

3. Modelagem Teórica

3.1. Conceitos Básicos de Cinemática

Para se estudar o comportamento de manipuladores, é necessário que se tenha um conhecimento de técnicas de obtenção de posição e de orientação de corpos rígidos. Para realizar este estudo, faz-se necessário o conhecimento sobre transformações de coordenadas.

Um manipulador genérico qualquer pode ser representado como um sistema de corpos rígidos. Sendo O_{xyz} um sistema de coordenadas fixo no espaço e O_a um ponto arbitrário no manipulador, a posição de O_a é representada pelo vetor X_0 , conforme Figura 28. A orientação do corpo rígido é dada pela direção dos eixos x_1 , y_1 e z_1 .

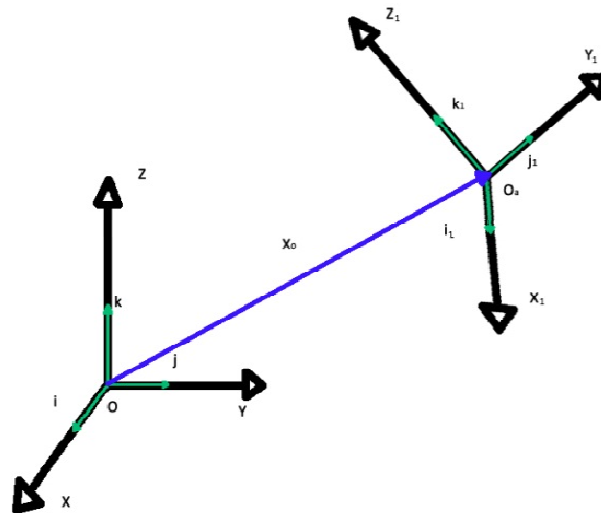


Figura 28 – Posição e Orientação do Corpo Rígido

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Assumindo i_1, j_1 e k_1 como vetores unitários em relação aos eixos x_1, y_1 e z_1 , as componentes de cada vetor unitário podem ser consideradas como sendo o cosseno diretor de cada eixo projetado no sistema fixo.

A matriz de rotação do corpo rígido é a representação de uma transformação de coordenadas que relaciona as coordenadas de um ponto P qualquer em dois sistemas com mesma origem. Ela também apresenta a orientação do corpo rígido em relação à origem. A Figura 29 apresenta dois sistemas com orientações distintas, mas com origens idênticas.

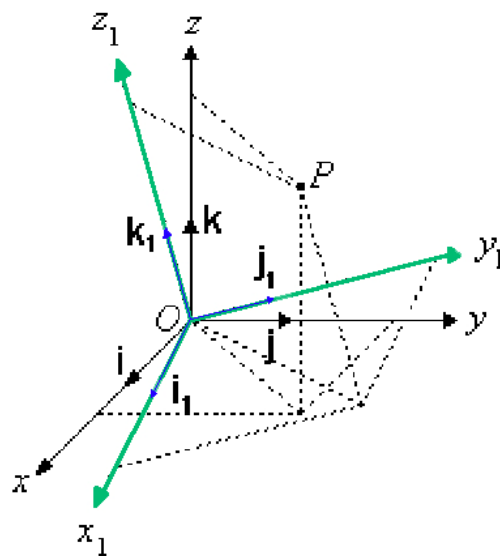


Figura 29 – Transformação Rotacional

As coordenadas de um ponto no sistema O_{xyz} podem ser representadas pela Eq. (3), enquanto que as coordenadas no sistema $O_{1-x_1y_1z_1}$ são descritas pela Eq. (4).

$$p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$p_1 = \begin{bmatrix} p_{x1} \\ p_{y1} \\ p_{z1} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

O ponto P pode ser descrito em formato vetorial em relação ao sistema O_1 - $x_1y_1z_1$ por:

$$p_1 = p_{x_1} \cdot i_1 + p_{y_1} \cdot j_1 + p_{z_1} \cdot k_1 \quad (3.4)$$

Assumindo que o ponto P está localizado em um ponto fixo, porém com posicionamento distinto entre os dois sistemas, podem-se escrever as relações:

$$\begin{aligned} p_x = p \cdot i = p_1 \cdot i &= p_{x_1} \cdot i_1 \cdot i + p_{y_1} \cdot j_1 \cdot i + p_{z_1} \cdot k_1 \cdot i \\ p_y = p \cdot j = p_1 \cdot j &= p_{x_1} \cdot i_1 \cdot j + p_{y_1} \cdot j_1 \cdot j + p_{z_1} \cdot k_1 \cdot j \\ p_z = p \cdot k = p_1 \cdot k &= p_{x_1} \cdot i_1 \cdot k + p_{y_1} \cdot j_1 \cdot k + p_{z_1} \cdot k_1 \cdot k \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \cdot i & j_1 \cdot i & k_1 \cdot i \\ i_1 \cdot j & j_1 \cdot j & k_1 \cdot j \\ i_1 \cdot k & j_1 \cdot k & k_1 \cdot k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{x_1} \\ p_{y_1} \\ p_{z_1} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Ou ainda, pode-se escrever de forma compacta como:

$$p = Rot_0^1 \cdot p_1 \quad (3.7)$$

onde Rot_0^1 é a matriz de rotação.

$$Rot_0^1 = \begin{bmatrix} i_1 \cdot i & j_1 \cdot i & k_1 \cdot i \\ i_1 \cdot j & j_1 \cdot j & k_1 \cdot j \\ i_1 \cdot k & j_1 \cdot k & k_1 \cdot k \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Analogamente, pode-se achar a matriz que realiza a transformação de O_1 - $x_1y_1z_1$ para O_{xyz} :

$$\begin{aligned} p_{x_1} = p_1 \cdot i_1 = p \cdot i_1 &= p_x \cdot i \cdot i_1 + p_y \cdot j \cdot i_1 + p_z \cdot k \cdot i_1 \\ p_{y_1} = p_1 \cdot j_1 = p \cdot j_1 &= p_x \cdot i \cdot j_1 + p_y \cdot j \cdot j_1 + p_z \cdot k \cdot j_1 \\ p_{z_1} = p_1 \cdot k_1 = p \cdot k_1 &= p_x \cdot i \cdot k_1 + p_y \cdot j \cdot k_1 + p_z \cdot k \cdot k_1 \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{bmatrix} p_{x_1} \\ p_{y_1} \\ p_{z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i.i_1 & j.i_1 & k.i_1 \\ i.j_1 & j.j_1 & k.j_1 \\ i.k_1 & j.k_1 & k.k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = Rot_1^0 \cdot p \quad (3.10)$$

Vale notar que, ao se comparar as matrizes de rotação, é percebido que $Rot_0^1 = Rot_1^0{}^T$.

As rotações em torno dos eixos x, y e z estão apresentadas nas Eqs. (3.11-3.13). Utilizando a Figura 29 como base, as rotações são calculadas em função de ângulos θ_x , θ_y e θ_z , resultando no sistema de coordenadas $O_{1-x_1y_1z_1}$.

$$Rot_{x,\theta_x} = \begin{bmatrix} i_1.i & j_1.i & k_1.i \\ i_1.j & j_1.j & k_1.j \\ i_1.k & j_1.k & k_1.k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_x) & -\sin(\theta_x) \\ 0 & \sin(\theta_x) & \cos(\theta_x) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$Rot_{y,\theta_y} = \begin{bmatrix} i_1.i & j_1.i & k_1.i \\ i_1.j & j_1.j & k_1.j \\ i_1.k & j_1.k & k_1.k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_y) & 0 & \sin(\theta_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta_y) & 0 & \cos(\theta_y) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$Rot_{z,\theta_z} = \begin{bmatrix} i_1.i & j_1.i & k_1.i \\ i_1.j & j_1.j & k_1.j \\ i_1.k & j_1.k & k_1.k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_z) & -\sin(\theta_z) & 0 \\ \sin(\theta_z) & \cos(\theta_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

3.1.1. Transformação Homogênea

Uma transformação homogênea pode ser definida pela junção da matriz de translação e da matriz de rotação em uma única matriz A:

$$P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} p_{x_1} \\ p_{y_1} \\ p_{z_1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$A = \begin{bmatrix} R & X_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1.i & j_1.i & k_1.i & x_0 \\ i_1.j & j_1.j & k_1.j & y_0 \\ i_1.k & j_1.k & k_1.k & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

A matriz A é composta por uma sub-matriz de rotação combinada ao vetor X_0 e de uma quarta linha preenchida com zeros e um. A transformação de coordenadas para este sistema pode ser compactada através da Eq. (3.17), também conhecida como transformação homogênea:

$$P = A.P_1 \Rightarrow P = \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & X_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Uma das vantagens na utilização da técnica de transformação homogênea é a compactação das formulações em transformações consecutivas. Em um caso geral, consideram-se n transformações consecutivas de um sistema n para um sistema 0, e assumindo A_{i-1}^i como a matriz relacionada com a transformação homogênea do sistema i-1 para o sistema i. A Eq. (3.17) que relaciona o sistema n com o sistema 0 é a Eq. (3.18).

$$P_0 = \begin{bmatrix} P_0 \\ 1 \end{bmatrix} = A_1^0 A_2^1 A_3^2 \dots A_{n-1}^{n-2} A_n^{n-1} P_n = A_n^0 P_n \quad (3.18)$$

Note que na ausência de rotações, a matriz A é simplificada e resulta na matriz de translação sobre os eixos x, y e z por distâncias x_0 , y_0 e z_0 :

$$Transl_{a,b,c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

3.2. Notação de Denavit-Hartenberg

Em termos gerais, a notação de Denavit-Hartenberg (D-H) facilita a obtenção do conjunto de equações da cinemática de um elo em relação ao elo anterior de um manipulador.

A Figura 30 apresenta um par de elos adjacentes, Elo_{i-1} e Elo_i, e suas respectivas articulações, junta_{i-1}, junta_i e junta_{i+1}. Na notação de D-H, o sistema de coordenadas do i-ésimo elo está localizado na interseção da normal comum entre os eixos das juntas i e i+1, cujas direções são definidas pelos eixos z_{i-1} e z_i. A normal comum é representada pela distância mínima entre os eixos z_{i-1} e z_i, segundo o desenho a reta H_iO_i. O eixo x_i deve seguir a direção relativa à extensão da normal comum, no sentido de z_{i-1} para z_i. Já o eixo z_i mantém a direção do eixo da junta i+1, enquanto que o eixo y_i é definido de forma que o sistema resultante O_i-x_iy_iz_i seja um sistema de coordenadas que siga a regra da mão direita.

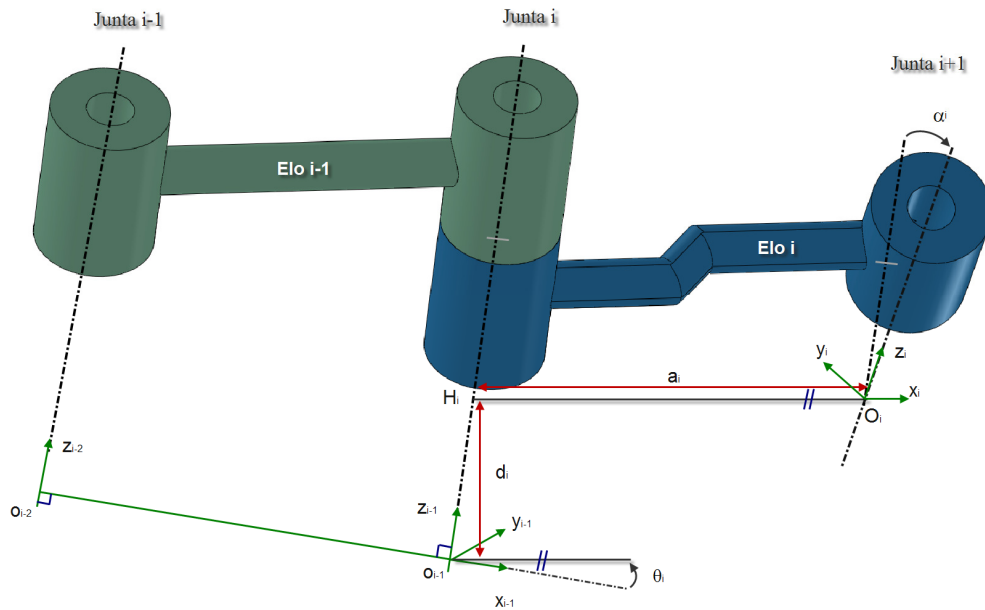


Figura 30 – Notação de Denavit-Hartenberg

A posição relativa entre os dois sistemas de coordenadas apresentados, na Figura 30, $O_{i-1}-x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$ e $O_i-x_iy_iz_i$, é completamente definida pelas posições relativas aos eixos x_{i-1} e x_i , y_{i-1} e y_i e z_{i-1} e z_i . Os parâmetros que definem tais posições são: o comprimento da normal comum (a), o ângulo de torção da junta (α), o deslocamento da junta (d) e o ângulo da rotação da junta (θ), onde:

a – é o afastamento linear entre eixos. É a distância medida ao longo da normal comum entre os eixos analisados. Isto é, é a distância entre z_{i-1} e z_i ao longo do eixo x_i ou, ainda, a distância H_iO_i ;

α – é o ângulo de torção que o elo sofre a partir da junta anterior, ou seja, é o ângulo de rotação que ocorre na direção x_i entre o eixo z_{i-1} e o eixo z_i ;

d – é a distância entre os elos, medido ao longo da junta anterior, isto é, é a distância entre os eixos x_{i-1} e x_i medida ao longo do eixo z_{i-1} , partindo de O_{i-1} em direção a H_i . De fato, ela é a normal comum entre x_{i-1} e x_i . Este parâmetro apresenta sinal positivo caso siga na direção de O_{i-1} para H_i e negativo na direção oposta;

θ – é o ângulo formado entre a normal comum de elos sucessivos, ou seja, é o ângulo de rotação na direção z_{i-1} entre o eixo x_{i-1} e o eixo x_i .

A Tabela 3 apresenta outras informações referentes aos parâmetros e aos tipos de juntas, rotativa ou prismática.

Tabela 3-1 – Parâmetros x Tipo de Juntas

Parâmetro	Símbolo	Junta Rotativa	Junta Prismática
Comprimento do Elo	a	Fixo	Fixo
Ângulo de torção	α	Fixo	Fixo
Deslocamento da Junta	d	Fixo	Variável
Ângulo da Junta	θ	Variável	Fixo

Através dos 4 parâmetros, a posição e a orientação relativa aos dois elos podem ser descritas pelas transformações de translação e de rotação entre os dois sistemas de coordenadas fixos. Estas transformações apresentam 4 etapas:

- 1 – Rotação no eixo z_{i-1} de um ângulo θ e alinhado com x_{i-1} , segundo a regra da mão direita;
- 2 – Translação no eixo z_{i-1} de uma distância d_i , partindo do ponto O_{i-1} até o ponto H_i ;
- 3 – Translação ao longo do eixo x_i de uma distância a_i , partindo do ponto H_i até o ponto O_i ;
- 4 – Rotação em torno do eixo x_i de um ângulo α e alinhado com z_{i-1} , segundo a regra da mão direita.

Assim,

$$A_i^{i-1} = Rot_{z, \theta_i} \cdot Transl_{z, d_i} \cdot Transl_{x, a_i} \cdot Rot_{x, \alpha_i} \quad (3.20)$$

Substituindo pelas matrizes de rotação e translação em z e x, conforme Eqs. (3.11), (3.13) e (3.19), tem-se que:

$$\begin{aligned}
A_i^{i-1} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
A_i^{i-1} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i)\cos(\alpha_i) & \sin(\theta_i)\sin(\alpha_i) & a_i \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i)\cos(\alpha_i) & -\cos(\theta_i)\sin(\alpha_i) & a_i \sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.21)
\end{aligned}$$

O estabelecimento do sistema de coordenadas da extremidade pode ser definido de forma mais conveniente, se a orientação de z_n for escolhida paralela à orientação de z_{n-1} . Já o sistema de coordenadas da base, em manipuladores comerciais, costuma ser definido pelo próprio fabricante, porém, em casos que ele não esteja definido, a escolha do sistema de coordenadas deve ser feita em qualquer ponto do eixo z_0 . Os eixos x_0 e y_0 podem ser escolhidos de forma geral, contudo devem seguir a regra da mão direita.

3.3. Modelagem do Sistema

A metodologia utilizada para a modelagem cinemática deste trabalho foi baseada na notação de D-H. A formulação do manipulador é obtida por uma série de substituições aplicadas nas matrizes de transformação homogênea, usando D-H. Outro ponto importante é que foi assumido que cada elo adquire uma forma circular com curvatura constante, similar às hipóteses em trabalhos anteriores sobre manipuladores simulando trombas de elefantes (Hannan, et al., 2003). Esta hipótese é satisfatória quando as forças gravitacionais são pequenas em relação às forças nos tendões.

Em manipuladores tradicionais, a cinemática direta utiliza um padrão para a transformação homogênea, através da matriz A , proveniente da notação de D-H. A notação de D-H, conforme explicado no sub-tópico 3.2, cria uma relação entre as coordenadas locais das juntas θ_i ou d_i e a posição e orientação da extremidade do manipulador. Essa relação é baseada em rotações e translações independentes segundo a Eq. (21), realizadas para cada junta i . No entanto, os manipuladores contínuos não possuem juntas explícitas com equivalências em rotações em θ_i e translações em d_i . Um manipulador contínuo utiliza outras variáveis s_i , κ_i e ϕ_i , onde s_i indica o comprimento do elo i medido ao longo de seu eixo, κ_i é a curvatura do elo i (inverso do raio de curvatura) e ϕ_i é o ângulo da curvatura, conforme ilustra a Figura 31.

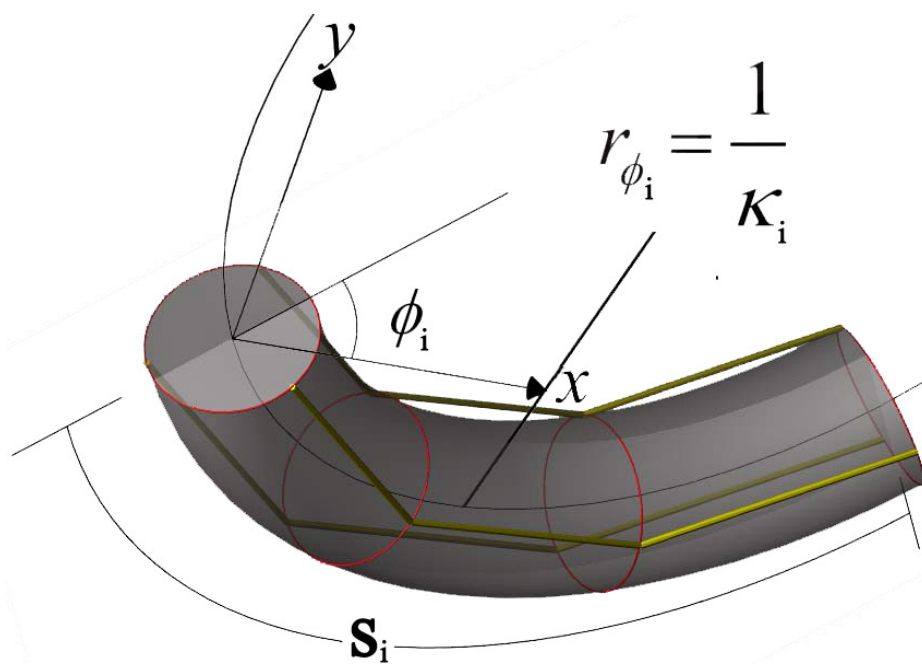


Figura 31 – Definição de s_i , κ_i e ϕ_i .

Dessa maneira, faz-se uma equivalência entre θ_i e d_i e s_i , κ_i e ϕ_i . Usando algumas técnicas geométricas simples pode-se chegar em $[\theta \ d]^T = f_1(s_i, \kappa_i, \phi_i)$ relativas aos parâmetros do D-H (Hannan, et al., 2003). Outra confirmação retirada de (Hannan et al., 2003) é que $A(f_1(s_i, \kappa_i, \phi_i)) = A(s_i, \kappa_i, \phi_i)$, o que torna

possível relacionar os procedimentos de D-H para se chegar às coordenadas da extremidade do manipulador.

O modelo deste manipulador é baseado em vértebras, onde será realizada a modelagem para cada seção de vértebra. Para se obter o modelo completo, basta multiplicar as matrizes de cada número de vértebras do manipulador por elo. Assim, a modelagem serve para um manipulador com números de elos arbitrários.

Basicamente, a modelagem do manipulador será baseada em uma conversão de um sistema invertebrado (contínuo) para um vertebrado (com parâmetros concentrados). A Figura 32 apresenta um desenho esquemático de cada vértebra (da Fig. 11), para a utilização da notação de D-H, onde θ_1 e θ_2 são juntas rotativas, relacionadas com as deformações rotacionais da membrana inferior da vértebra, enquanto que d_3 é uma junta prismática que está associada aos deslocamentos na coluna da vértebra, devido principalmente às membranas, e θ_4 e θ_5 são juntas rotativas associadas à segunda membrana da vértebra, entre a coluna e o anel. Os eixos z , são referentes aos eixos z supracitados no item 3.2. Também é representada na figura a curvatura do manipulador em uma vértebra.

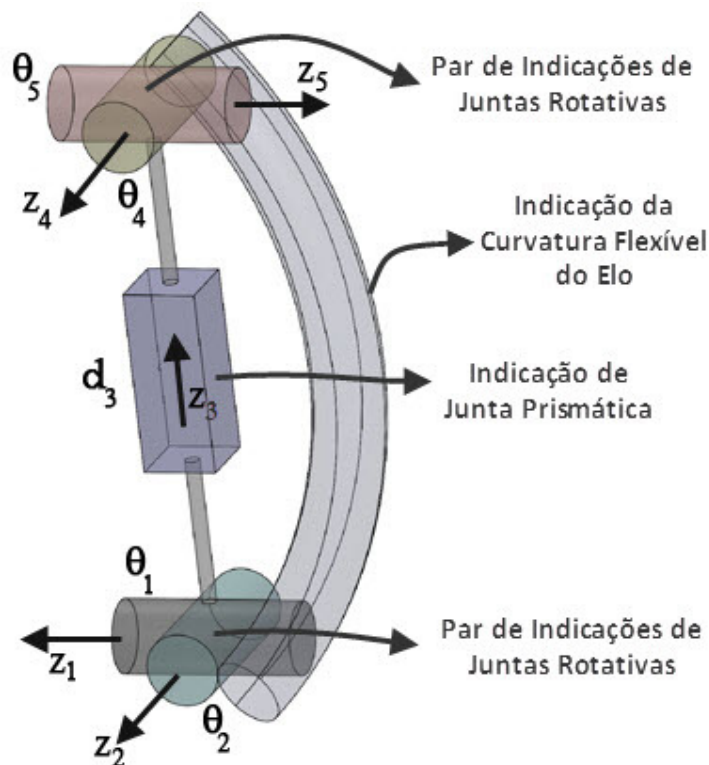


Figura 32 – Adaptação da Vértebra para D-H

Foi assumido que cada membrana possui dois graus de liberdade e que a coluna passaria a ter um grau de liberdade. Logo, θ_1 e θ_2 são juntas rotativas, relacionadas com as deformações rotacionais da membrana inferior da vértebra, enquanto que d_3 é uma junta prismática que está associada aos deslocamentos na coluna da vértebra, devido principalmente às membranas, e θ_4 e θ_5 são juntas rotativas associadas à segunda membrana da vértebra, entre a coluna e o anel.

Outro ponto que é assumido é a relação entre as juntas rotativas da primeira e da segunda membrana. θ_1 está acoplado a θ_5 enquanto que o θ_2 está acoplado ao θ_4 . Este acoplamento no modelo é necessário para que exista a curvatura constante assumida no manipulador real. Assumindo-se que não há forças externas atuando na vértebra, e desprezando o efeito da gravidade, pelo equilíbrio estático tem-se que $\theta_1 = \theta_5 + \pi$ e $\theta_2 = \theta_4$. O deslocamento d_3 se deve ao deslocamento das membranas no eixo z, onde não ocorre rotação e, sim, somente a translação. A membrana da base, com os dois primeiros DoF (θ_1 e θ_2), tem como finalidade gerar a direção e o sentido do conjunto coluna, vértebra e anel, enquanto que o d_3 é o atuador referente à compressão ou alongamento da vértebra. Já para θ_4 e θ_5 , que são acoplados a θ_1 e θ_2 , representando a direção e o sentido do anel, que é a base de fixação da próxima vértebra, ou seja, o par final dos DoF são os responsáveis por direcionar as vértebras futuras do manipulador. Como o $\theta_1 = \theta_5 + \pi$ e $\theta_2 = \theta_4$, o modelo pode assumir apenas 3 variáveis: θ_1 , θ_2 e d_3 .

A Tabela 4 apresenta o resultado da notação de D-H aplicado em uma vértebra unitária.

Tabela 3-2 – Parâmetros de Denavit-Hartenberg

Elo	α	A	θ	d	Tipo de Junta
1	$-\pi/2$	0	θ_1	0	Rotativa
2	$\pi/2$	0	$\theta_2 + \pi/2$	Altura da Membrana	Rotativa
3	$-\pi/2$	0	0	$d_3 +$ Altura da Coluna	Prismática
4	$-\pi/2$	0	$\theta_4 + \pi/2$	0	Rotativa
5	0	Altura do Anel	$\theta_5 + \pi$	0	Rotativa

Com os parâmetros da notação de D-H definidos, pode-se utilizar a Eq. 3.21 para se determinarem os valores da transformação homogênea, isto é, da matriz A da base para a extremidade.

$$A_1^0 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & 0 & -\sin(\theta_1) & 0 \\ \sin(\theta_1) & 0 & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$A_2^0 = \begin{bmatrix} -\cos(\theta_1).\sin(\theta_2) & -\sin(\theta_1) & \cos(\theta_1).\cos(\theta_2) & -h_m.\sin(\theta_1) \\ -\sin(\theta_1).\sin(\theta_2) & \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1).\cos(\theta_2) & h_m.\cos(\theta_1) \\ -\cos(\theta_2) & 0 & -\sin(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$A_3^0 = \begin{bmatrix} -\cos(\theta_1).\sin(\theta_2) & \cos(\theta_1).\cos(\theta_2) & -\sin(\theta_1) & \dots \\ -\sin(\theta_1).\sin(\theta_2) & \sin(\theta_1).\cos(\theta_2) & -\cos(\theta_1) & \dots \\ -\cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \cos(\theta_1).\sin(\theta_2 + \pi/2)(d_3 + h_c) - h_m.\sin(\theta_1) \\ h_m.\cos(\theta_1) + \sin(\theta_1).\sin(\theta_2 + \pi/2)(d_3 + h_c) \\ -\sin(\theta_2).(d_3 + h_c) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$A_4^0 = \begin{bmatrix} -\cos(\theta_1).\cos(\theta_2 - \theta_4) & -\sin(\theta_1) & \cos(\theta_1).\sin(\theta_2 - \theta_4) & \dots \\ \sin(\theta_1).\cos(\theta_2 - \theta_4) & \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1).\sin(\theta_2 - \theta_4) & \dots \\ -\sin(\theta_2 - \theta_4) & 0 & \cos(\theta_2 - \theta_4) & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \cos(\theta_1).\sin(\theta_2 + \pi/2)(d_3 + h_c) - h_m.\sin(\theta_1) \\ h_m.\cos(\theta_1) + \sin(\theta_1).\sin(\theta_2 + \pi/2)(d_3 + h_c) \\ -\sin(\theta_2).(d_3 + h_c) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$A_5^0 = \begin{bmatrix} s_1 \cdot s_5 - c_1 \cdot c_2 \cdot c_4 \cdot c_5 - c_1 \cdot s_2 \cdot s_4 \cdot c_5 & s_1 \cdot c_5 + c_1 \cdot c_2 \cdot c_4 \cdot s_5 + c_1 \cdot s_2 \cdot s_4 \cdot s_5 & c_1 \cdot s_{2-4} & \cdots \\ -c_1 \cdot s_5 - s_1 \cdot c_2 \cdot c_4 \cdot c_5 - s_1 \cdot s_2 \cdot s_4 \cdot c_5 & s_1 \cdot c_2 \cdot c_4 \cdot s_5 - c_1 \cdot c_5 + s_1 \cdot s_2 \cdot s_4 \cdot s_5 & s_1 \cdot s_{2-4} & \cdots \\ & s_{2-4} \cdot c_5 & -s_{2-4} \cdot s_5 & c_{2-4} \cdot c_4 & \cdots \\ & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ d_3 \cdot c_1 \cdot c_2 - h_m \cdot s_1 + h_c \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot c_4 \cdot c_5 + h_a \cdot (s_1 \cdot s_5 - c_1 \cdot c_2 \cdot c_4 \cdot c_5 - c_1 \cdot s_2 \cdot s_4 \cdot c_5) & & & & \\ d_3 \cdot s_1 \cdot c_2 - h_m \cdot c_1 + h_c \cdot s_1 \cdot c_2 - h_a \cdot (c_1 \cdot s_5 + s_1 \cdot c_2 \cdot c_4 \cdot c_5 + s_1 \cdot s_2 \cdot s_4 \cdot c_5) & & & & \\ & & & & (d_3 + h_c) \cdot c_{2+\pi/2} + h_a \cdot s_{2-4} \cdot c_5 \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

onde:

- h_m é a altura da membrana;
- h_c é a altura da coluna;
- h_a é a altura do anel;
- s_1, s_2, s_4, s_5 são $\sin(\theta_1), \sin(\theta_2), \sin(\theta_4)$ e $\sin(\theta_5)$, respectivamente;
- c_1, c_2, c_4, c_5 são $\cos(\theta_1), \cos(\theta_2), \cos(\theta_4)$ e $\cos(\theta_5)$, respectivamente;
- d_3 é o deslocamento da junta 3;
- s_{2-4} é $\sin(\theta_2 - \theta_4)$;
- c_{2-4} é $\cos(\theta_2 - \theta_4)$;
- $c_{2+\pi/2}$ é $\cos(\theta_2 + \pi/2) = -\sin(\theta_2) = -s_2$.

As direções de cada junta da vértebra são dadas pelo vetor unitário b_i , obtido da terceira coluna das matrizes A_i^0 , ou seja, para as juntas:

$$A_i^{i-1} = \begin{bmatrix} n_i & t_i & b_i & X_e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (3.27)$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow b_2 = \begin{bmatrix} c_1 c_2 \\ s_1 c_2 \\ -s_2 \end{bmatrix} \Rightarrow b_3 = \begin{bmatrix} -s_1 \\ -c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow b_4 = \begin{bmatrix} c_1 s_{2-4} \\ s_1 s_{2-4} \\ c_{2-4} \end{bmatrix} \Rightarrow b_5 = \begin{bmatrix} c_1 s_{2-4} \\ s_1 s_{2-4} \\ c_{2-4} c_4 \end{bmatrix}.$$

Substituindo os valores do protótipo desenvolvido, chega-se à coordenada da extremidade de uma vértebra, Eq. 3.28, sendo $h_m = 0,254\text{mm}$, $h_c = 25,40\text{mm}$ e, $h_a = 12,67\text{mm}$, conforme definido anteriormente na seção 2.1.

$$X_e = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (3.28)$$

$$\begin{bmatrix} d_3 \cdot c_1 \cdot c_2 - h_m \cdot s_1 + h_c \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot c_4 \cdot c_5 + h_a \cdot (s_1 \cdot s_5 - c_1 \cdot c_2 \cdot c_4 \cdot c_5 - c_1 \cdot s_2 \cdot s_4 \cdot c_5) \\ d_3 \cdot s_1 \cdot c_2 - h_m \cdot c_1 + h_c \cdot s_1 \cdot c_2 - h_a \cdot (c_1 \cdot s_5 + s_1 \cdot c_2 \cdot c_4 \cdot c_5 + s_1 \cdot s_2 \cdot s_4 \cdot c_5) \\ (d_3 + h_c) \cdot c_{2+\pi/2} + h_a \cdot s_{2-4} c_5 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} d_3 \cdot c_1 \cdot c_2 - 2,54 \cdot 10^{-4} \cdot s_1 + 2,54 \cdot 10^{-2} \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot c_4 \cdot c_5 + 1,267 \cdot 10^{-2} \cdot (s_1 \cdot s_5 - c_1 \cdot c_2 \cdot c_4 \cdot c_5 - c_1 \cdot s_2 \cdot s_4 \cdot c_5) \\ d_3 \cdot s_1 \cdot c_2 - 2,54 \cdot 10^{-4} \cdot c_1 + 2,54 \cdot 10^{-2} \cdot s_1 \cdot c_2 - 1,267 \cdot 10^{-2} \cdot (c_1 \cdot s_5 + s_1 \cdot c_2 \cdot c_4 \cdot c_5 + s_1 \cdot s_2 \cdot s_4 \cdot c_5) \\ (d_3 + 2,54 \cdot 10^{-2}) \cdot c_{2+\pi/2} + 1,267 \cdot 10^{-2} \cdot s_{2-4} \cdot c_5 \end{bmatrix}$$

Assumindo as dimensões citadas, encontra-se a matriz Jacobiana J para uma vértebra:

$$J = \begin{bmatrix} J_L \\ J_A \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

onde as sub - matrizes de translação J_L e de rotação J_A são :

$$J_L = \begin{bmatrix} \frac{\delta x}{\delta \theta_1} & \frac{\delta x}{\delta \theta_2} & \frac{\delta x}{\delta d_3} & \frac{\delta x}{\delta \theta_4} & \frac{\delta x}{\delta \theta_5} \\ \frac{\delta y}{\delta \theta_1} & \frac{\delta y}{\delta \theta_2} & \frac{\delta y}{\delta d_3} & \frac{\delta y}{\delta \theta_4} & \frac{\delta y}{\delta \theta_5} \\ \frac{\delta z}{\delta \theta_1} & \frac{\delta z}{\delta \theta_2} & \frac{\delta z}{\delta d_3} & \frac{\delta z}{\delta \theta_4} & \frac{\delta z}{\delta \theta_5} \end{bmatrix} \quad J_A = [b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \quad b_5]$$

$$\begin{aligned}
J_L = & \\
& \left[\begin{array}{ccc}
h_a * (s_1 \cdot s_2 \cdot s_4 \cdot c_5 - c_1 \cdot s_5 - s_1 \cdot c_2 \cdot c_4 \cdot c_5) - d_3 \cdot s_1 c_2 - h_c \cdot s_1 c_2 - h_m \cdot c_1 & \cdots & \\
h_a * (c_1 \cdot c_2 \cdot c_4 \cdot c_5 - s_1 \cdot s_5 - c_1 \cdot s_2 \cdot s_4 \cdot c_5) + d_3 \cdot c_1 c_2 + h_c \cdot c_1 c_2 - h_m \cdot s_1 & \cdots & \\
0 & \cdots & \\
\cdots & -h_a \cdot (c_1 \cdot c_2 \cdot s_4 \cdot c_5 + c_1 \cdot s_2 \cdot c_4 \cdot c_5) - d_3 \cdot c_1 \cdot s_2 - h_c \cdot c_1 \cdot s_2 & c_1 \cdot c_2 & \cdots \\
\cdots & -h_a \cdot (s_1 \cdot c_2 \cdot s_4 \cdot c_5 + s_1 \cdot s_2 \cdot c_4 \cdot c_5) - d_3 \cdot s_1 \cdot s_2 - h_c \cdot s_1 \cdot s_2 & s_1 \cdot c_2 & \cdots \\
\cdots & -h_a \cdot (c_{2+4} \cdot c_5) \cdot (d_3 + h_c) \cdot s_{2+\pi/2} & c_{2+\pi/2} & \cdots \\
\cdots & -h_a \cdot (c_1 \cdot c_2 \cdot s_4 \cdot c_5 + c_1 \cdot s_2 \cdot c_4 \cdot c_5) & h_a \cdot (c_1 \cdot s_2 \cdot s_4 \cdot s_5 - c_1 \cdot c_2 \cdot c_4 \cdot c_5 - s_1 \cdot c_5) & \\
\cdots & -h_a \cdot (s_1 \cdot c_2 \cdot s_4 \cdot c_5 + s_1 \cdot s_2 \cdot c_4 \cdot c_5) & h_a \cdot (c_1 \cdot c_5 - s_1 \cdot c_2 \cdot c_4 \cdot s_5 - s_1 \cdot s_2 \cdot s_4 \cdot s_5) & \\
\cdots & -h_a \cdot (c_{2+4} \cdot c_5) & -h_a \cdot (s_{2+4} \cdot s_5) &
\end{array} \right] \quad (3.30)
\end{aligned}$$

onde h_a é $1,267 \cdot 10^{-2}$ m, h_m é $2,54 \cdot 10^{-4}$ m e o valor de h_c é de $2,54 \cdot 10^{-2}$ m.

$$J_A = \begin{bmatrix} -s_1 & c_1 \cdot c_2 & -s_1 & c_1 \cdot s_{2-4} & c_1 \cdot s_{2-4} \\ c_1 & s_1 \cdot c_2 & -c_1 & s_1 \cdot s_{2-4} & s_1 \cdot s_{2-4} \\ 0 & -s_2 & 0 & c_{2-4} & c_{2-4} c_4 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Os pontos de singularidade da vértebra são calculados quando o determinante de J_L é igual a zero, assim:

$$\begin{aligned}
Det(J_L) = & -(c_1^2 + s_1^2)(c_2^2 + s_2^2)(d_3 + h_c + h_a \cdot c_4 \cdot c_5) \cdot \\
& (d_3 \cdot c_2 + h_c \cdot c_2 + h_a \cdot (c_2 \cdot c_4 \cdot c_5 - s_2 \cdot s_4 \cdot c_5)) = 0 \quad (3.32)
\end{aligned}$$

Para satisfazer a igualdade acima, lembrando que $\theta_2 = \theta_4$ e $\theta_1 = \theta_5 + \pi$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\theta_4 = \pi/2 \pm \pi & \quad \text{e} \quad \theta_5 = \pi/2 \pm \pi \\
d_3 = -h_c & \quad \text{e} \quad \theta_4 = \pi/2 \pm \pi \\
d_3 = -h_c & \quad \text{e} \quad \theta_5 = \pi/2 \pm \pi \\
d_3 + h_c = h_a \cdot c_4 \cdot c_5 &
\end{aligned} \quad (3.33)$$

Para calcular o deslocamento do tendão, ao serem inseridos valores na entrada dos servomotores, foi realizada uma análise geométrica para que em seguida fosse implementado em um código através da ferramenta *LabView*. A Fig. 33 ilustra a origem dos vetores e os vetores utilizados para o cálculo. Com base na Fig. 33, é assumida uma base ortonormal, com os vetores (n_0 , t_0 e b_0), relacionada a uma base x , y e z . Pode-se fazer a análise do comprimento do tendão através de cálculos vetoriais, onde o deslocamento resultante do tendão é o resultado da subtração vetorial entre o vetor $r.n_0$ e a soma vetorial entre os vetores $b_{Colu} + r.n_1$. Analogamente a este cálculo, os cálculos de todos os outros tendões podem ser realizados.

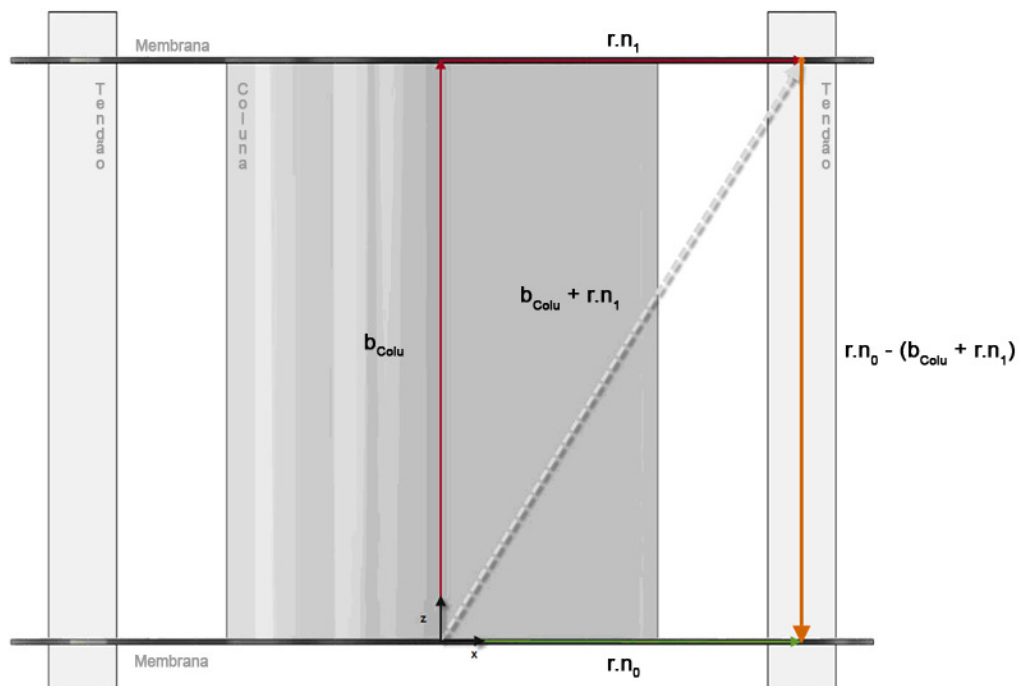


Figura 33 – Vetores

Através do cálculo vetorial, consegue-se chegar ao comprimento total dos tendões na extremidade do manipulador (para cada tendão), somando os deslocamentos calculados para cada vértebra.

O comprimento do tendão para um elo é a soma do comprimento dos tendões de cada vértebra do elo em questão. Como foi assumido que todas as vértebras de um elo possuem os mesmos valores para os DoFs (para que todas as

vértebras de um elo possuam a mesma curvatura), o comprimento total dos tendões de um elo será, o comprimento calculado para uma vértebra, com suas respectivas alterações devido aos valores dos DoFs desejados, multiplicado pelo número de vértebras. Com isso, se a posição final desejada do elo for a posição $[\alpha, \beta, h]^T$, o comprimento dos tendões de uma vértebra pode ser calculado:

$$\frac{[\alpha, \beta, h]^T}{n_{\text{vert}}} \quad (3.34)$$

onde α é o ângulo final do elo na direção do eixo x (θ_1), β é o ângulo final do elo na direção do eixo y (θ_2), h é o deslocamento do manipulador na direção do eixo z (d_3), e n_{vert} é o número de vértebras do elo em questão.

Portanto, o comprimento total individual de cada tendão é dado por:

$$h_{ns} = n_{\text{vert}} c_s \quad (3.35)$$

onde o sub-índice n é o elo analisado, o sub-índice s é o número indicativo do tendão (variando de 1 até 4) atuado, h_{ns} é o comprimento do tendão s do elo n e c_s é o comprimento do tendão s de uma vértebra.

Logo, pode-se calcular o vetor H , que é composto pelas equações encontradas para h_{ns} , contendo os comprimentos de cada tendão por elo:

$$H = [h_1 \quad h_2 \quad h_3]^T \quad (3.36)$$

onde,

$$h_n = [h_{n1} \quad h_{n2} \quad h_{n3} \quad h_{n4}]^T \quad (3.37)$$

com n variando entre 1 e 3, representando o elo analisado.

Também, foi calculado um vetor Q , composto por θ_{ns} e d_{ns} , que indica os DoFs de cada elo, modelado segundo D-H. Para o manipulador em estudo, que possui 3 elos, têm-se que:

$$Q = [\theta_{11} \quad \theta_{12} \quad d_{13} \quad \theta_{21} \quad \theta_{22} \quad d_{23} \quad \theta_{31} \quad \theta_{32} \quad d_{33}]^T \quad (3.38)$$

Para calcular o Jacobiano de uma única vértebra foi utilizada a igualdade:

$$\dot{H} = J \dot{Q} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \\ \dot{h}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{21} & J_{31} \\ J_{12} & J_{22} & J_{32} \\ J_{13} & J_{23} & J_{33} \\ J_{14} & J_{24} & J_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (3.39)$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial q_1} & \frac{\partial h_1}{\partial q_2} & \frac{\partial h_1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial h_2}{\partial q_1} & \frac{\partial h_2}{\partial q_2} & \frac{\partial h_2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial h_3}{\partial q_1} & \frac{\partial h_3}{\partial q_2} & \frac{\partial h_3}{\partial q_3} \\ \frac{\partial h_4}{\partial q_1} & \frac{\partial h_4}{\partial q_2} & \frac{\partial h_4}{\partial q_3} \end{bmatrix}$$

onde $h_n = [h_{n1} \quad h_{n2} \quad h_{n3} \quad h_{n4}]^T$ e $q_n = [\theta_{n1} \quad \theta_{n2} \quad d_{n3}]^T$

Dessa forma, foi calculado o Jacobiano, relacionando os deslocamentos dos tendões e os DoFs para uma única vértebra, onde:

$$J_{1,1} = 0; \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} J_{1,2} = & 2/(4.h_m.(h_m + h_a + h_c + d_3) + d_3.(d_3 + 2.(h_c + h_a)) + h_c.(h_c + 2.h_a) + h_a^2 - \dots \\ & \dots 4.r^2.c_2^2.(1 - c_1^2) - 4.r.s_1.c_2.(h_a + h_c + d_3 + 2.h_m))^{1/2}.(-4).r.c_1.c_2.(h_a + h_c + d_3 + \dots \\ & \dots 2.h_m - 2.r.s_1.c_2); \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$J_{1,3} = 0; \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} J_{1,4} = & 2/(4.h_m.(h_m + h_a + h_c + d_3) + d_3.(d_3 + 2.(h_c + h_a)) + h_c.(h_c + 2.h_a) + h_a^2 + \dots \\ & \dots 4.r^2.c_2^2.(1 - c_1^2) + 4.r.s_1.c_2.(h_a + h_c + d_3 + 2.h_m))^{1/2}.(4.r.c_1.c_2.(h_a + h_c + d_3 + \dots \\ & \dots 2.h_m + 2.r.s_1.c_2)); \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned}
J_{2,1} = & 2/(4.h_m.(h_m + h_a + h_c + d_3) + d_3.(d_3 + 2.(h_c + h_a)) + h_c.(h_c + 2.h_a) + h_a^2 + \dots \\
& \dots 4.r^2.(1 - c_2^2) - 4.r.s_2.(h_a + h_c + d_3 + 2.h_m))^{\frac{1}{2}}.4.r.c_2.(h_a + h_c + d_3 + \dots \\
& \dots 2.h_m + 2.r.s_2); \tag{3.44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{2,2} = & 2/(4.h_m.(h_m + h_a + h_c + d_3) + d_3.(d_3 + 2.(h_c + h_a)) + h_c.(h_c + 2.h_a) + h_a^2 + \dots \\
& \dots 4.r^2.c_2^2.(1 - c_1^2) - 4.r.s_1.c_2.(h_a + h_c + d_3 + 2.h_m))^{\frac{1}{2}}.(8.r^2.c_2.s_2.(c_1^2 - 1) + \dots \\
& \dots 4.r.s_1.s_2.(h_a + h_c + d_3 + 2.h_m)); \tag{3.45}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{2,3} = & 2/(4.h_m.(h_m + h_a + h_c + d_3) + d_3.(d_3 + 2.(h_c + h_a)) + h_c.(h_c + 2.h_a) + h_a^2 + \dots \\
& \dots 4.r^2.(1 - c_2^2) - 4.r.s_2.(h_a + h_c + d_3 + 2.h_m))^{\frac{1}{2}}.(-4.r.c_2.(h_a + h_c + d_3 + 2.h_m - \dots \\
& \dots 2.r.s_2)); \tag{3.46}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{2,4} = & 2/(4.h_m.(h_m + h_a + h_c + d_3) + d_3.(d_3 + 2.(h_c + h_a)) + h_c.(h_c + 2.h_a) + h_a^2 + \dots \\
& \dots 4.r^2.c_2^2.(1 - c_1^2) + 4.r.s_1.c_2.(h_a + h_c + d_3 + 2.h_m))^{\frac{1}{2}}.(-4.r.s_1.s_2.(h_a + h_c + d_3 + \dots \\
& \dots + 2.h_m - 2.r.s_2) + 8.r^2.s_2.c_2.(c_1^2 - 1)); \tag{3.47}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{3,1} = & 2/(4.h_m.(h_m + h_a + h_c + d_3) + d_3.(d_3 + 2.(h_c + h_a)) + h_c.(h_c + 2.h_a) + h_a^2 + \dots \\
& \dots 4.r^2.(1 - c_2^2) - 4.r.s_2.(h_a + h_c + d_3 + 2.h_m))^{\frac{1}{2}}.2.(h_a + h_c + d_3 + 2.(h_m + r.s_2)); \tag{3.48}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{3,2} = & 2/(4.h_m.(h_m + h_a + h_c + d_3) + d_3.(d_3 + 2.(h_c + h_a)) + h_c.(h_c + 2.h_a) + h_a^2 + \dots \\
& \dots 4.r^2.c_2^2.(1 - c_1^2) - 4.r.s_1.c_2.(h_a + h_c + d_3 + 2.h_m))^{\frac{1}{2}}.2.(h_a + h_c + d_3 + 2.(h_m - \dots \\
& \dots r.s_1.c_2)); \tag{3.49}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{3,3} = & 2/(4.h_m.(h_m + h_a + h_c + d_3) + d_3.(d_3 + 2.(h_c + h_a)) + h_c.(h_c + 2.h_a) + h_a^2 + \dots \\
& \dots 4.r^2.(1 - c_2^2) - 4.r.s_2.(h_a + h_c + d_3 + 2.h_m))^{\frac{1}{2}}.2.(h_a + h_c + d_3 + 2.(h_m - r.s_2)); \tag{3.50}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{3,4} = & 2/(4.h_m.(h_m + h_a + h_c + d_3) + d_3.(d_3 + 2.(h_c + h_a)) + h_c.(h_c + 2.h_a) + h_a^2 + \dots \\
& \dots 4.r^2.c_2^2(1 - c_1^2) + 4.r.s_1.c_2.(h_a + h_c + d_3 + 2.h_m))^{1/2}.2.(h_a + h_c + d_3 + 2.(h_m + \dots \\
& \dots r.s_1.c_2)).
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Com $J = \frac{\partial h_i}{\partial q_j}$, onde i varia de 1 até 4 (indicando o tendão) e j , de 1 até 3

(indicando o DoF), sabe-se que para valores onde $j > i$, as derivadas ∂h_i e ∂q_j , são nulas, pois o modelo adotado leva em consideração apenas a geometria do problema. Assim, tem-se que, o comprimento dos tendões depende dos valores desejados para cada um dos DoFs dos elos.

Os tendões que acionam os elos estão fixados em motores na base, portanto, o comprimento de um tendão com terminação no segundo elo, será o comprimento necessário para atuá-lo da maneira desejada somado ao comprimento do tendão, correspondente, no primeiro elo. Ou seja, para se atuar o elo intermediário, os tendões do elo base também devem ser atuados, e conseqüentemente, o mesmo ocorre para o terceiro elo. Para se chegar ao comprimento total final dos tendões somam-se os comprimentos dos tendões correspondentes aos elos atuados.

Portanto, o Jacobiano para o manipulador completo pode ser encontrado:

$$\begin{aligned}
J_T = \frac{dH}{dQ} = & \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial q_1} & 0 & 0 \\ \frac{\partial h_2}{\partial q_1} & \frac{\partial h_2}{\partial q_2} & 0 \\ \frac{\partial h_3}{\partial q_1} & \frac{\partial h_3}{\partial q_2} & \frac{\partial h_3}{\partial d_3} \end{bmatrix} = \\
& \begin{bmatrix} f(\theta_{11}, \theta_{12}, d_{13}) & 0 & 0 \\ f(\theta_{11}, \theta_{12}, d_{13}) & f(\theta_{21}, \theta_{22}, d_{23}) & 0 \\ f(\theta_{11}, \theta_{12}, d_{13}) & f(\theta_{21}, \theta_{22}, d_{23}) & f(\theta_{31}, \theta_{32}, d_{33}) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.52}$$

onde, assumindo $l = [l_1 \quad l_2 \quad l_3 \quad l_4]^T$ (com l_i sendo o comprimento do tendão i), tem-se que:

$$f(\theta_1, \theta_2, d_3) = \frac{\partial l}{\partial q_n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial l_1}{\partial q_{n1}} & \frac{\partial l_1}{\partial q_{n2}} & \frac{\partial l_1}{\partial q_{n3}} \\ \frac{\partial l_2}{\partial q_{n1}} & \frac{\partial l_2}{\partial q_{n2}} & \frac{\partial l_2}{\partial q_{n3}} \\ \frac{\partial l_3}{\partial q_{n1}} & \frac{\partial l_3}{\partial q_{n2}} & \frac{\partial l_3}{\partial q_{n3}} \\ \frac{\partial l_4}{\partial q_{n1}} & \frac{\partial l_4}{\partial q_{n2}} & \frac{\partial l_4}{\partial q_{n3}} \\ \frac{\partial l_4}{\partial q_{n1}} & \frac{\partial l_4}{\partial q_{n2}} & \frac{\partial l_4}{\partial q_{n3}} \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Resumidamente, o que as Eqs. 35-41 demonstram é que, como foi realizada uma análise estática do manipulador, os elos são assumidos como independentes. Ou seja, ao atuar o último elo, somente este elo receberá os valores dos DoFs desejados. Entretanto, ao atuar o elo intermediário, tanto o elo intermediário quanto o último elo receberão os valores desejados e, analogamente, para o elo base, onde ao atuar o elo base, todos os elos seguintes receberão os valores entrados para o elo desejado. Isto ocorre pois ao se atuar os tendões de um elo, os tendões dos elos seguintes também devem ser atuados, para que se evitem folgas ou tensionamentos indesejados. Por este motivo, a matriz J_T possui termos nulos. Pode-se perceber que as colunas se referem às atuações dos elos onde, o primeiro elo influencia em todos os elos seguintes, assim como, o segundo elo (que influencia no elo 3), enquanto que o terceiro elo só atua nele mesmo.

Após os cálculos cinemáticos terem sido realizados, foi iniciada a fase de construção e montagem do manipulador. O Capítulo 4 explica os detalhes desta etapa.