

2

Coordenadas Baricêntricas e Extensões

Dado um ponto v_0 no interior de uma região, vamos expressá-lo como combinação linear de um conjunto de pontos v_1, v_2, \dots, v_n , pertencentes a fronteira dessa região,

$$v_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, \quad \text{onde} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1. \quad (2-1)$$

Os números $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ são as coordenadas do ponto v_0 em relação aos pontos v_1, v_2, \dots, v_n . Quando essas coordenadas são todas não negativas, denominamos os λ_i de Coordenadas Baricêntricas.

2.1

Coordenadas Baricêntricas em Simplexos

No triângulo podemos definir as Coordenadas Baricêntricas de um ponto como a única solução do sistema de equações (2-1). As coordenadas baricêntricas em relação aos vértices desse triângulo representam a influência de cada vértice sobre o ponto dado e podem ser obtidas através de razões entre áreas.

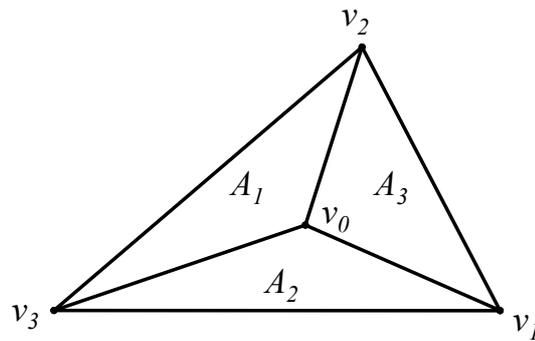


Figura 2.1: Representação das áreas A_1, A_2 e A_3 utilizadas, para a obtenção das coordenadas dos vértices v_1, v_2 e v_3 em relação ao ponto v_0 .

Dado um ponto v_0 no interior de um triângulo $t = [v_1, v_2, v_3]$ (ver figura 2.1), as coordenadas baricêntricas de v_0 em relação aos vértices desse triângulo t são

$$\lambda_1 = \frac{A_1}{A_t}, \quad \lambda_2 = \frac{A_2}{A_t}, \quad \lambda_3 = \frac{A_3}{A_t}, \quad (2-2)$$

sendo A_i a área do triângulo formado pelo ponto v_0 e os vértices pertencentes a aresta de t oposta a v_i . E $A_t = A_1 + A_2 + A_3$ a área total do triângulo t .

Em três dimensões podemos definir Coordenadas Baricêntricas com respeito a um tetraedro $T = [v_1, v_2, v_3, v_4]$ como a única solução do sistema de equações (2-1) (ver figura 2.2).

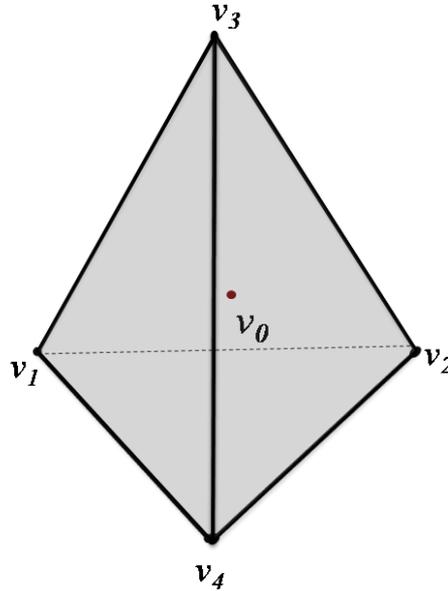


Figura 2.2: Um ponto v_0 no interior da região limitada pelo tetraedro T de vértices v_1, v_2, v_3 e v_4 .

Similarmente ao caso de duas dimensões, podemos obter as Coordenadas Baricêntricas do ponto v_0 em relação aos vértices do tetraedro T , através de razões entre volumes:

$$\lambda_1 = \frac{V_1}{V_T}, \quad \lambda_2 = \frac{V_2}{V_T}, \quad \lambda_3 = \frac{V_3}{V_T}, \quad \lambda_4 = \frac{V_4}{V_T}, \quad (2-3)$$

sendo V_i o volume do tetraedro formado pelo ponto v_0 e os vértices pertencentes a face de T oposta a v_i . E $V_T = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$ o volume total do tetraedro T .

Para triângulos em \mathbb{R}^2 e tetraedros em \mathbb{R}^3 , o sistema de equações (2-1) tem solução única, pois o número de incógnitas é igual ao número de equações. Quando temos, por exemplo, em \mathbb{R}^2 um polígono com mais de três vértices o sistema de equações (2-1) se torna *possível e indeterminado*, pois seu número de incógnitas é maior do que o número de equações, podendo existir infinitos

conjuntos de coordenadas para o ponto v_0 . Observe que o mesmo acontece em \mathbb{R}^3 para poliedros com mais de quatro vértices.

Um problema que vem recebendo considerável atenção nos últimos anos é, como generalizar Coordenadas Baricêntricas para esses casos. Nesse capítulo abordaremos alguns métodos de extensão de coordenadas baricêntricas, que buscam estender de forma suave a *influência* de um vértice para o interior de uma região.

2.2

Suavidade Harmônica

Seja P uma região fechada em d dimensões com uma fronteira linear por partes, denotemos essa fronteira por ∂P . Temos uma função contínua f definida na fronteira ∂P , a função identidade, e procuramos uma extensão suave u de f no interior de P . Essa suavidade é geralmente interpretada impondo que u seja harmônica, ou seja, ao impormos que u seja uma solução da equação de Laplace no interior de P :

$$\nabla^2 u(v) = 0. \quad (2-4)$$

Então, procuramos uma função u definida em P , tal que

$$\nabla^2 u(v) = 0, \quad v \in \text{int}(P) \quad e \quad u(v) = f(v), \quad v \in \partial P. \quad (2-5)$$

Achar uma função u com as condições como as dadas acima é chamado de *Problema de Dirichlet*, neste capítulo abordaremos métodos que buscam estender a *influência* de um vértice da fronteira da região P para o seu interior satisfazendo as tais condições.

2.3

Algumas Construções de Coordenadas Baricêntricas

2.3.1

Coordenadas do Valor Médio

Dado um ponto v_0 no interior de P , uma das formas de determinar $u(v_0)$, proposta por Floater (3), é usar o fato de funções harmônicas obedecerem o Teorema do Valor Médio no interior de P .

Coordenadas do Valor Médio em Duas Dimensões

Considere P uma região do plano limitada por um polígono fechado que chamaremos de polígono de controle. Denotemos por $B(v_0, r)$ a bola centrada

no ponto v_0 e raio r .

Teorema 2.3.1 (Teorema do Valor Médio Circunferencial) *Seja $P \subset \mathbb{R}^2$ uma região conexa, u uma função harmônica em P e $B = B(v_0, r) \subset P$ com fronteira Γ , então*

$$u(v_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\Gamma} u(v) ds. \tag{2-6}$$

Dem: ver o livro de Sheldon (2).

Considere o triângulo $T_i = [v_0, v_i, v_{i+1}]$ (ver figura 2.3) e seja Γ_i o arco de Γ contido em T_i , assim a equação (2-6) pode ser escrita da forma

$$u(v_0) = \frac{1}{2\pi r} \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} u(v) ds \tag{2-7}$$

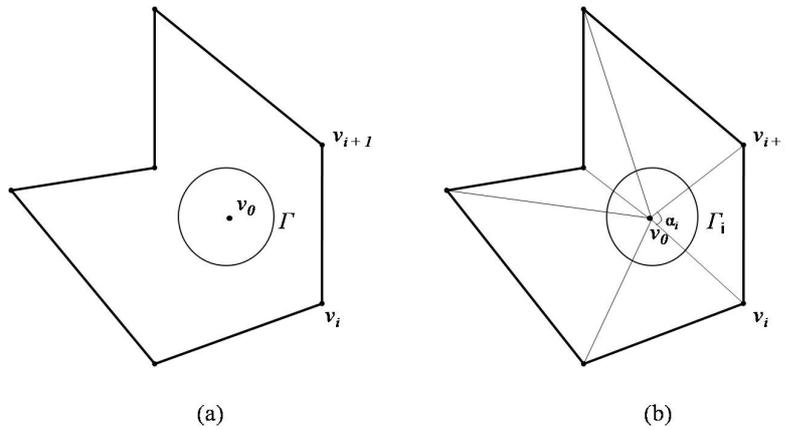


Figura 2.3: (a) Circunferência Γ centrada em v_0 , no interior de região P . (b) Triangularização de região P .

Lema 2.3.2 *Se $f : \Gamma_i \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função linear e α_i o ângulo entre os vértice v_i e v_{i+1} , então*

$$\int_{\Gamma_i} f(v) ds = r \alpha_i f(v_0) + r^2 \tan\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \left(\frac{f(v_i) - f(v_0)}{\|v_i - v_0\|} + \frac{f(v_{i+1}) - f(v_0)}{\|v_{i+1} - v_0\|} \right) \tag{2-8}$$

Dem: ver o artigo de Floater (3).

Com o lema 2.3.2 podemos reescrever a equação (2-7), com a notação $v_{n+1} = v_1$:

$$u(v_0) = \frac{1}{2\pi r} \sum_{i=1}^n \left(r \alpha_i u(v_0) + r^2 \tan\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \left(\frac{u(v_i) - u(v_0)}{\|v_i - v_0\|} + \frac{u(v_{i+1}) - u(v_0)}{\|v_{i+1} - v_0\|} \right) \right)$$

$$u(v_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \alpha_i u(v_0) + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n r \tan \frac{\alpha_i}{2} \left(\frac{u(v_i) - u(v_0)}{\|v_i - v_0\|} + \frac{u(v_{i+1}) - u(v_0)}{\|v_{i+1} - v_0\|} \right)$$

Como $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 2\pi$, $\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \alpha_i u(v_0) = u(v_0)$,

$$0 = \frac{r}{2\pi} \sum_{i=1}^n \tan \frac{\alpha_i}{2} \left(\frac{u(v_i) - u(v_0)}{\|v_i - v_0\|} + \frac{u(v_{i+1}) - u(v_0)}{\|v_{i+1} - v_0\|} \right)$$

$$0 = \sum_{i=1}^n \tan \frac{\alpha_i}{2} \left(\frac{u(v_i) - u(v_0)}{\|v_i - v_0\|} + \frac{u(v_{i+1}) - u(v_0)}{\|v_{i+1} - v_0\|} \right)$$

$$0 = \sum_{i=1}^n \tan \frac{\alpha_i}{2} \left(\frac{u(v_i) - u(v_0)}{\|v_i - v_0\|} \right) + \sum_{i=2}^{n+1} \tan \frac{\alpha_{i-1}}{2} \left(\frac{u(v_i) - u(v_0)}{\|v_i - v_0\|} \right)$$

$$0 = \sum_{i=1}^n \tan \frac{\alpha_i}{2} \left(\frac{u(v_i) - u(v_0)}{\|v_i - v_0\|} \right) + \sum_{i=1}^n \tan \frac{\alpha_{i-1}}{2} \left(\frac{u(v_i) - u(v_0)}{\|v_i - v_0\|} \right)$$

onde $\alpha_0 = \alpha_n$.

$$u(v_0) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\tan \frac{\alpha_i}{2} + \tan \frac{\alpha_{i-1}}{2}}{\|v_i - v_0\|} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\tan \frac{\alpha_i}{2} + \tan \frac{\alpha_{i-1}}{2}}{\|v_i - v_0\|} u(v_i) \right). \quad (2-9)$$

E assim temos,

$$w_i = \left(\frac{\tan \frac{\alpha_i}{2} + \tan \frac{\alpha_{i-1}}{2}}{\|v_i - v_0\|} \right), \quad u(v_0) \sum_{i=1}^n w_i = \sum_{i=1}^n w_i u(v_i). \quad (2-10)$$

Escrevendo $\lambda_i = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$, temos

$$u(v_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u(v_i). \quad (2-11)$$

Observe que, tomando a função u como a identidade, λ_i serão as coordenadas baricêntricas do ponto v_0 em relação aos vértices v_i pertencentes a fronteira da região P .

Interpretação Geométrica

A chave para a derivação das *coordenadas de valor médio* está no fato que a integral das normais unitárias sobre uma bola é igual a zero. Comprovamos isso reescrevendo o Teorema do Valor Médio. Partindo desse ponto, podemos dar uma interpretação geométrica para as coordenadas de valor médio.

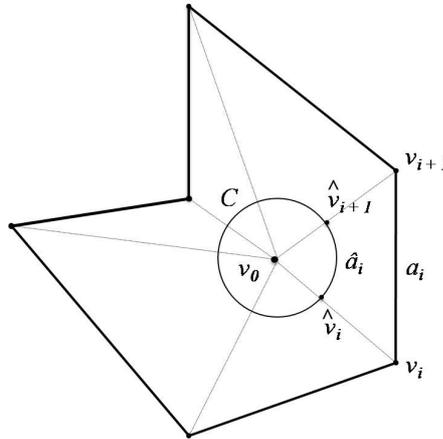


Figura 2.4: Projeção da aresta a_i sobre a circunferência C .

Defina os vetores unitários $e_i = (v_i - v_0)/r_i$, onde $r_i = \|v_i - v_0\|$. Os novos pontos $\hat{v}_i = v_0 + e_i$ estão sobre uma circunferência unitária C centrada em v_0 , e a projeção em relação a v_0 de uma aresta a_i sobre C é um arco \hat{a}_i com extremidades \hat{v}_i e \hat{v}_{i+1} (ver figura 2.4).

Visto que a normal $n(v)$ apontando para fora sobre a circunferência C em qualquer ponto $v \in C$ é dada por $v - v_0$, temos

$$0 = \int_C n(v) ds = \int_C v - v_0 ds = \sum_{a_i \in A} \int_{\hat{a}_i} v - v_0 ds \quad (2-12)$$

onde A é o conjunto de todas as arestas do polígono.

A integral sobre cada aresta projetada define um vetor $m_i = \int_{\hat{a}_i} v - v_0 ds$ (ver figura 2.5), que chamaremos de Vetor Médio, e podemos escrevê-lo em função dos vetores unitários e_i

$$m_i = \mu_{i,i} e_i + \mu_{i+1,i} e_{i+1}, \quad (2-13)$$

onde $\mu_{i,j}$ representa a contribuição do vetor unitário e_i para o Vetor Médio m_j . Da mesma forma temos,

$$m_{i-1} = \mu_{i-1,i-1} e_{i-1} + \mu_{i,i-1} e_i \quad (2-14)$$

E o peso de um vértice v_i será a soma das suas contribuições para a representação dos vetores m_{i-1} e m_i , assim temos:

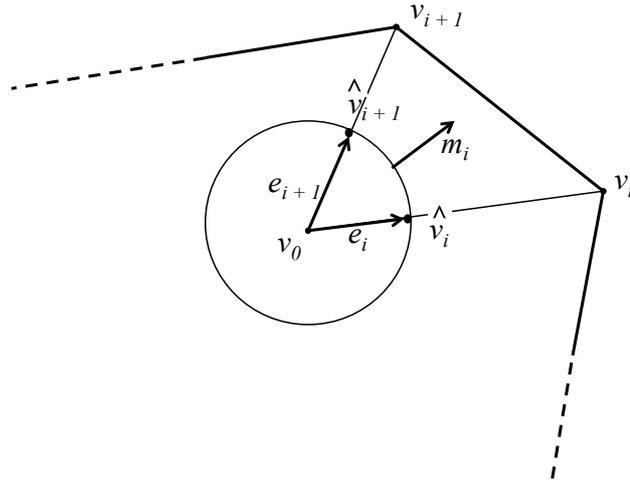


Figura 2.5: Vetor m_i , resultante da integral das normais unitárias sobre o arco de circunferência \hat{a}_i .

$$0 = \sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n \mu_{i,i} e_i + \mu_{i+1,i} e_{i+1} = \sum_{i=1}^n \mu_{i,i} \frac{v_i - v_0}{\|v_i - v_0\|} + \mu_{i+1,i} \frac{v_{i+1} - v_0}{\|v_{i+1} - v_0\|} \tag{2-15}$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^n w_i (v_i - v_0), \quad w_i = \frac{1}{r_i} (\mu_{i,i} + \mu_{i+1,i}) \tag{2-16}$$

onde

$$\mu_{i,i-1} = \tan\left(\frac{\alpha_{i-1}}{2}\right) \text{ e } \mu_{i,i} = \tan\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \tag{2-17}$$

E segue que

$$v_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, \quad \lambda_i = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \tag{2-18}$$

Coordenadas do Valor Médio em Três Dimensões

Consideremos uma região do espaço cuja fronteira ∂P , um poliedro, é uma malha triangular fechada (ver figura 2.6).

Teorema 2.3.3 (Teorema do Valor Médio Sólido) *Suponha $P \subset \mathbb{R}^3$, u uma função harmônica em P e $B = B(v_0, r) \subset P$ com fronteira S*

$$u(v_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_S u(v) ds \tag{2-19}$$

Dem: ver o livro de *Sheldon* (2).

Para a construção das coordenadas de valor médio em três dimensões vamos, como na seção anterior, observar que reescrevendo o teorema acima

caímos no fato de a integral de todas as normais unitárias, dessa vez sobre a esfera, ser igual a zero.

Defina os vetores unitários e_i e os pontos \hat{v}_i como na seção anterior, onde os pontos \hat{v}_i estão sobre uma esfera unitária E centrada em v_0 , e $\hat{t} = [\hat{v}_i, \hat{v}_j, \hat{v}_k]$ a projeção em relação a v_0 de cada face $t = [v_i, v_j, v_k]$ do poliedro de controle (ver figura 2.7).

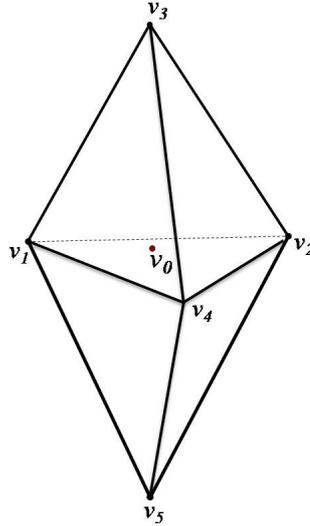


Figura 2.6: Um ponto v_0 no interior da região limitada pelo poliedro de vértices v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5 .

Visto que a normal unitária $n(v)$ sobre E para qualquer ponto $v \in E$ é simplesmente $v - v_0$, temos

$$0 = \int_E n(v) ds = \int_E (v - v_0) ds = \sum_{t \in T} \int_{\hat{t}} (v - v_0) ds, \quad (2-20)$$

onde T é o conjunto de todas as faces do poliedro de controle.

Análogo ao caso em duas dimensões, a integral sobre cada face projetada define um vetor $m_t = \int_{\hat{t}} (v - v_0) ds$.

Assim como em duas dimensões, podemos escrever o vetor m_t como combinação linear dos vetores unitários

$$m_t = \int_{\hat{t}} (v - v_0) ds = \mu_{i,t} e_i + \mu_{j,t} e_j + \mu_{k,t} e_k. \quad (2-21)$$

Como alternativa ao cálculo da integral na equação (2-20), considere a superfície S formada pela interseção do tetraedro de vértices v_0, v_i, v_j e v_k com a esfera E . A superfície S é formada por quatro faces, o triângulo esférico $\hat{t} = [\hat{v}_i, \hat{v}_j, \hat{v}_k]$ e três faces planas f_{ij}, f_{jk} e f_{ki} , setores circulares (veja figura

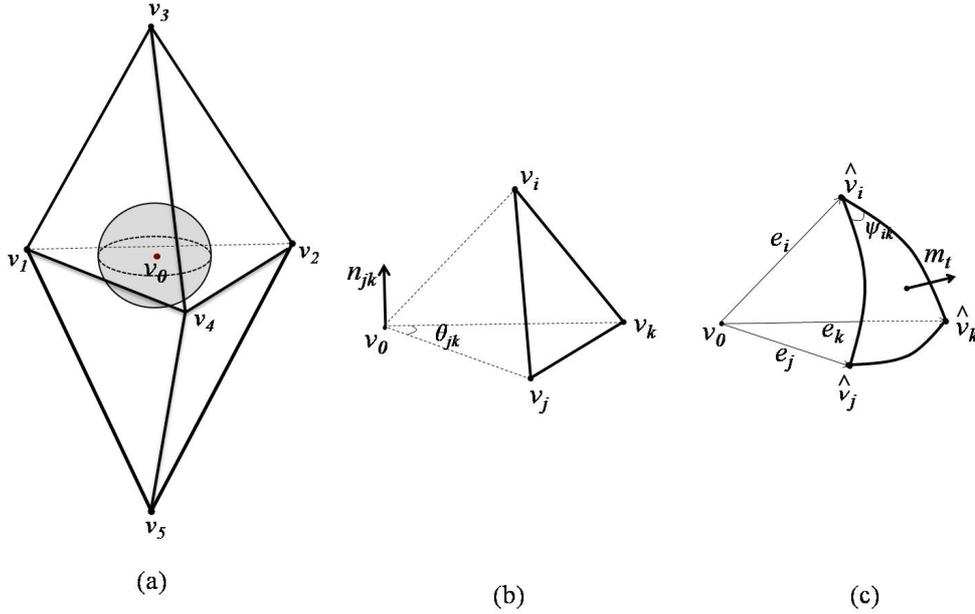


Figura 2.7: (a) Esfera centrada no ponto v_0 , no interior de região P . (b) Em destaque, o ponto v_0 e uma face $t = [v_i, v_j, v_k]$ do poliedro ∂P . (c) Em destaque, o ponto v_0 , a projeção $\hat{t} = [\hat{v}_i, \hat{v}_j, \hat{v}_k]$ da face t sobre a esfera e o vetor m_t , resultante da integral das normais unitárias sobre \hat{t} .

2.7(c)).

Como S é uma superfície fechada, então:

$$\int_{\hat{t}} n(v) + \int_{f_{ij}} n(v) + \int_{f_{jk}} n(v) + \int_{f_{ki}} n(v) = 0, \quad v \in S. \quad (2-22)$$

E segue que

$$\int_{\hat{t}} n(v) = - \int_{f_{ij}} n(v) - \int_{f_{jk}} n(v) - \int_{f_{ki}} n(v). \quad (2-23)$$

Dessa forma podemos obter o valor da integral $\int_{\hat{t}} n(v)$ já que a normal $n(v)$ é constante sobre cada face plana da superfície S . E, como os vetores e_i, e_j e e_k , são unitários, a área do setor circular é dada pela metade do ângulo entre suas arestas, assim:

$$m_t = \int_{\hat{t}} n(v) = \frac{1}{2}(\theta_{ij}n_{ij} + \theta_{jk}n_{jk} + \theta_{ki}n_{ki}), \quad (2-24)$$

onde n_{ij} é a normal unitária da face f_{ij} apontando para dentro.

As equações (2-21) e (2-24) fornecem duas formas de expressar o vetor m_t , igualando essas duas equações e observando que $n_{jk} \cdot e_j = n_{jk} \cdot e_k = 0$, temos

$$\mu_{i,t} = \frac{\theta_{jk} + \theta_{ij}n_{ij}n_{jk} + \theta_{ki}n_{ki}n_{jk}}{2e_i n_{jk}}. \quad (2-25)$$

Uma vez calculados os coeficientes $\mu_{i,t}, \mu_{j,t}$ e $\mu_{k,t}$, voltemos a equação (2-20),

$$0 = \sum_{t \in T} \int_{\hat{t}} (v - v_0) = \sum_{t \in T} m_t = \sum_{t \in T} \mu_{i,t} e_i + \mu_{j,t} e_j + \mu_{k,t} e_k = \sum_{i=1}^n \sum_{t \ni v_i} \mu_{i,t} e_i \quad (2-26)$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} \sum_{t \ni v_i} \mu_{i,t} e_i = \sum_{i=1}^n w_i (v_i - v_0), \quad (2-27)$$

onde

$$w_i = \frac{1}{r_i} \sum_{t \ni v_i} \mu_{i,t}. \quad (2-28)$$

E segue que

$$v_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, \quad \lambda_i = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}. \quad (2-29)$$

Não Negatividade das Coordenadas

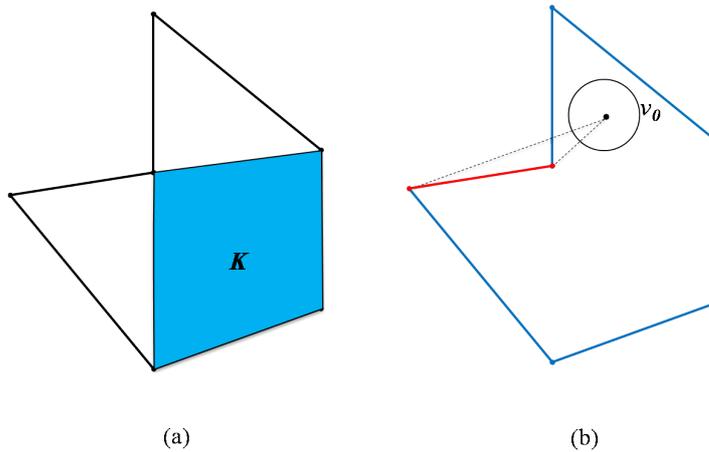


Figura 2.8: (a) Em azul o núcleo K da região P , região onde os segmentos de reta pv_i , p um ponto pertencente ao núcleo e v_i vértices do polígono, não interceptam as arestas do polígono. (b) Um ponto v_0 não pertencente a K , tendo como consequência a projeção contrária da aresta em vermelho.

A não negatividade das coordenadas do valor médio é comprometida quando P é uma região não convexa. Essa limitação em regiões não convexas, para um ponto fora do núcleo é devido ao fato de projetarmos as faces da fronteira sobre uma bola centrada nesse ponto, e como podemos observar na figura 2.8(b), algumas faces são projetadas com orientação contrária. Dessa forma a normal à essas faces são projetadas apontando para o interior da esfera, gerando assim contribuição negativa para as coordenadas de seus vértices.

2.3.2 Coordenadas Harmônicas

As *coordenadas harmônicas* são definidas por Joshi et al. (5) diretamente como solução de equação de Laplace no interior da região P

$$\nabla^2 u(v) = 0 \quad v \in \text{int}(P), \tag{2-30}$$

sujeita a uma determinada condição de fronteira.

Vamos considerar primeiramente a construção das coordenadas harmônicas em duas dimensões. Seja P uma região limitada em \mathbb{R}^2 cuja fronteira ∂P é formada por um polígono. Procura-se uma solução direta ao problema de Dirichlet. Parra isso, é preciso definir a condição de fronteira. A proposta de Joshi et al. é definir essa condição pelo mesmo problema de Dirichlet de dimensão um. Para cada vértice $v_i \in \partial P$ procuramos uma função h_i definida em P tal que

$$\nabla^2 h_i(v) = 0, \quad v \in \text{Int}(P) \quad e \quad h_i(v) = \phi_i(v), \quad v \in \partial P, \tag{2-31}$$

onde $\phi_i(v)$ é a função linear por partes definida em ∂P tal que $\phi_i(v_j) = \delta_{i,j}$, ou seja $\phi_i(v_j)$ é igual a 1 se $i = j$ e 0 se $i \neq j$. No polígono da figura (2.9(a)), por exemplo, a função $\phi_i(\partial P)$ está definida sobre as arestas a_1, \dots, a_6 de forma que $\phi_i(v_j) = \delta_{i,j}$ para $i = 1, \dots, 6$.

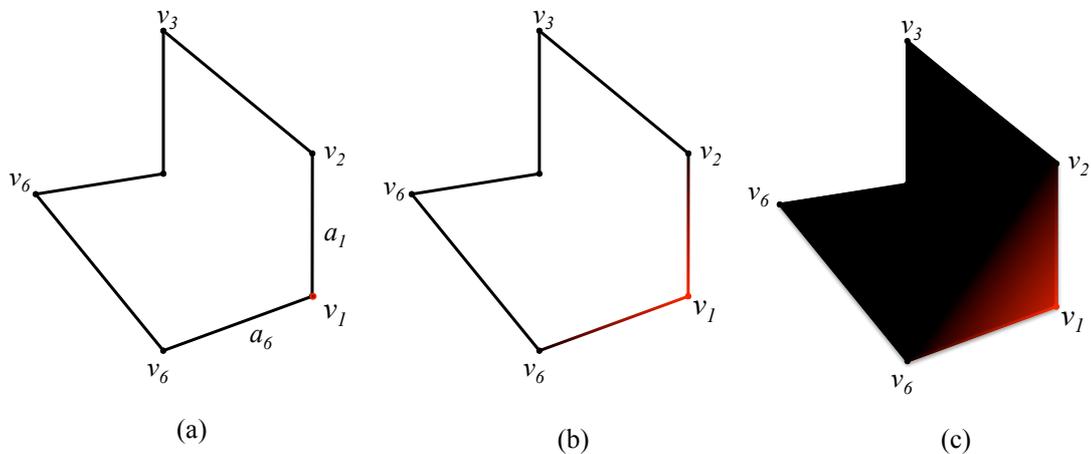


Figura 2.9: Comportamento da função h_1 , que representa a influência do vértice v_1 , sobre (a) os vértices, (b) as arestas e (c) no interior do poliedro ∂P .

Observe que a função $\phi_i(v)$, definida sobre as arestas do polígono, é dada por uma solução da equação de Laplace em uma dimensão

$$\frac{\partial^2 \phi_i(v)}{\partial v^2} = 0, \quad v \in \partial P. \tag{2-32}$$

Procuramos a solução da equação de Laplace em ∂P cuja condição de fronteira imposta sobre os vértices $v_i, i = 1, \dots, 6$ é dada por:

$$\phi(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Ou seja, ϕ_i é a função que interpola linearmente os valores 1 no vértice v_i e 0 nos vértices v_{i-1} e v_{i+1} (ver figura 2.9(b)). Voltando para duas dimensões, uma vez definida a condição de fronteira $\phi_i(v)$, obtemos a solução da equação de Laplace no interior de P

$$\begin{cases} \nabla^2 h_i(v) = 0, & v \in \text{Int}(P) \\ h_i(v) = \phi_i(v) & \text{se } v \in \partial P \end{cases}$$

através de diferenças finitas em um gride regular. Dado um ponto $v_0 \in \text{int}(P)$, $h_i(v_0)$ representa o peso do vértice v_i em relação ao ponto v_0 . A função $h_i(v)$, $v \in \text{int}(P)$ representa a propagação da influência do vértice v_i no interior do polígono (ver figura 2.9(c)).

Passemos então para a construção das coordenadas em três dimensões. Considere P uma região limitada em \mathbb{R}^3 cuja fronteira é um poliedro de faces não necessariamente triangulares. Procuramos uma solução da equação de Laplace no interior desse poliedro cuja a condição de fronteira é obtida de forma análoga a duas dimensões. Começamos obtendo a solução da equação de Laplace sobre as arestas desse poliedro, ou seja, uma função que interpola linearmente os valores 1 no vértice v_i e 0 nos vértices pertencentes a sua estrela, obtendo assim a condição de contorno para a solução da equação de Laplace definida no interior das faces desse poliedro.

A solução de equação de Laplace sobre as faces desse poliedro será a condição de fronteira para uma função harmônica definida no interior da região P , essa função representa a propagação da influencia do vértice v_i no interior do poliedro (ver figura 2.10). Como em duas dimensões, essa solução é obtida através de diferenças finitas em um gride regular.

E assim, dado um ponto v_0 no interior de P , podemos escrevê-lo da seguinte forma.

$$v_0 = \sum_{i=1}^n h_i(v_0)v_i \quad (2-33)$$

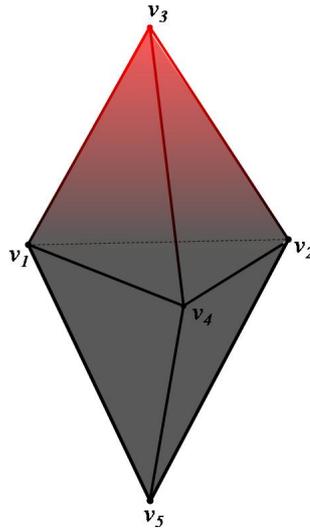


Figura 2.10: Influência do vértice v_3 na região limitada pelo poliedro.

2.3.3 Coordenadas de Green

As *coordenadas de Green* são motivadas por Lipman et al. (10) pela terceira identidade de Green, sendo solução fundamental da equação de Laplace. Diferente das coordenadas obtidas nas sessões anteriores, onde apenas os vértices da fronteira eram usados para expressar um ponto no interior, as coordenadas de Green levam em consideração a orientação das faces pertencentes a fronteira ∂P .

Seja $F = \{f_1, \dots, f_k\}$, onde k é o número de faces de ∂P , o conjunto das faces de ∂P : arestas em 2D e triângulos em 3D. Denote por $n(f_j)$ a normal unitária da face f_j orientada para fora.

Assim cada ponto interior $v_0 \in \text{int}(P)$ é representado como combinação linear

$$v_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^k \gamma_j n(f_j), \quad (2-34)$$

Seja G a função de Green, solução fundamental da equação de Laplace

$$G(v, v_0) = \begin{cases} \frac{1}{(2-d)A_d} \|v - v_0\|^{2-d}, & d \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi} \log \|v - v_0\|, & d = 2 \end{cases}$$

onde A_d é a área de um esfera unitária em \mathbb{R}^d , e $v_0 \in \text{int}(P)$. Pela terceira identidade de Green, podemos expressar $u(v_0)$ em função dos valores da função u e das normais na fronteira da região P .

$$u(v_0) = \int_{\partial P} \left(u(v) \frac{\partial G(v, v_0)}{\partial n(v)} - G(v, v_0) \frac{\partial u(v)}{\partial n(v)} \right) dv \quad (2-35)$$

onde n é a normal orientada para fora sobre ∂P e dv é o elemento de área em ∂P .

Tomando a função u como a função identidade, obtemos

$$v_0 = \int_{\partial P} \left(v \frac{\partial G(v, v_0)}{\partial n(v)} - G(v, v_0) \frac{\partial v}{\partial n(v)} \right) dv \quad (2-36)$$

Reescrevermos então, a equação acima fazendo a integral sobre a fronteira ∂P como a soma das integrais sobre as faces f_j . Sendo a fronteira ∂P formada em duas dimensões, por arestas e em três dimensões por triângulos, temos $n(v)$ constante sobre cada face f_j , logo temos $\partial v / \partial n(v) = \partial v / \partial n(f_j) = n(f_j)$.

$$v_0 = \sum_{f_j \in F} \left(\int_{f_j} v \frac{\partial G(v, v_0)}{\partial n(v)} dv - \int_{f_j} G(v, v_0) n(f_j) dv \right), \quad v_0 \in \text{int}(P) \quad (2-37)$$

Dado um ponto v sobre uma face f_j , podemos escrevê-lo em função dos vértices dessa face, $v = \sum_{l=1}^d \omega_l v_l$, sendo $\omega_1, \dots, \omega_d$ as coordenadas baricêntricas de v em relação aos vértices de uma face f_j . Lembrando que essas coordenadas são únicas pois temos como faces arestas ou triângulos. Assim,

$$v_0 = \sum_{f_j \in F} \sum_{v_l \in V(f_j)} v_l \int_{f_j} \omega_l(v) \frac{\partial G(v, v_0)}{\partial n(v)} dv - \sum_{f_j \in F} n(f_j) \left(\int_{f_j} G(v, v_0) dv \right) \quad (2-38)$$

onde $V(f_j)$ é o conjunto dos vértices da face f_j .

E reorganizando a última equação, temos

$$v_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^k \gamma_j n(f_j), \quad v_0 \in \text{int}(P), \quad (2-39)$$

onde λ_i e γ_j são:

$$\lambda_i = \int_{v \in N(v_i)} \omega_i(v) \frac{\partial G(v, v_0)}{\partial n(v)} dv, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2-40)$$

$$\gamma_j = - \int_{v \in f_j} G(v, v_0) dv, \quad j = 1, \dots, k, \quad (2-41)$$

sendo $N(v_i)$ a união de todas as faces no primeiro anel de vértices de v_i .

Adaptações práticas

Fatores escalares $\{s_j\}$, $j = 1, \dots, k$ são acrescentados, por Lipman et al. (10), à equação (2-39) com o objetivo de garantir algumas propriedades importantes, tal como invariância de escala. Dessa forma, através das coordenadas de Green, um ponto v_0 no interior de uma região P é escrito em função dos elementos de fronteira ∂P de seguinte forma

$$v_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^k \gamma_j s_j n(f_j). \quad (2-42)$$

Considere S_j e S'_j formados pela face f_j com o ponto $v_j + n(f_j)$ e a face f'_j com o ponto $v'_j + s_j n(f'_j)$, respectivamente, onde v_j é um vértice da face f_j e f'_j é a face correspondente após a deformação do poliedro. O escalar s_j é definido de forma a minimizar a distorção de S_j a S'_j .

Ou seja, s_j representa o “alongamento” da face f_j a medida que o poliedro ∂P é deformado.

Em duas dimensões s_j fica bem definido pela razão entre o tamanho da aresta depois e antes da deformação no polígono.

$$s_j = \frac{\|f'_j\|}{\|f_j\|}. \quad (2-43)$$

Em três dimensões a distorção, em geral, não fica bem descrita por um único escalar. Uma sugestão é considerar $s_j = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2}}$, onde σ_1 e σ_2 são os valores singulares do mapeamento linear que leva f_j em f'_j . Outra alternativa proposta em *Computing discrete minimal surfaces and their conjugates* (11) é considerar

$$s_j = \frac{\sqrt{\|u'\|^2 \|v\|^2 - 2(u'v')(uv) + \|v'\|^2 \|u\|^2}}{\sqrt{8} \text{area}(f_j)}. \quad (2-44)$$

Onde u e v são vetores definidos pelas arestas de f_j e u' e v' os vetores definidos pelas arestas de f'_j .