2.
Fundamentação Teórica

2.1.
Dimensionamento da frota - Kirby, Wyatt e Gould

O problema de dimensionamento da composição e do tamanho da frota de veículos foi primeiramente abordado por Kirby (1959) e em seguida Wyatt (1961). Os autores consideraram uma frota homogênea a se compor levando em conta uma demanda com uma variação sazonal conhecida, o fato que todas as entregas deveriam ser feitas preferencialmente com a frota própria e a possibilidade de serem contratados veículos terceirizados para cobrir a uma eventual falta de cobertura de demanda.

Os casos abordados por Kirby (1959) e Wyatt (1961) não se aplicam quando se deseja dimensionar uma frota heterogênea, isto é, quando a frota é composta por veículos de diferentes tipos e/ou tamanhos. O trabalho apresentado por Gould (1969), traz uma contribuição nesse sentido, ao abordar o problema da composição de uma frota heterogênea na sua natureza (tipos e tamanhos dos veículos). O trabalho trata também o fato que as entregas possam ser realizadas por mais de um tipo de operador logístico.

O modelo proposto por Gould foi formulado como programação linear inteira.

Onde

X_i = número de entregas realizadas por terceiros no dia i;

h_i = número de entregas realizadas por veículos contratados no dia i.

D_i =demanda de cargas no dia i.

Onde o objetivo é minimizar os custos fixos e variáveis anuais próprios e os custos com terceiros.

Função Objetivo:

$$\min \quad C_f YN + C_v \sum_i X_i + H \sum_i h_i \tag{1}$$

Sujeito à:

$$X_i + h_i = d_i \qquad para \quad todo \quad i \tag{2}$$

$$X_i \le N \tag{3}$$

C_f =custo fixo/ dia que inclui depreciação de veículos, IPVA, mão de obra

C_v = custo variável/dia (custos que são decorrentes do uso, itens que variam por quilometro rodado, combustível, manutenção, pneus.

H = custo do veículo terceirizado;

Y = dias de trabalho;

N = número de veículos próprios;

Em cada dia as cargas transportadas pelos veículos próprios são limitadas pelos número de veículos da frota própria.

Gould indica que o tamanho da programação linear pode ser reduzido pela distribuição de freqüência f(dr) da demanda dr diária.

Seja

X_r= a quantidade de cargas transportadas nos dias em que a demanda é d_{rj}.

H_r= quantidade de cargas transportadas pelos veículos terceirizados nos dias em que a demanda é d_r.

A formulação para frota própria considerando as freqüências é dada por

Função Objetivo

$$\min \quad C_f YN + C_v \sum_r X_r f(d_r) + H \sum_r h_r \tag{4}$$

$$X_r + h_r = d_r \qquad \forall r \tag{5}$$

$$X_r \le N \qquad \forall r \tag{6}$$

Para reduzir o tamanho da programação linear inteira, a distribuição de freqüência pode ser agrupada. O d_r pode representar o ponto médio e $f(d_r)$ a soma de freqüências do grupo.

Este procedimento equivale a fazer uma aproximação linear da função de freqüência cumulativa da demanda.

O modelo apresentado acima visava identificar se os altos custos com transporte da empresa em estudo eram provenientes do número excessivo de veículos da frota própria.

No âmbito da presente dissertação, o estudo de caso abordado se relaciona com o modelo proposto por Gould e portanto, servirá de base na resolução dos problemas envolvidos nos estudos de casos. Existem outros autores como Eilon (1977), Mole (1975) e Alsbury (1972) que tratam do problema de dimensionamento e composição da frota de veículos e utilizam como base o modelo proposto por Wyatt (1961).

2.2. O Problema de Roteirização de Veículos – VRP (Vehicle Routing Problem)

O VRP tem por objetivo encontrar um conjunto de rotas ao menor custo (agregando os custos fixos e variáveis de transporte) respeitando as restrições e atendendo a demanda. Cada rota corresponde a uma viagem efetuada por um veículo *v* de capacidade $k_v > 0$ limitada. Uma viagem inicia-se num depósito, visita um subconjunto de clientes em I, e termina no depósito de partida. Considera-se que todas as demandas são conhecidas, cada cliente é atendido uma única vez e por um único veículo desde que a sua demanda seja menor ou igual a uma das capacidades k_v de veículos disponíveis pra o roteiro.

Dada uma rede $G = (N, A)$, onde N é o conjunto dos nós e A o dos arcos ponderados pela função de custo c: $A \rightarrow R+$. Sejam O e Q respectivamente, o conjunto das origens oi e destinos q_i, dos fluxos em G. Seja $D = \{d_i\}$ o conjunto das demandas dos clientes *i*, onde cada *i* é representado pelo ternário (o_i, q_i, d_i).

Dado um conjunto finito *I={i}* de clientes, o problema de roteirização de veículos em *G*, denotado VRP (da sua expressão inglesa “Vehicle Routing Problem”), consiste em planejar viagens a custo mínimo, para satisfazer os clientes *i* segundo o ternário (o_i, q_i, d_i) informado. As origens o_i representam os depósitos de armazenamento dos produtos (fluxos) a serem transportados. Dependendo do caso, pode existir um único depósito chamado de Centro de Distribuição. A demanda d_i de um cliente *i* representa a quantidade em volume de produtos encomendada pelo respectivo cliente.

O VRP se apresenta como um problema central num sistema logístico combinando o transporte e a distribuição física (Dantzig & Ramser, 1959). Em alguns setores, a contribuição do transporte no valor final do produto pode chegar a um alto percentual. No entanto, na organização e gestão de transporte, o uso das novas tecnologias e de métodos computacionais avançados, resultou em economias significativas de 5% a 20% (Toth & Vigo, 2001).

Na literatura foram propostos modelos e variantes do VRP. Alguns, na sua resolução, podem levar em conta a otimização da composição da frota Beasley(1985), Golden *et al.* (1984), Gheysens *et al.* (1986), (Gheysens & Golden (1984) e (Desrochers & Verhoog (1991). Porém, na sua maioria, busca-se principalmente, apenas a otimização da roteirização.

O VRP é conhecido como um problema de programação inteira da categoria de problemas NP-Hard (Não Polinomial Difícil), isto é o esforço computacional requerido para solucionar o problema aumenta exponencialmente com o seu tamanho Belfiore (2006), Duallert *et al.*, (2002), Gendreau *et al.* (1999) e Taillard (1999). Logo no espaço de busca do problema estão todas as possíveis soluções e percorrer todas, seria inviável do ponto de vista de tempo.

Na literatura encontram-se alguns artigos que tratam o VRP capacitado (CVRP – “capacitated Vehicle Routing Problem”), onde a frota é composta por veículos de mesma capacidade, ou seja, homogênea podendo ela ser ilimitada Tarantilis *et al.* (2005) ou limitada Tarantilis & Kiranoudis (2004).

As variantes mais abordadas do VRP consideram uma frota heterogênea sendo composta por veículos do mesmo tipo com capacidades diferentes, ou de tipos e capacidades diferentes. Pode-se citar o VRP com:

- Frota limitada (HFFVRP – “Heterogeneous fixed fleet Vehicle Routing Problem”) (Tarantilis *et al.* 2004; Liu & Shen, 1999);
- Frota ilimitada (HVRP - Heterogeneous Vehicle Routing Problem) (Belfiore 2006;, Choi & Tcha 2007; Li *et al.* 2007; Parlaktuna *et al.*, 2007);
- Frota mista (FSMVRP – “Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem”) (Dell’Amico *et al.*, 2006; Sahli, & Rand, 1993; Golden *et al.*, 1984; Gheysens *et al.*, 1984).

A variante FSMVRP se diferencia das demais apresentadas, pois trata simultaneamente o problema da roteirização com o de dimensionamento de uma frota heterogênea de veículos de tipos e capacidades diferentes (Dell´Amico *et al.*, 2006).

A formulação do modelo para VRP abordado neste trabalho será o FSMVRP (“Fleet size mix vehicle routing problem”), pois o objetivo é o dimensionamento da frota e como apresentado anteriormente o FSMVRP trata simultaneamente o problema da roteirização com o de dimensionamento de uma frota heterogênea de veículos de tipos e capacidades diferentes.

O modelo a seguir formulado por Salhi & Rand (1993), trata de uma programação linear inteira mista considerando uma frota ilimitada.

Seja N o número de clientes, *“0”* o depósito e K o número de tipos de veículos. O custo fixo, a capacidade e o tempo máximo por tipo K de veículo são dados respectivamente por F_k, Q_k, T_k. A demanda do i-ésimo cliente é dada por q_j. O tempo e o custo variável de viagem de i para j são denotados respectivamente por t_{ij} e C_{ij}.

As variáveis de decisão são:

$X_{ijk} = 1$, se o veículo do tipo K viaja de i-j, no caso contrário, vale 0.

Y_{ij} é a variável continua que denota a quantidade de bens transportados do cliente i para o cliente j.

R_{ij} é também a variável continua que denota o tempo gasto pelo veículo para percorrer a distância de i para j.

O problema tem como objetivo minimizar o custo total agregando os custos variáveis e fixos.

$$Min\sum_{k=1}^{K}F_k\sum_{j=1}^{N}X_{0jk}+\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}C_{ij}X_{ijk} \tag{7}$$

Sujeito à:

$$\sum_{k=0}^{K}\sum_{i=0}^{N}X_{ijk}=1, \qquad j=1,...,N, \tag{8}$$

$$\sum_{i=0}^{N}X_{ijk}-\sum_{l=0}^{N}X_{jlk}=0, \qquad j=0,...,N \quad k=1,...,K, \tag{9}$$

$$\sum_{i=0}^{N}Y_{ij}-\sum_{l=0}^{N}Y_{jl}=q_j, \qquad j=1,...,N, \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{N}Y_{i0}=0, \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{N}Y_{0j}=\sum_{i=1}^{N}q_i \tag{12}$$

$$Y_{ij}\le\sum_{j=1}^{N}X_{ijk}Q_k, \qquad i\ne j=0,...,N, \tag{13}$$

$$R_{ij}\le\sum_{k=1}^{K}T_kX_{ijk}, \qquad i\ne j=0,...,N, \tag{14}$$

$$R_{0j}=\sum_{k=1}^{K}X_{0jk}T_k-\sum_{k=1}^{K}X_{0jk}t_{0j}, \qquad j=1,...,N, \tag{15}$$

$$\sum_{i=0}^{N}R_{ip}-\sum_{j=0}^{N}R_{pj}=\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=0}^{N}X_{pjk}t_{pj}, \qquad p=1,...,N, \tag{16}$$

$$X_{ijk}\in\{0,1\}, \qquad Y_{ij}\ge 0, \qquad Y_{ii}=0 \qquad R_{ij}\ge 0, \tag{17}$$

$$i=0,...,N \qquad j=0,...,N \qquad k=1,...,K. \tag{18}$$

O dimensionamento da frota de veículos é obtido a partir da seguinte equação: $\sum_{j=1}^{N}X_{0jk}$, representando o número de veículos por cada tipo k de veículo.

A restrição (8) indica que cada cliente tem que ser visitado uma única vez e (9) garante que todos os clientes serão visitados. A restrição (10) denota que a diferença de quantidade entre os bens totais de um veículo quando chega a um cliente e sai, é igual a quantidade demanda por ele. A restrição (11) mostra que nenhum bem retornará ao depósito, ou seja, os veículos retornam vazios ao depósito. A restrição (12) denota que a quantidade total de bens saindo do depósito seja igual a demanda total dos clientes. A restrição (13) garante que os bens transportados de *i* para *j* sejam feitos somente quando há um veículo viajando de *i* para *j*. Isto mostra que o carregamento total do par *ij* não deve exceder a capacidade máxima do veículo (incluindo o par 0j). As restrições de (10) a (13) são de capacidade e subtour da eliminação das restrições.

A Restrição (14) indica que existe um tempo de viagem entre o par *ij* que deve ser inferior ao tempo máximo do veiculo do tipo *K*. A restrição (15) garante que o tempo gasto, depois de cobrir os pares saindo do depósito, não deve exceder ao tempo máximo permitido menos o tempo requerido para viajar até o primeiro cliente. A restrição (16) indica que toda vez que um veículo viajar entre dois clientes o tempo gasto é reduzido pela a distância do par.

Na literatura encontra-se também outro modelo que aborda o problema de dimensionamento da frota através da resolução do Problema de empacotamento, denotado BPP da sua versão inglesa (*"Bin Packing Problem*").

2.3. Problema de Bin Packing (The Bin Packing Problem - BPP)

Dado um conjunto finito $L = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ de objetos p_i associados a pesos respectivos w(pi) e um conjunto infinito de *Bins* de capacidade uniforme C. O BPP consiste em arrumar objetos que podem ser de diferentes dimensões em um número infinito de bins (contêineres, paletes, caixas, aviões, navios, trens, caminhões) de capacidade e volume limitados, e em geral uniformes. O objetivo do BPP consiste em minimizar o número de *bins* que conteriam todos os objetos (Alvim, 2004).

O problema de *Bin Packing* pertence à classe de problemas de NP- Hard (Chen *et al.*, 1995) e possui três variantes: unidimensional, bidimensional e tri-dimensional.

A primeira variante é a mais simples, chamada BPP unidimensional (1-D BPP) que objetiva particionar uma lista de objetos em sublistas (*bins*) de comprimento limitado (C), de maneira a minimizar o número de partições. Este tipo está relacionado a problemas de sequenciamento de tarefas e máquinas e empacotamento Bernardi (2001), Flestzar & Hindi (2000), Verweij (1996), Martello & Toth (1990) e Coffman *et al.* (1997).

A segunda variante chamada *BPP bidimensional* (2-D BPP) já foi estudada por diversos autores. O problema está relacionado a problemas de corte e empacotamento Dyckhoff & Finke, 1992; Berkley & Wang, 1989; Sleator, 1980; Beasley,1985). Problemas de corte e problemas de empacotamento guardam uma estrutura lógica similar, uma vez que empacotar itens pequenos (caixas) em objetos maiores (paletes) é análogo a cortar o espaço vazio dos objetos maiores (chapas) em partes de espaços vazios, alguns dos quais ocupados pelos itens (Yamassaki & Pureza, 2003). Quando o objetivo é corte deseja-se minimizar a perda ou resíduo de materiais (Costa *et al.* 2005).

A terceira variante é a mais abordada na literatura conhecida como o problema de *Bin Packing Tri-dimensional* (3-D BPP). Ela está relacionada a problemas de carregamento de paletes Bischoff *et al.* (1995), containeres (Han *et al.*, 1989), (Martello *et al.*,2000), trens(Hasseler & Talbolt, 1990), aviões (Chan *et al.*, 2006). Alguns autores tratam casos especiais como paletes de diferentes formas e tamanhos (Chan *et al.*, 2006), assim como em containeres consideram diferentes tamanhos e formatos de caixa, variando apenas na forma de alocação dos produtos dentro do container (Han *et al.*, 1989; George, 1992; Portman, 1991; George & Robinson, 1980; Ngoi *et al.*, 1994) e outros tratam junto ao carregamento, o balanceamento das cargas (Liu *et al.*, 2007).

Seja n o número de itens, $N:=\{1,...,n\}$ a lista de itens e $M:=\{1,...,m\}$ a lista de bins disponíveis. O peso do item j, $j \in N$, na primeira e segunda dimensão são wj e vj, respectivamente, e a capacidade dos *bins* na primeira e segunda dimensão são w e v, respectivamente.

Uma formulação para o bin packing bi-dimensional

$$Min \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \tag{19}$$

Sujeito á:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \tag{20}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_{ij} \leq w \qquad \forall \quad i = 1,\ldots,m \tag{21}$$

$$\sum_{j=1}^{n} v_j x_{ij} \leq v \qquad \forall \quad i = 1,\ldots,m \tag{22}$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \qquad \forall \quad i = 1,\ldots,m, \quad j = 1,\ldots,n \tag{23}$$

$$x_{ij} \text{ int} \quad \forall \quad i = 1,\ldots,m, \quad j = 1,\ldots,n \tag{24}$$

A restrição 20 garante que todos os itens sejam alocados nos bins. As restrições 20 e 21 indicam que a somatória dos pesos da primeira e segunda dimensão dos itens alocados no *bin i*, não devem exceder a capacidade. As restrições 23 e 24 indicam que a variável x_{ij} é binária.