4
Álgebras de Lie

Álgebras de Lie são espaços vetoriais munidos de uma nova operaçao que em geral não é comutativa nem associativa: $[x, y] = xy - yx$.

4.1
Álgebras de Lie Simples

Definição 4.1 *Uma álgebra de Lie sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *é um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial* $\mathfrak{g}$ *munido de um produto* $\mathbb{K}$*-bilinear*

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \quad (4\text{-}1)$$
$$(u, v) \mapsto [u, v] \quad (4\text{-}2)$$

satisfazendo para todos $u, v, w \in \mathfrak{g}$*:*

– $[u, u] = 0$

– $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$

A segunda condição se chama Identidade de Jacobi

Exemplo 6 *1.* $gl(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n\times n}$*, onde* $[A, B] = AB - BA$

2. $sl(n, \mathbb{R})$*, o conjunto das matrizes com traço 0*

3. $so(n, \mathbb{R})$*, o conjunto das matrizes anti-simétricas*

Dizemos que $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}'$ são isomórficos se existe um isomorfismo $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ satisfazendo $\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)]$.

Definição 4.2 *Uma sub-álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *é um subespaço vetorial* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ *fechado por* $[\cdot, \cdot]$*, isto é se* $[x, y] \in \mathfrak{h}$*, para todos* $x, y \in \mathfrak{h}$*.*

Definição 4.3 *Uma álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *é abeliana se para todos* $u, v \in \mathfrak{g}$*,* $[u, v] = 0$

Definição 4.4 *Um ideal de* $\mathfrak{g}$ *é uma sub-álgebra* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ *tal que*

$$\forall u \in \mathfrak{g}, \forall v \in \mathfrak{h}; [u, v] \in \mathfrak{h}$$

Definição 4.5 *Uma álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *é simples se seus únicos ideiais são* 0 *e* $\mathfrak{g}$.

Definição 4.6 *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie e* $u \in \mathfrak{g}$. *Definimos a representação adjunta*

$$ad_u : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \tag{4-3}$$
$$v \mapsto [u, v] \tag{4-4}$$

Exemplo 7 *Seja* $\mathfrak{g} = sl(2, \mathbb{K})$ *e seus elementos da base:*

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Os colchetes são dados por

$$[x, y] = h, [h, x] = 2x, [h, y] = -2y$$

Note que x, y, h *são autovetores de* ad_h *com autovalores correspondentes* $2, -2, 0$. *Se* $\mathfrak{h} \neq 0$ *é um ideal de* $\mathfrak{g}$, *tome* $ax + by + cz$ *um elemento não nulo arbitrário de* $\mathfrak{h}$. *Então,* $(ad_x)^2 = -2bx \in \mathfrak{h}$ *e* $(ad_y)^2 = -2ay \in \mathfrak{h}$. *Assim,* a *e* b *são não nulos, logo* $x, y \in \mathfrak{h}$, *então* $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$.

Por outro lado, se $a = b = 0$, *então* $0 \neq ch \in \mathfrak{h}$, *então* $h \in \mathfrak{h}$, *e assim* $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$ *e portanto* $\mathfrak{g} = sl(2, \mathbb{K})$ *é simples.*

Definição 4.7 *Uma matriz quadrada* N *é nilpotente se existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $N^k = 0$.

Definição 4.8 *Uma álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *é solúvel se existe* $k \in \mathbb{N}$ *com* $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$, *onde* $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(k+1)} = [\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(k)}]$.

Exemplo 8 *O espaço das matrizes triangulares superiores é uma álgebra de Lie solúvel.*

4.2
Álgebras de Lie Semi-simples

Definição 4.9 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. $\mathfrak{g}$ admite um ideal solúvel máximo (que contém todos os outros). Este ideal é chamado de radical de $\mathfrak{g}$ e denotamos por $Rad(\mathfrak{g})$.*

Definição 4.10 *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é semi-simples se $Rad(\mathfrak{g}) = 0$.*

Observação 4.11 *Toda álgebra de Lie simples é semi-simples. De fato, como excluímos os casos triviais, $\mathfrak{g}$ não pode ser solúvel. Assim, o $Rad(\mathfrak{g}) \neq \mathfrak{g}$ e como $\mathfrak{g}$ é simples, $Rad(\mathfrak{g}) = 0$ e $\mathfrak{g}$ é semi-simples.*

Definição 4.12 *Uma matriz quadrada é semi-simples se satisfizer uma das seguintes condições:*

1. *seu polinômio mínimo não tem raiz dupla;*
2. *S é diagonalizável;*
3. *S admite uma base de autovetores.*

Exemplo 9 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *é semi-simples (em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), e diagonalizável em $\mathbb{C}$ mas não em $\mathbb{R}$.*

Definição 4.13 *Seja $\mathfrak{g}$ uma ágebra de Lie semi-simples. Uma álgebra é toral se todos os seus elementos são semi-simples.*

Definição 4.14 *Definimos o produto de Killing em $\mathfrak{g}$ como sendo*

$$(u, v) = tr(ad_u \cdot ad_v).$$

Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples e $H \in \mathfrak{g}$ toral maximal. Os elementos

$$ad_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \quad x \in H$$

são semi-simples e comutam. Logo, se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, são simultaneamente diagonalizáveis. Dados

$$\lambda i : H \to \mathbb{K}(= \mathbb{C})$$

os autovalores. Assim, $\lambda_i \in H^*$.

Seja $\Phi \subset H^*$, o conjuntos dos autovalores. Φ é chamado de sistema de raízes.

Exemplo 10 *Seja* $\mathfrak{g} = sl(3, \mathbb{C})$ *e* $H \subset \mathfrak{g}$ *a álgebra abeliana das matrizes diagonais.*

Seja $H^* \cong \mathbb{C}^2$ *o dual de* H. *Considere* $\Phi \subset H^*$ *com elementos*

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 \end{pmatrix} = z_1 - z_2$$

$$\alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 \end{pmatrix} = z_2 - z_3$$

E analogamente para $\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_1 - \alpha_2$.

Assim os elementos de Φ *são os vetores não nulos de norma mínima em um reticulado* $\mathbf{A}_2$*:*

$$\alpha_1 = (1, -1, 0), \alpha_2 = (0, 1, -1), \alpha_1 + \alpha_2 = (1, 0, -1),$$
$$-\alpha_1 = (-1, 1, 0), -\alpha_2 = (0, -1, 1), -\alpha_1 - \alpha_2 = (-1, 0, 1)$$

Considere o produto interno usual:

- $\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle = \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle = 2$
- $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = -1$

Note que este produto interno é compatível com o produto de Killing.

Sejam

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Temos as seguintes relações:

1. $[h_i, h_j] = 0$
2. $[x_i, y_i] = h_i, \ [x_i, y_j] = 0, \ se \ i \neq j$
3. $[h_i, x_j] = \langle \alpha_j, \alpha i \rangle \cdot x_j, \ [h_i, y_j] = -\langle \alpha_j, \alpha i \rangle \cdot y_j$

As matrizes x_i, y_j *e* h_i *geram* $\mathfrak{g}$ *como álgebra. De fato, para completar uma base como de* $\mathfrak{g}$ *(como espaço vetorial) basta acrescentar*

$$x_3 = [x_1, x_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ y_3 = [y_1, y_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim, escrevemos $\mathbf{A}_2 = sl(3, \mathbb{C})$ *e, mais geralmente,* $\mathbf{A}_n = sl(n+1, \mathbb{C})$.

4.3
A álgebra de Lie $\mathbf{E}_8$

Demonstra-se (Humphreys) que a construção feita no exemplo 9 funciona para outros sistemas de raízes, entre eles $\mathbf{E}_6, \mathbf{E}_7$ e $\mathbf{E}_8$ conforme construído e desenhado nas seções anteriores. Assim, seja $\Phi \subset \mathbb{R}^8$ o conjuntos dos vértices de $\mathcal{G}_8$ e $\Delta = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_8\} \subset \Phi$ uma base formada tal que outros elementos de Φ sejam combinações lineares dos elementos de Δ com coeficientes do mesmo sinal. Podemos tomar

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (1,-1,0,0,0,0,0,0)\ ,\ \alpha_2 = (0,1,-1,0,0,0,0,0),\\ \alpha_3 &= (0,0,1,-1,0,0,0,0)\ ,\ \alpha_4 = (0,0,0,1,-1,0,0,0),\\ \alpha_5 &= (0,0,0,0,1,-1,0,0)\ ,\ \alpha_6 = (0,0,0,0,0,1,-1,0),\\ \alpha_7 &= (0,0,0,0,0,0,1,-1)\ ,\ \alpha_8 = (-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) \end{aligned}$$

e existe uma única álgebra de Lie simples de dimensão 248 gerada por x_i, y_i e h_i satisfazendo as relações $1, 2$ e 3 dadas no exemplo 10.

Sejam $\alpha_9, \ldots, \alpha_{120}$ os elementos de $\Phi\backslash\Delta$ que são escritos como combinações lineares de Δ com coeficientes não negativos. Assim, por exemplo, podemos supor que

$$\alpha_9 = (1,0,-1,0,0,0,0,0).$$

Para $i = 9, \ldots, 120$, se $\alpha_i = \sum_{k=1}^{8} a_k\alpha_k$, definimos $h_i = \sum_{k=1}^{8} a_k\alpha_k$.

Precisaremos definir elementos x_i e y_i, $i = 9, \ldots, 120$ satisfazendo:

- $[x_i, y_i] = h_i$
- $[h_i, x_j] = \langle\alpha_j, \alpha_i\rangle \cdot x_j,\ [h_i, y_j] = -\langle\alpha_j, \alpha_i\rangle \cdot y_j$

Cada $x_i, i = 9, \ldots, 120$ é definido como um colchete de outros elementos previamente construídos. Podemos por exemplo tomar

$$x_9 = [x_1, x_2] \text{ e } y_9 = [y_2, y_1]$$

de maneira que $x_1, x_2, x_9, y_1, y_2, y_9, h_1$ e h_2 formam uma base de uma sub-álgebra isomorfa a $\mathbf{A}_2$. Os elementos $h_1, \ldots, h_8, x_1, \ldots, x_{120}, y_1, \ldots, y_{120}$ formarão uma base para a álgebra de Lie $\mathbf{E}_8$.

Não detalharemos a construção da álgebra nesta dissertação.

As álgebras de Lie $\mathbf{E}_7$ e $\mathbf{E}_6$ são sub-álgebras de $\mathbf{E}_8$.