2
Modelos em Espaço de Estado

2.1
Motivação

Uma ***representação em espaço de estado linear*** constitui-se num ferramental estatístico que possibilita tratar de forma unificada um vasto conjunto de modelos de séries temporais, sejam eles univariados ou multivariados, representando-os em um sistema geral de equações, que serão enunciadas mais à frente, no momento apropriado.

O modelo, uma vez posto em uma forma de espaço de estado, nos permite aplicar o ***filtro de Kalman***, um conjunto de equações recursivas utilizado, em especial, para estabelecer algoritmos de previsão e estimação de modelos para séries temporais de interesse.

Dentre os principais modelos de séries temporais que podem ser representados em uma forma de espaço de estado, podemos enumerar: modelos estruturais univariados e multivariados, modelos ARIMA e SARIMA com previsão exata, modelos de regressão com coeficientes fixos, modelos de regressão com coeficientes variantes no tempo de forma estocástica, modelos autorregressivos com coeficientes que variam exogenamente, modelos autorregressivos com coeficientes que variam endogenamente, modelos autorregressivos com coeficientes que variam estocasticamente, modelos de volatilidade estocástica, modelos de Spline, modelos para estimação de IBNR, modelos para estrutura a termo da curva de juros, etc. [vide Harvey (1989), West e Harrison (1997), Durbin e Koopman (2001), Brockwell e Davis (2002) para maiores detalhes e aprofundamentos].

2.2
Representação em Espaço de Estado Linear: Definição

Um processo estocástico p-variado $Y_t = (Y_{t1}, Y_{t2}, ..., Y_{tp})'$ de tamanho n tem uma representação em espaço de estado linear quando podemos decompô-lo numa transformação afim envolvendo os processos estocásticos em geral não-observáveis α_t e ε_t, sendo α_t responsável pela dinâmica de Y_t, e ε_t um vetor de erros. Abaixo, são apresentadas as equações que definem uma representação em espaço de estado linear:

$$\underset{px1}{Y_t} = \underset{pxm}{Z_t}\,\underset{mx1}{\alpha_t} + \underset{px1}{d_t} + \underset{px1}{\varepsilon_t} \tag{2.1}$$

$$\underset{mx1}{\alpha_{t+1}} = \underset{mxm}{T_t}\,\underset{mx1}{\alpha_t} + \underset{mx1}{c_t} + \underset{mxr}{R_t}\,\underset{rx1}{\eta_t} \tag{2.2}$$

$$\underset{px1}{\varepsilon_t} \sim WN(0, \underset{pxp}{H_t}) \tag{2.3}$$

$$\underset{rx1}{\eta_t} \sim WN(0, \underset{rxr}{Q_t}) \tag{2.4}$$

As equações (2.1) e (2.2) representam, respectivamente, a ***equação das medições*** ou ***das observações*** e a ***equação de transição*** ou ***estado***. O vetor α_t consiste de um processo estocástico m-variado e não-observável chamado de ***vetor de estado*** ou ***estado*** cuja média e variância, por hipótese, são dadas respectivamente por:

$$E(\alpha_1) = a_1 \tag{2.5}$$

$$V(\alpha_1) = P_1 \tag{2.6}$$

sendo a_1 e P_1 usualmente desconhecidos, uma vez que, na prática, é pouco usual que todas as coordenadas do vetor de estado sejam estacionárias e, simultaneamente, não dependam de algum parâmetro a ser estimado. Trataremos dessa questão mais adiante na seção sobre a inicialização do filtro de Kalman.

Os vetores ε_t e η_t são processos estocásticos *p*-variados e *r*-variados, respectivamente, não correlacionados no tempo, entre si e com α_1. São processos em geral não observáveis de segunda ordem, com vetores de média nulos e com matrizes de covariâncias não negativa definidas H_t e Q_t, respectivamente.

As matrizes Z_t, d_t, T_t, c_t, R_t, H_t e Q_t são chamadas de ***matrizes do sistema*** e seguem em geral um processo determinístico e conhecido ao longo do tempo, podendo possuir parâmetros desconhecidos a serem estimados no próprio modelo. Para a estimação destes parâmetros, usualmente são empregados os métodos da ***máxima verossimilhança*** ou ***(quasi) máxima verossimilhança***, a depender das condições do modelo.

No caso específico em que todas as matrizes do sistema são independentes do tempo, o modelo é conhecido como ***tempo-invariante***, o que traz muitas simplificações à implementação computacional do modelo.

Se $\begin{bmatrix}\varepsilon_t \\ \eta_t\end{bmatrix} \sim NID\left(\begin{bmatrix}0 \\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}H_t & 0 \\ 0 & Q_t\end{bmatrix}\right)$ e se $\alpha_1 \sim N(a_1, P_1)$, sendo $\begin{bmatrix}\varepsilon_t \\ \eta_t\end{bmatrix}$ e α_t independentes, temos que o modelo possui uma ***representação em espaço de estado linear Gaussiano***. Se, adicionalmente ao pressuposto de normalidade, algumas matrizes do sistema possuem valores defasados de Y_t, podemos afirmar que o modelo tem uma ***representação em espaço de estado linear condicionalmente Gaussiano***. Por outro lado, no caso em que o pressuposto de normalidade não é atendido ou é parcialmente violado, temos então uma ***representação em espaço de estado linear mais amplo*** (*wide sense*).