weber; entre estes artigos encontra-se: “Simulation and graphical motion visualization of the Magnus gyroscope” (30° CILAMCE) que envolve grande parte do desenvolvimento científico que deu lugar ao tema da atual tese.

1.2. Revisão Bibliográfica

Os movimentos de corpos no espaço e do giroscópio foram amplamente estudados desde antes das obras de Magnus, mas a primeira referência direta que chegou às mãos do autor foi um artigo feito por Weber [1], onde se estuda o movimento de um corpo no espaço com grandes oscilações. Um fato inovador é o processo de normalização de parâmetros e assim conseguir trabalhar de forma adimensional; neste trabalho analisou-se o movimento utilizando duas ferramentas diferentes, os ângulos cardânicos e quatérnios. Estas ferramentas foram estudadas e relacionadas em muitos trabalhos de investigação, por exemplo: Schutte [10], Gavilán [13], Trindade [14], Biasi [15], Gurfil [18], nestes trabalhos estuda-se o movimento dos corpos que reportaram diferentes formulações matemáticas.

Também se podem mencionar textos clássicos que ajudam na introdução à dinâmica rotacional, como Whittaker [2], Rimrott [4], Goldstein [19]. Para alguém mais familiarizado com o tema, AIAA [3] é um texto que apresenta a Mecânica a partir de uma óptica cronológica, aborda a dinâmica analítica com uma sistemática simples, embora sofisticada. Um texto que apresenta a dinâmica analítica desde uma abordagem particularmente atual é Udwadia [11], onde é muito usada a álgebra matricial. Na temática dos quatérnios, um livro muito importante para o desenvolvimento deste trabalho é Kuipers [20], onde se estuda os movimentos de rotação desde a teoria de rotações seqüenciais e quatérnios. Apresenta-se também uma teoria completa da álgebra de quatérnios sendo um livro especializado na área aeroespacial estudado desde um enfoque analítico moderno.

Weber [9] resume as ferramentas necessárias para o estudo do movimento rotacional, trabalhando com uma nomenclatura muito adequada para esta aplicação e coincide neste aspecto com AIAA [3]. A importância da nomenclatura não deve ser subestimada pois ajuda na manipulação das equações e facilita o raciocínio do problema. Há uma divergência grande nas nomenclaturas existentes, pela variedade de literatura e isto é um assunto atual, por exemplo, Pece [8] propõe uma nomenclatura nova que pode ser utilizada em problemas desta área.

Além dos conhecimentos necessários em dinâmica rotacional, também é importante para o presente trabalho a teoria da dinâmica não-linear, entre livros e teses de doutorado foram de valia Strogatz [21], Savi [22] e Belato [23], publicações que apresentam a teoria clássica com enfoque atual da dinâmica não linear. Estes textos fornecem as ferramentas necessárias para a análise não linear do problema, encontrando-se definições como diagramas Plano-fase, mapas de Poincaré e expoente de Lyapunov.

Outras fontes de consulta que ajudam no estudo da estabilidade do movimento foram Rimrott [4], que aborda explicitamente a dinâmica de giroscópios tocando tópicos como o triângulo de Magnus e forças giroscópicas, o proprio Magnus [24], livro especializado em giroscópios e Leipholz [5] que apresenta amplamente uma teoria de estabilidade aplicada a sistemas dinâmicos. Textos como Arnold [7] e Crabtree [6] podem nos introduzir no mundo do giroscópio a partir de um contexto histórico, neste material explicam-se algumas características dinâmicas deste instrumento tão particular, ajudando na compreensão do seu comportamento. Embora exista extensa literatura orientada à análise do movimento do corpo no espaço, a implementação de ferramentas como quatérnios são de utilização recente na sua formulação [10]. Ela é particularmente conveniente na rotação de corpos não axissimétricos, onde existe singularidade quando utilizadas outras ferramentas. O estudo da estabilidade nos movimentos de grande amplitude [25], por exemplo, aplicados à recuperação de satélites que se tornaram instáveis, ou a estabilidade de um sistema de corpos e a influência das componentes que contribuem na estabilidade do sistema, a representação da dinâmica de um corpo celeste aqui na terra, e as formas de estabilizar satélites no espaço exterior são assuntos de interesse atual.

1.3. Terminologia

Os problemas em Dinâmica com muitos sistemas referenciais precisam de uma nomenclatura específica, devido à grande divergência na nomenclatura encontrada na literatura cientifica. Definimos então:

SR: sistema referencial

Coordenada de um ponto A em um SR(R): ${}^{R}\mathbf{A} = ({}^{R}a_1, {}^{R}a_2, {}^{R}a_3)$

Vetor posição de B referido a A escrito no SR (R):

$${}^{R}_{A}\mathbf{r}_B = \begin{bmatrix} {}^{R}b_1 - {}^{R}a_1 & {}^{R}b_2 - {}^{R}a_2 & {}^{R}b_3 - {}^{R}a_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

O expoente esquerdo que informa o SR só é indicado caso exista mais de um SR na análise. O sub-índice esquerdo será omitido se for a origem do SR. A posição do ponto C do corpo, cujo movimento de translação é seguido através de outro ponto B do corpo, será escrito no SR (R) com origem A usando a matriz transformação de coordenadas $\mathbf{T}$ entre ambos os SR: ${}^{R}\mathbf{r}_C = {}^{R}\mathbf{r}_B + {}^{R}\mathbf{T}^{S} \; {}^{S}_{B}\mathbf{r}_C$.

1.3.1. Velocidade Angular

O produto vetorial é obtido usando a matriz anti-simétrica associada para o primeiro vetor no produto. Esta matriz será representada pelo vetor til:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \qquad {}^{R}\tilde{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Isto nos permite definir a velocidade angular do corpo (S) a partir da derivada de um vetor que conecta os pontos B e C, dois pontos fixos em (S).

$$\frac{d\,{}^{S}_{B}\mathbf{r}_C}{dt} = {}^{S}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_S \, {}^{S}_{B}\mathbf{r}_C$$

Eclipsa-se a informação do expoente esquerdo, visto que a equação pode ser escrita em qualquer SR. A definição da velocidade angular do corpo (S) no SR fixo (F) também pode ser obtida a partir da matriz de orientação do corpo e de sua derivada no tempo:

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_S = {}^{F}\dot{\mathbf{T}}^{S} \, {}^{S}\mathbf{T}^{F} \qquad (1.1)$$

Onde o ponto representa a derivada temporal das componentes da matriz.

A matriz **T** é fundamental no estudo da rotação, e segundo a forma como seus termos serão obtidos receberá diferentes nomes: matriz de cossenos diretores, matriz de transformação de coordenadas e matriz rotação ou matriz orientação do corpo (S). A matriz é ortogonal e desse modo ela gira o vetor sem mudar o seu módulo, e sua transposta representará a transformação inversa entre SR.

1.3.2. Matriz de Transformação de coordenadas

Uma rotação entre dois SR mantendo um dos seus eixos invariante resulta em uma primeira rotação seqüencial. Por exemplo, os SR: F(*x,y,z*) e Q(*x,y´,z´*) com o eixo (x) invariante sobre o qual o SR (Q) é deslocado de um ângulo α, define-se: ${}^{F}\mathbf{r} = {}^{F}\mathbf{T}^{Q}\ {}^{Q}\mathbf{r}$.

$$ {}^{F}\mathbf{T}^{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{1.2} $$

Neste caso a velocidade angular será:

$$ {}^{Q}_{F}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{Q} = {}^{Q}\mathbf{T}^{F}\ {}^{F}\dot{\mathbf{T}}^{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\alpha}\sin\alpha & -\dot{\alpha}\cos\alpha \\ 0 & \dot{\alpha}\cos\alpha & -\dot{\alpha}\sin\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow {}^{Q}_{F}\boldsymbol{\omega}_{Q} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} $$

Observe-se que a componente $\dot{\alpha}$ da velocidade angular ocorre no eixo que fica invariante nesta rotação. Para introduzir uma segunda rotação seqüencial, define-se outro SR (R) e, desloca-se em torno do eixo y' do novo SR (Q), resultando a seguinte relação: ${}^{F}\mathbf{r} = {}^{F}\mathbf{T}^{Q}\ {}^{Q}\mathbf{r}_{B} = {}^{F}\mathbf{T}^{Q}\ {}^{Q}\mathbf{T}^{R}\ {}^{R}\mathbf{r}_{B} = {}^{F}\mathbf{T}^{R}\ {}^{R}\mathbf{r}$. As rotações adicionais são incluídas pós multiplicando as matrizes ${}^{F}\mathbf{T}^{R} = {}^{F}\mathbf{T}^{Q}\ {}^{Q}\mathbf{T}^{R}$. Existem três rotações seqüenciais independentes até se chegar ao SR (S) solidário ao corpo.

Para obter a velocidade angular total, associa-se uma velocidade angular para cada rotação seqüencial. Na técnica de rotações seqüenciais podem-se distinguir duas seqüências mais utilizadas: ângulos de Cardan (ou Tait-Bryan) e ângulos de Euler. Nesta tese trabalha-se apenas com os ângulos de Cardan.

$$ \underset{(x,y,z)}{F} \xrightarrow{\alpha(x)} \underset{(x,y',z')}{Q} \xrightarrow{\beta(y')} \underset{(x'',y',z'')}{R} \xrightarrow{\gamma(z'')} \underset{(x''',y''',z'')}{S} \tag{1.3} $$

Imediatamente se identificam as outras matrizes da rotação seqüencial:

$$ {}^{Q}\mathbf{T}^{R} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}, \quad {}^{R}\mathbf{T}^{S} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.4} $$

Matriz de transformação de coordenadas, obtida por rotações elementares seqüenciais, resulta da multiplicação das matrizes de rotações:

$$ {}^{F}\mathbf{T}^{S} = {}^{F}\mathbf{T}^{Q}\ {}^{Q}\mathbf{T}^{R}\ {}^{R}\mathbf{T}^{S} \tag{1.5} $$

A velocidade angular em cada rotação seqüencial é:

$$ {}_{F}^{F}\boldsymbol{\omega}_{Q} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = {}_{F}^{Q}\boldsymbol{\omega}_{Q} \qquad {}_{Q}^{R}\boldsymbol{\omega}_{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{bmatrix} = {}_{Q}^{Q}\boldsymbol{\omega}_{R} \qquad {}_{R}^{S}\boldsymbol{\omega}_{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = {}_{R}^{R}\boldsymbol{\omega}_{S} \tag{1.6} $$

Agora se calcula a velocidade angular total:

$$ {}^{S}\boldsymbol{\omega}_{S} = {}^{S}\mathbf{T}^{R}\ {}^{R}\mathbf{T}^{Q}\ {}^{Q}\boldsymbol{\omega}_{Q} + {}^{S}\mathbf{T}^{R}\ {}_{Q}^{R}\boldsymbol{\omega}_{R} + {}_{R}^{S}\boldsymbol{\omega}_{S} \tag{1.7} $$

$$ {}^{S}\boldsymbol{\omega}_{S} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}\cos\beta\cos\gamma + \dot{\beta}\sin\gamma \\ -\dot{\alpha}\cos\beta\sin\gamma + \dot{\beta}\cos\gamma \\ \dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma} \end{bmatrix} $$

Os três ângulos cardânicos recebem os nomes de “roll, pitch, yaw” (balanço, arfagem, guinada).

1.3.3. Matriz de Rotação

A matriz rotação é definida a partir da visualização geométrica relacionando a projeção de um mesmo vetor em um ou outro SR. A ação da multiplicação de uma matriz por um vetor sempre pode ser considerada como uma reorientação deste vetor no espaço. Como a matriz é ortogonal, o módulo do vetor não vai variar nesta operação. Considera-se que o SR(S) que caracteriza o corpo parta de uma posição onde ele é coincidente com (F) para outra posição qualquer (S) no espaço. Sendo a posição inicial do vetor posição de um ponto *B* do corpo dada por $\mathbf{r}$ e ao se deslocar para a posição alterada ela será escrita $\mathbf{r}^{+}$, a matriz $\mathbf{T}$ que opera a rotação é: $\mathbf{r}^{+} = \mathbf{T}\ \mathbf{r}$. Usando a notação dada anteriormente se relacionam assim: $\mathbf{r}^{+} = {}^{F}\mathbf{r}$ e $\mathbf{r} = {}^{S}\mathbf{r}$. Logo, a matriz de rotação é a nossa conhecida matriz ${}^{F}\mathbf{T}^{S}$ antes descrita por outro nome. Altera-se não só o nome, mas também a forma de obtê-la, embora seja ao final uma matriz idêntica à matriz de transformação de coordenadas.

Imagina-se um SR(F) e um eixo passando por uma origem em torno do qual os três eixos coordenados de (F) são girados solidariamente até uma posição (S). Diz o teorema de Euler que dados dois SR sempre se pode encontrar um eixo e um ângulo para realizar esta operação. Imaginando agora este eixo e um vetor qualquer partindo da origem, o ato de girar em torno do eixo faz o vetor percorrer a superfície de um cone. É pelo estudo da geometria sobre este cone que vai ser determinada uma expressão para calcular a matriz de rotação.

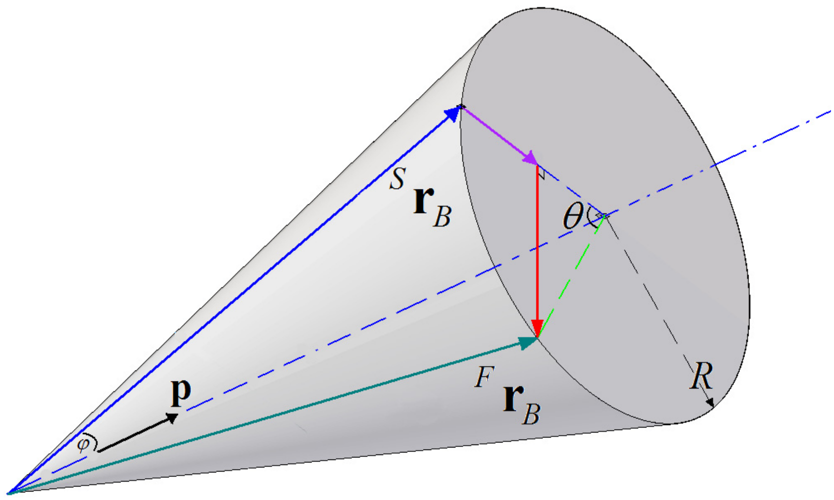

Figura 1.1 Rotação em torno de um eixo.

Sendo $\mathbf{p}$ o vetor unitário (vetor de rotação) que dá a direção do eixo em torno do qual se está girando de um ângulo θ, pode-se mostrar que:

$$\mathbf{r}^{+} = {}^{F}\mathbf{r}_B = {}^{S}\mathbf{r}_B + R\left(1-\cos\theta\right)\mathbf{e}_1 + R\sin\theta\,\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{e}_2 = \tilde{\mathbf{p}}\;{}^{S}\mathbf{r}_B / R$$

$$\mathbf{e}_1 = \tilde{\mathbf{p}}^2\;{}^{S}\mathbf{r}_B / R$$

Observa-se que ${}^{F}\mathbf{p} = {}^{S}\mathbf{p} = \mathbf{p}$ já que a rotação acontece ao seu redor.

Juntando as últimas equações e lembrando que $\mathbf{r}^{+} = \mathbf{T}\,\mathbf{r}$, concluímos que:

$${}^{F}\mathbf{T}^{S} = \mathbf{E} + \sin\theta\;\tilde{\mathbf{p}} + \left(1-\cos\theta\right)\;\tilde{\mathbf{p}}^2 \tag{1.8}$$

onde $\mathbf{E}$ é a matriz identidade 3x3.

A matriz de rotação possui uma parte simétrica e outra parte anti-simétrica:

$${}^{F}\mathbf{T}^{S}_{simetrica} = \mathbf{E} + \left(1-\cos\theta\right)\tilde{\mathbf{p}}^2 \qquad \text{e} \qquad {}^{F}\mathbf{T}^{S}_{anti-simetrica} = \sin\theta\,\tilde{\mathbf{p}}$$

A velocidade angular será obtida de ${}^{F}_{F}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_S = {}^{F}\dot{\mathbf{T}}^{S}\;{}^{S}\mathbf{T}^{F}$. Resulta, após um exaustivo trabalho, na seguinte expressão:

$$ {}^{F}_{F}\boldsymbol{\omega}_{S} = \dot{\theta}\,\mathbf{p} + \sin\theta\;{}^{F}\dot{\mathbf{p}} + \left(1-\cos\theta\right)\tilde{\mathbf{p}}\;{}^{F}\dot{\mathbf{p}} \tag{1.9} $$

Esta velocidade angular é escrita em termos dos parâmetros de Euler: **p** e θ. São quatro parâmetros, porém há uma restrição pelo fato de **p** ter módulo unitário. Algumas observações devem ser feitas: $\dot{\mathbf{p}}$ não é indiferente ao SR como ocorre com **p**; como **p** tem módulo unitário, portanto constante, **p** e $\dot{\mathbf{p}}$ são ortogonais e o conjunto $\mathbf{p}$, $\dot{\mathbf{p}}/\dot{p}$, $\tilde{\mathbf{p}}\dot{\mathbf{p}}/\dot{p}$ forma uma base ortogonal.

1.3.4.
Quatérnios

O quatérnio reúne um vetor $\mathbf{v} = \mathbf{p}\sin\phi$ e um número escalar $l = \cos\phi$. A representação do quatérnio é como um vetor 4x1 então: $\mathbf{q} = \begin{bmatrix}\mathbf{v}^{\mathrm{T}} & l\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, e seu conjugado $\mathbf{q}^{*} = \begin{bmatrix}-\mathbf{v}^{\mathrm{T}} & l\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. A soma e o produto escalar dos quatérnios seguem o mesmo procedimento que na álgebra vetorial. No caso do produto entre dois quatérnios, representa-se o primeiro quatérnio deste produto na forma de uma matriz 4x4 associada $\hat{\mathbf{q}}$, que é uma matriz ortogonal:

$$ \hat{\mathbf{q}}_1\mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} l_1\mathbf{E} + \tilde{\mathbf{v}}_1 & \mathbf{v}_1 \\ -\mathbf{v}_1^{T} & l_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_2 \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1\mathbf{v}_2 + l_2\mathbf{v}_1 + \tilde{\mathbf{v}}_1\mathbf{v}_2 \\ -\mathbf{v}_1^{T}\mathbf{v}_2 + l_1 l_2 \end{bmatrix} \tag{1.10} $$

E é a matriz identidade *3 x 3*. No caso de um produto de três Quatérnios o resultado é independe da ordem em que o produto é feito, isto é, $\mathbf{q}_1\,\mathbf{q}_2\,\mathbf{q}_3$ pode-se multiplicar primeiro $\mathbf{q}_1\,\mathbf{q}_2$ e o resultado por $\mathbf{q}_3$, como também na seqüência inversa, assim: $\overbrace{\hat{\mathbf{q}}_1\mathbf{q}_2}\,\mathbf{q}_3 = \hat{\mathbf{q}}_1\hat{\mathbf{q}}_2\mathbf{q}_3$

A representação de um vetor “puro” **r** como Quatérnio: $\mathbf{q}_{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix}\mathbf{r}^{T} & 0\end{bmatrix}^{T}$.

Algumas propriedades dos Quatérnios:

$$ \mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{s}}\mathbf{q}_{\mathbf{r}}^{*} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{r}}\mathbf{s} \\ \mathbf{r}^{T}\mathbf{s} \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{q}}\mathbf{q}^{*} = \begin{bmatrix} 0 \\ l^2 + v^2 \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{r}}\mathbf{q}_{\mathbf{r}}^{*} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{q}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{q} $$

$$ \hat{\mathbf{q}}_1\mathbf{q}_2^{*} = \hat{\mathbf{q}}_2^{*}\mathbf{q}_1 \qquad \mathbf{q}^{*} = \hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{r}}\,\mathbf{q}_{\mathbf{s}}^{*} $$

Utilizando estas propriedades se chegar até aplicações mais interessantes, como o *operador de rotação*, que é muito utilizado na computação gráfica. Uma forma simples de mostrar esta aplicação parte de três vetores unitários coplanares: **r**, **s** e **t**, tal que tanto entre **r** e **s** como entre **s** e **t** forme-se o ângulo ϕ. Assim

$\tilde{\mathbf{r}}\mathbf{s} = \tilde{\mathbf{s}}\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}^T\mathbf{s} = \mathbf{s}^T\mathbf{r}$. Prova-se a existência do seguinte *operador de rotação*: $\mathbf{q}\mathbf{q}_\mathbf{r}\mathbf{q}^* = \mathbf{q}_\mathbf{t}$ (Lembre que o primeiro termo de um produto de dois Quatérnios sempre é representado por uma matriz 4x4, enquanto o segundo termo tem a dimensão 4x1). Esta expressão pode ser interpretada como a transformação do vetor puro **r** no vetor puro **t**, em outras palavras como a rotação de **r** de um ângulo 2ϕ. O Quatérnio que permite esta operação é:

$$\mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}}_\mathbf{s}\mathbf{q}_\mathbf{r}^* = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{r}}\mathbf{s} \\ \mathbf{r}^T\mathbf{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{s}}\mathbf{t} \\ \mathbf{s}^T\mathbf{t} \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{q}}_\mathbf{t}\mathbf{q}_\mathbf{s}^*.$$

Lembrando que o conjugado vale $\mathbf{q}^* = \hat{\mathbf{q}}_\mathbf{s}^*\mathbf{q}_\mathbf{t}$ reescreve-se a transformação $\mathbf{q}\mathbf{q}_\mathbf{r}\mathbf{q}^* = \mathbf{q}_\mathbf{t}$ como um produto dos Quatérnios resultantes de vetores puros: $\mathbf{q}\mathbf{q}_\mathbf{r}\mathbf{q}^* = \mathbf{q}_\mathbf{s}\mathbf{q}_\mathbf{r}^*\mathbf{q}_\mathbf{r}\mathbf{q}_\mathbf{s}^*\mathbf{q}_\mathbf{t} = \mathbf{q}_\mathbf{t}$. Visto que o produto do Quatérnio de um vetor unitário puro pelo seu conjugado deve ser unitário, a propriedade está confirmada.

1.3.5. Solução do Problema Inverso

A posição de um corpo no espaço pode ser obtida através de um equipamento embarcado que meça as velocidades angulares. O problema inverso é a determinação da posição do corpo a partir das velocidades angulares [27]. No caso de rotações seqüenciais: ângulos cardânicos. Para isso se utiliza velocidade angular embarcada no sistema móvel (velocidade angular no SR(S)).

$${}^S\boldsymbol{\omega}_S = \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\cos\beta\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ \sin\beta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \tag{1.11}$$

Invertendo a equação anterior temos a expressão do problema inverso:

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos\beta} \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \cos\beta\sin\gamma & \cos\beta\cos\gamma & 0 \\ -\sin\beta\cos\gamma & \sin\beta\sin\gamma & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \tag{1.12}$$

Note-se aqui a ameaça de uma singularidade no processo de solução em função do denominador na forma de um *cosseno*. A integração pode ser feita, conhecido o vetor de condições iniciais deste movimento $[\alpha_0\ \beta_0\ \lambda_0]^T$.

Em caso de trabalhar com os parâmetros de Euler, a partir da equação que estabelece a velocidade angular ${}_F\boldsymbol{\omega}_S$, Eq.(1.9), deve-se obter equações para as componentes de $\dot{\mathbf{p}}$ e $\dot{\theta}$, sujeitas a condições iniciais $\mathbf{p}_{(0)}$e $\theta_{(0)}$. A posição inicial do vetor que dá a direção do eixo em torno qual se deve girar implica no conhecimento de uma posição seguinte, o que torna este método um tanto complicado. A saída consiste em usar uma variante da definição, os parâmetros Euler-Rodrigues se escrevem como: $\mathbf{v} = \mathbf{p}\sin(\theta/2)$ e $l = \cos(\theta/2)$. Neste caso as condições iniciais estão definidas, visto que em t=0 se terá v=0, l=1. A matriz de rotação e velocidade angular definidas em parâmetros de Euler-Rodrigues resulta:

$$^{F}\mathbf{T}^{S} = \mathbf{E} + 2l\tilde{\mathbf{v}} + 2\tilde{\mathbf{v}}^{2} \tag{1.13}$$

$$_{F}^{F}\boldsymbol{\omega}_{S} = -2\left(\dot{l}\mathbf{v} - l^{F}\dot{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}\,^{F}\dot{\mathbf{v}}\right) \quad \text{ou} \quad _{F}^{S}\boldsymbol{\omega}_{S} = -2\left(\dot{l}\mathbf{v} - l^{S}\mathbf{T}^{F\,F}\dot{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}\,^{S}\mathbf{T}^{F\,F}\dot{\mathbf{v}}\right) \tag{1.14}$$

Acrescenta-se à equação da velocidade angular anterior outra equação obtida ao se derivar a expressão que informa o módulo unitário do quatérnio:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix}\mathbf{v}^{T} & l\end{bmatrix}^{T} \qquad \mathbf{q}^{T}\mathbf{q} = \mathbf{v}^{T}\mathbf{v} + l^{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}^{T}\dot{\mathbf{v}} + l\dot{l} = 0 \tag{1.15}$$

Utilizando a aplicação do *operador de rotação* explicada no final do item 1.3.4 (com $\phi = \theta/2$) e transformando o vetor puro velocidade angular $_{F}^{S}\boldsymbol{\omega}_{S}$ ($\mathbf{q}_{S}$) ou $_{F}^{F}\boldsymbol{\omega}_{S}$ ($\mathbf{q}_{F}$) para a sua forma em Quatérnios, no SR(F) tem-se:

$$\mathbf{q}_{F} = -2\hat{\mathbf{q}}\,^{F}\dot{\mathbf{q}}^{*} \tag{1.16}$$

Onde cada termo é:

$$\mathbf{q}_{F} = \begin{bmatrix} _{F}^{F}\boldsymbol{\omega}_{S} \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ l \end{bmatrix},\ \hat{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} lE + \tilde{\mathbf{v}} & \mathbf{v} \\ -\mathbf{v}^{T} & l \end{bmatrix},\ \frac{d}{dt}\mathbf{q} = \begin{bmatrix} ^{F}\dot{\mathbf{v}} \\ \dot{l} \end{bmatrix} = {}^{F}\dot{\mathbf{q}},\ {}^{F}\dot{\mathbf{q}}^{*} = \begin{bmatrix} -^{F}\dot{\mathbf{v}} \\ \dot{l} \end{bmatrix}$$

A equação para a solução inversa é obtida lembrando que $\hat{\mathbf{q}}$ é uma matriz ortogonal, portanto basta tomar a transposta:

$$^{F}\dot{\mathbf{q}}^{*} = -\frac{1}{2}\hat{\mathbf{q}}^{T}\mathbf{q}_{F} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -^{F}\dot{\mathbf{v}} \\ \dot{l} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} lE - \tilde{\mathbf{v}} & -\mathbf{v} \\ \mathbf{v}^{T} & l \end{bmatrix}\begin{bmatrix} _{F}^{F}\boldsymbol{\omega}_{S} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

Esta expressão é usada desde que se tenham as componentes da velocidade angular no SR fixo. Para a representação no SR (S) do corpo, utiliza-se a derivada de um vetor no SR móvel: $\frac{d\,^{F}\mathbf{v}}{dt} = {}^{F}\dot{\mathbf{v}} = {}_{F}^{F}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{S}\,^{F}\mathbf{v} + {}^{F}\mathbf{T}^{S\,S}\dot{\mathbf{v}}$, então:

$$\begin{bmatrix} -^{S}\dot{\mathbf{v}} \\ \dot{l} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} lE + \tilde{\mathbf{v}} & -\mathbf{v} \\ \mathbf{v}^{T} & l \end{bmatrix}\begin{bmatrix} _{F}^{S}\boldsymbol{\omega}_{S} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.18}$$

Esta expressão relaciona a derivada relativa do quatérnio no SR(S), a partir de condições iniciais e medições da velocidade angular feitas a bordo do corpo.

1.3.6. Estabilidade

A estabilidade de um movimento é dada pela convergência da trajetória no tempo, para pequenas variações em torno da condição inicial, conforme a definição de Lyapunov. Quando esta convergência tem um valor limite, fronteira definida de alguma forma pela condição inicial, o interior desta fronteira recebe o nome de bacia de atração [21]. Existem muitos métodos numéricos para predizer a estabilidade ou instabilidade do comportamento:

O triângulo de Magnus, é um método muito conveniente para a visualização de estabilidade de corpos rígidos utilizando parâmetros inerciais, aqui é possível representar os três momentos de inércia em um plano dentro de um triângulo de lados especialmente definidos. No triângulo se descreve toda configuração inercial existente, como de corpo: achatado, alongado e de eixo intermediário.

O expoente de Lyapunov, adequado para a análise da dinâmica não linear é muito utilizado para detectar caos no sistema dinâmico, e a sensibilidade em relação à condição inicial.

1.4. Objetivo

Este trabalho apresenta uma abordagem analítica e numérica com complexidade crescente. O objetivo geral deste trabalho é estudar a dinâmica rotacional de corpos, utilizando ferramentas de análise convenientes, abrindo a análise para o comportamento em grandes amplitudes, visando passar seus limites de estabilidade, aplicando as teorias de dinâmica, implementadas em algoritmos através do *Simulink/MatLab, Dynamics Solver* e *Maple*. Um objetivo específico é estudar a Dinâmica de um corpo livre no espaço para diferentes configurações inerciais, estudar a influência da configuração inercial na sua dinâmica e os efeitos na sua estabilidade. A energia mínima requerida para mudar de bacia de atração será calculada, em função das características inerciais do corpo.

Se o corpo está em suspensão cardânica, a inércia desta, bem como os momentos de atrito devem ser desprezíveis ao se pretender concluir do movimento deste sistema sobre o comportamento do corpo livre. Assim outro objetivo é estudar as influências das inércias da suspensão cardânica na dinâmica de um giroscópio, e a influência do atrito no sistema. Estudar a diferença entre os movimentos de um corpo no espaço e de rotor dentro da suspensão cardânica, principalmente no tocante à estabilidade dos movimentos. Avaliar em forma qualitativa alguns resultados numéricos, e entender a complexa dinâmica do Giroscópio.

1.5. Descrição da tese

Este trabalho se divide em sete capítulos. O Capítulo atual apresentou as ferramentas necessárias para o desenvolvimento da tese.

No Capítulo 2 se descreve o sistema a ser estudado, partindo desde o giroscópio como um sistema de três corpos, e seguido pelo corpo livre no espaço. Mostra as dimensões e o funcionamento do sistema, indicando as variáveis importantes que ajudam na visualização do movimento.

No Capítulo 3 são desenvolvidas as equações de movimento do corpo livre e do sistema com suspensão cardânica. Usando apenas o raciocínio de rotações seqüenciais através da ferramenta dos ângulos cardânicos. Trabalha-se com equações adimensionais e se mostram as condições iniciais do problema.

No Capítulo 4 é apresentado outro tipo de abordagem para a análise do corpo livre, desenvolvendo-se as equações de movimento usando apenas a teoria de quatérnios. Trabalha-se com equações adimensionais e se mostram as condições iniciais do problema.

No Capítulo 5 são mostrados resultados das simulações feitas nos programas como *Simulink/MatLab, Dynamics Solver* e *Maple*, e faz-se uma análise dos resultados, interpretando o movimento e comparando os comportamentos descritos em cada caso.

No Capítulo 6 são discutidos alguns exemplos com a tentativa de avaliar qualitativamente os resultados numéricos em um ambiente virtual, trabalhando no modelo dimensional e comprando estes resultados com os obtidos na filmagem do giroscópio no laboratório.

Finalmente, no Capítulo 7 são apresentadas as conclusões geais do trabalho. Também, discorre-se sobre os trabalhos futuros, com ênfase na aplicação do movimento de satélites.