

## 3 Polítopos

Os polítopos são generalizações dos conceitos conhecidos de polígonos e poliedros. Estas figuras têm relação com os sistemas de raízes estudados nos capítulos anteriores e neste capítulo, o nosso objetivo é estudarmos os chamados Polítopos de Gosset.

### 3.1 Polítopos convexos

De uma maneira não muito difícil de conceituar, polítopos são basicamente conhecidos como o termo geral da sequência

ponto, segmento, polígono, poliedro,...

Isto é, um polítopo na segunda dimensão é meramente um polígono, enquanto na terceira dimensão é um poliedro. E por analogia podemos perceber outras propriedades, como dois pontos formam um segmento de reta, quatro segmentos de reta formam um quadrado, seis quadrados formam um cubo e etc.

**Definição 3.1**  $X \subset \mathbb{R}^n$  é convexo, se e somente se, para todos  $x, y \in X$  e para todo  $s \in [0, 1]$ ,

$$sx + (1 - s)y \in X$$

**Definição 3.2** Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$ .

$$\text{Fecho convexo}(X) = \left\{ \sum s_i x_i ; x_i \in X, s_i \in [0, 1], \sum s_i = 1 \right\}$$

**Definição 3.3** Um polítopo convexo (em  $\mathbb{R}^n$ ) é o fecho convexo de um conjunto finito (sem perda, os vértices).

**Proposição 3.4**

1. Um polítopo convexo é uma interseção de finitos semi-espacos;
2. Uma interseção de finitos semi-espacos que seja limitada é um polítopo convexo.

**Definição 3.5** A dimensão de um polítopo  $X$  é a dimensão do espaço transladado gerado por  $X$ .

**Definição 3.6** A interseção de um polítopo de dimensão  $n$  com um semiplano é uma face do polítopo se tiver dimensão menor do que  $n$ .

Seguindo a definição acima, podemos dizer que um vértice é uma face de dimensão 0, enquanto uma aresta é uma face de dimensão 1.

Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  um polítopo de dimensão  $n$ . O grupo das simetrias de  $X$  é o grupo das isometrias  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  com  $\varphi(X) = X$ . Note que uma isometria  $\varphi$  é da forma  $\varphi v = Qv + v_0$ , onde  $v_0 \in \mathbb{R}^n, Q \in \mathcal{O}(n)$ .

O grupo das isometrias de um polítopo convexo é sempre finito, contido no grupo das permutações dos vértices.

**Definição 3.7** Um polítopo convexo de dimensão  $n \geq 2$  é regular se:

1. o grupo das simetrias age transitivamente sobre os vértices;
2. as faces de dimensão  $n - 1$  são regulares;
3. o grupo das simetrias age transitivamente sobre as faces de dimensão  $n - 1$ .

Note que esta definição é recursiva. Um polítopo convexo de dimensão  $n = 1$  é um segmento e é regular (por definição).

**Definição 3.8** Um polítopo convexo de dimensão  $n$  é semi-regular se:

1. o grupo das simetrias age transitivamente sobre os vértice;
2. as faces de dimensão  $n - 1$  são regulares;

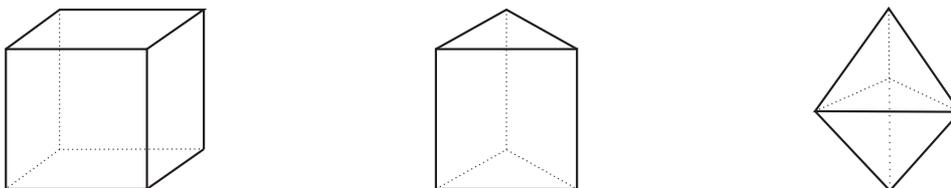


Figura 3.1: Polítopo regular; polítopo semi-regular; polítopo convexo com faces regulares que não é semiregular.

**Definição 3.9** Um *simplexo*,  $\alpha_n$ , é o fecho convexo de  $e_0, e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

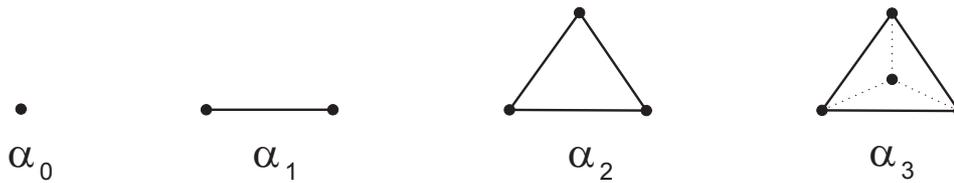


Figura 3.2: Simplexos

Em outras palavras, se chamarmos de  $\alpha_0$ , o espaço de dimensão nula, isto é, um ponto. Se ligarmos um outro ponto a  $\alpha_0$ , obteremos um segmento de reta,  $\alpha_1$ . Se ligarmos um terceiro ponto a  $\alpha_1$  (fora da reta a que pertence este segmento), obtemos um triângulo,  $\alpha_2$ . Já se ligarmos um quarto ponto a  $\alpha_2$  (fora do plano que o contém), obteremos um tetraedro,  $\alpha_3$ . E de forma análoga, se ligarmos um quinto ponto a  $\alpha_3$  (que não pertença ao espaço de dimensão três que o contém), então obteremos um pentatopo  $\alpha_4$ .

**Definição 3.10** Um *hiper-octaedro*,  $\beta_n$ , é o fecho convexo de  $\pm e_0, \pm e_1, \dots, \pm e_n \in \mathbb{R}^n$ .

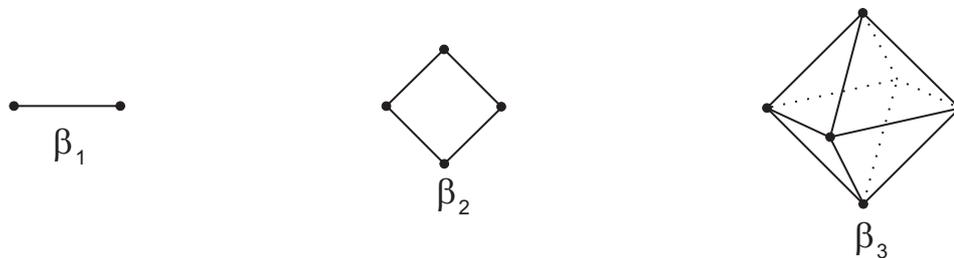


Figura 3.3: Hiper-octaedros

Note que o octaedro  $\beta_3$  é uma dipirâmide com base  $\beta_2$ . Mais geralmente,  $\beta_n$  será sempre uma dipirâmide com base  $\beta_{n-1}$ .

**Definição 3.11** *Dois vértices de um polítopo são vizinhos se pertencem a uma mesma aresta.*

**Definição 3.12** *Seja  $X$  um polítopo convexo de dimensão  $n$ , e  $v$  um vértice de  $X$ . A figura de vértice (de  $X$  em  $v$ ) é o fecho convexo dos vértices de  $X$  vizinhos de  $v$ , desde que este fecho tenha dimensão  $n - 1$ .*

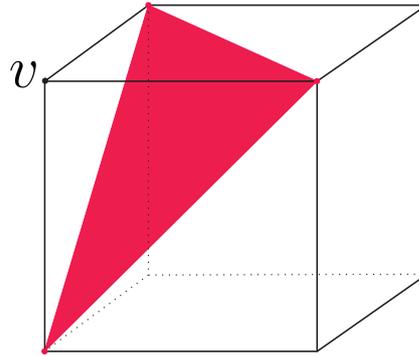


Figura 3.4: Figura de vértice do cubo

**Observação 3.13** Não precisaremos aqui definir figuras de vértice de forma mais geral.

**Observação 3.14** Todas as figuras de vértice de um politopo semiregular são isométricas (iguais).

### 3.2

#### Polítopos de Gosset

Thorald Gosset nasceu em 1869. Segundo Harold S.M. Coxeter, ele se formou em direito após anos de muito estudo, mas sem clientes, dedicou seu tempo a estudar quais figuras regulares existiam em dimensões mais altas. Após redescobrir todas elas, ele começou a enumerar as figuras semiregulares.

**Definição 3.15** O prisma triangular da figura 3.1 é o politopo de Gosset  $\mathcal{G}_3$ .  $\mathcal{G}_n$  é um politopo semiregular com faces de dimensão  $n - 1$  iguais a  $\alpha_{n-1}$  ou  $\beta_{n-1}$  e figura de vértice  $\mathcal{G}_{n-1}$ .

**Proposição 3.16** Existem (únicos) polítopos de Gosset  $\mathcal{G}_n, n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ .

Podemos a partir de  $\mathcal{G}_3$  montar  $\mathcal{G}_4$  e assim por diante.

O politopo  $\mathcal{G}_4$  também é chamado de *Tetroctaedro*, por ser formado por tetraedros e octaedros e sua construção de pode ser feita da seguinte maneira: Considere o hipertetraedro  $\alpha_4$  contido em  $\mathbb{R}^5$  com vértices  $(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)$ . Os vértices das faces  $\alpha_3$  e  $\beta_3$  de  $\mathcal{G}_4$  são os pontos médios das arestas de  $\alpha_4$ . Escolhendo um desses vértices, digamos  $(0, 1, 0, 0, 0)$ , a face  $\alpha_3$  é o fecho convexo dos pontos médios das arestas adjacentes a esse vértice, isto é, os pontos  $A_1, A_2, A_3$  e  $A_4$  formam o tetraedro correspondente a face  $\alpha_3$ . A face  $\beta_3$  é formada pelo fecho convexo dos 6 pontos médios restantes das arestas adjacentes, isto é,  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$  e  $B_6$  formam o hiper-octaedro correspondente a face  $\beta_3$ .

Podemos ainda obter informações sobre as faces do tipo  $\alpha_{n-1}$  e  $\beta_{n-1}$ . Isto é, como  $\mathcal{G}_4$  tem 10 vértices e cada um deles é adjacente a dois  $\alpha_3$ , temos 20 faces  $\alpha_3$  contadas com multiplicidade. Mas cada  $\alpha_3$  possui 4 vértices, e portanto,  $\mathcal{G}_4$  tem  $\frac{20}{4} = 5$  faces  $\alpha_3$ . Além disso, cada vértice é adjacente a três faces  $\beta_3$ , resultando em 30 faces contadas com multiplicidade, sendo que cada  $\beta_3$  possui 6 vértices. Logo,  $\mathcal{G}_4$  tem  $\frac{30}{6} = 5$  faces  $\beta_3$ .

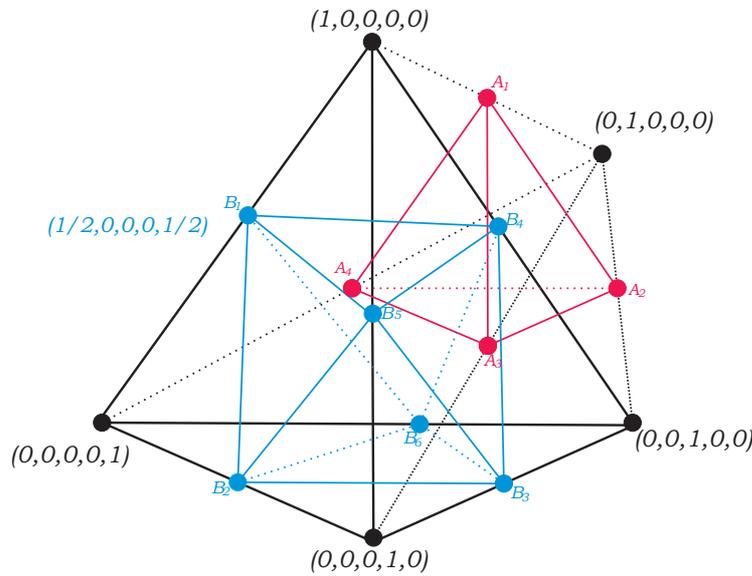


Figura 3.5: Construção das faces  $\alpha_3$  e  $\beta_3$  de  $\mathcal{G}_4$

O politopo de Gosset de quinta dimensão,  $\mathcal{G}_5$ , que também é conhecido como *Demipenteract*, que quer dizer "metade do hiper-cubo de dimensão 5", é construído tomando-se os vértices alternados do hiper-cubo em  $\mathbb{R}^5$  que tem 32 pontos da forma  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$ . Assim os vértices de  $\mathcal{G}_5$  são os 16 vértices com número par de sinais menos.

Assim, como  $\mathcal{G}_5$  tem 16 vértices e cada um deles é adjacente a cinco  $\alpha_4$ , temos 80 faces  $\alpha_4$  contadas com multiplicidade. Mas cada  $\alpha_4$  possui 5 vértices, e portanto,  $\mathcal{G}_5$  tem  $\frac{80}{5} = 16$  faces  $\alpha_4$ . E cada vértice é adjacente a cinco faces  $\beta_4$ , resultando em 80 faces contadas com multiplicidade, sendo que cada  $\beta_4$  possui 8 vértices. Logo,  $\mathcal{G}_5$  tem  $\frac{80}{8} = 10$  faces  $\beta_4$ .

### 3.3

#### Os politopos de Gosset $\mathcal{G}_8$ , $\mathcal{G}_7$ e $\mathcal{G}_6$

Neste trabalho preferimos usar as construções dos outros capítulos para chegar diretamente em  $\mathcal{G}_8$ .

No capítulo anterior vimos que o reticulado  $E_8$  possui 240 vetores em seu sistema de raízes, isto é, são 240 vetores de norma mínima e estes vetores

são justamente os que descrevem os vértices de  $\mathcal{G}_8$ .

Considere a versão par do 1º sistema de coordenadas do reticulado  $E_8$ .

$$E_8 = \{x \in \mathbb{R}^8 ; x_i \in \mathbb{Z} \text{ ou } x_i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, \sum x_i \equiv 0 \pmod{2}\}$$

E considere cada um dos 240 vetores de norma mínima deste reticulado como um vértice de um politopo. Escolhendo um dos vértices, como por exemplo  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  e calculando quais são os vértices cuja distância é mínima, isto é, igual a  $\sqrt{2}$ , podemos perceber que ele tem 28 vizinhos da forma  $(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$  e 28 vizinhos da forma  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ , permutando as 8 coordenadas, resultando em 56 vizinhos.

Deste modo podemos construir a seguinte figura:

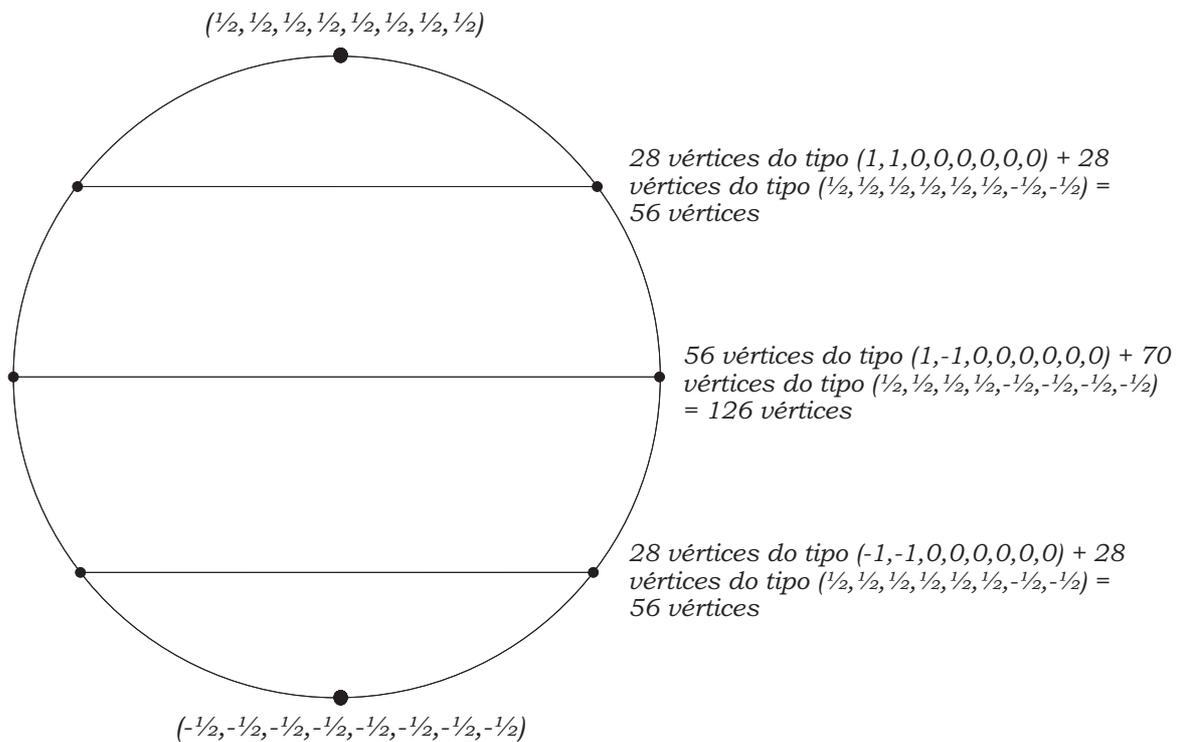
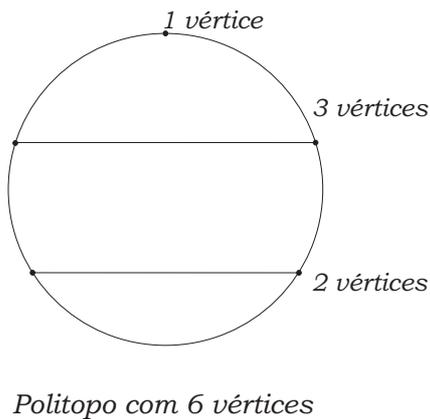
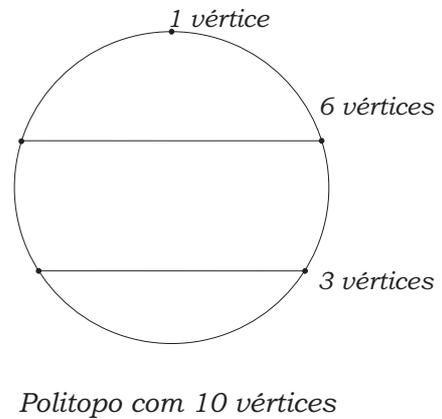
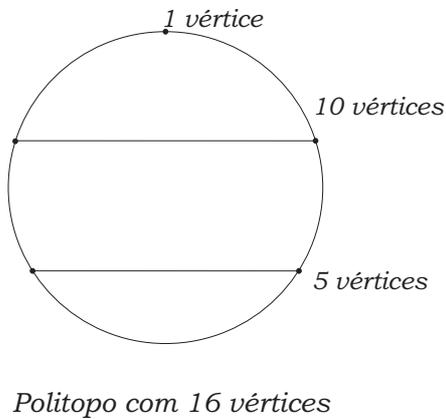
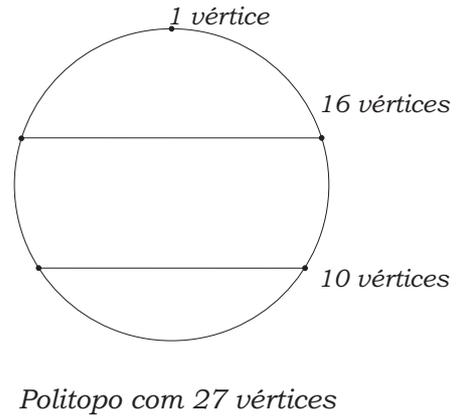
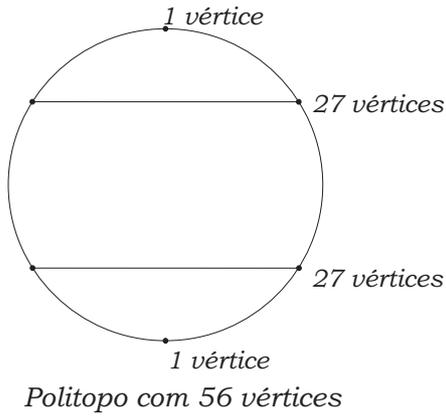
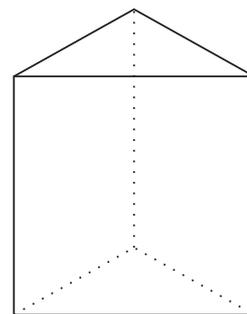


Figura 3.6: Politopo com 240 vértices

Isto quer dizer que a figura de vértice deste politopo é um politopo de 56 vértices, em que cada um desses vértices tem 27 vizinhos. E desta forma obtemos as seguintes figuras, que representam uma sequência de figuras de vértice de cada politopo.



==



Polítopo de Gosset de dim 3

Figura 3.7: Polítopos de 56, 27, 16, 10 e 6 vértices

O último polítopo é o  $\mathcal{G}_3$ , isto é, um prisma de base triangular, pois ao redor de cada face de codimensão 3 vemos um  $\alpha$  e  $2\beta$ 's. Ou seja, em cada um dos 6 vértices deste polítopo temos um triângulo e dois quadrados.

Logo,  $\mathcal{G}_4, \mathcal{G}_5, \mathcal{G}_6, \mathcal{G}_7$  e  $\mathcal{G}_8$  são os polítopos de Gosset de 10, 16, 27, 56 e 240 vértices respectivamente.

E assim, obtemos os seguintes resultados na tabela a seguir:

<b>Dimensão</b>	3	4	5	6	7	8
<b>Vértices</b>	6	10	16	27	56	240
<b>Faces <math>\alpha_{n-1}</math></b>	2	5	16	72	576	17.280
<b>Faces <math>\beta_{n-1}</math></b>	3	5	10	27	126	2.160

$\mathcal{G}_8$  tem como grupo de simetria o grupo de Coxeter  $E_8$  e sendo assim, este é o último polítopo de dimensão finita da família dos polítopos de Gosset. Coxeter usa a notação  $4_{21}$  por causa das bifurcações do diagrama de Coxeter-Dynkin.

Vimos na seção anterior que  $\mathcal{G}_8$  é um polítopo semiregular de 240 vértices que pertence a oitava dimensão, cujos vértices são os vetores de norma mínima do reticulado  $E_8$ .

Além disso, vimos também que cada vértice deste polítopo tem 56 vizinhos, o que nos diz que  $\mathcal{G}_8$  tem  $\frac{240 \cdot 56}{2} = 6720$  arestas, isto é, faces de dimensão 1.

Podemos estudar as faces de dimensão 2 fazendo a seguinte projeção:

$$p : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^2 \tag{3-1}$$

$$(x_1, \dots, x_8) \mapsto (x_3 + \dots + x_8, x_1 + x_2) \tag{3-2}$$

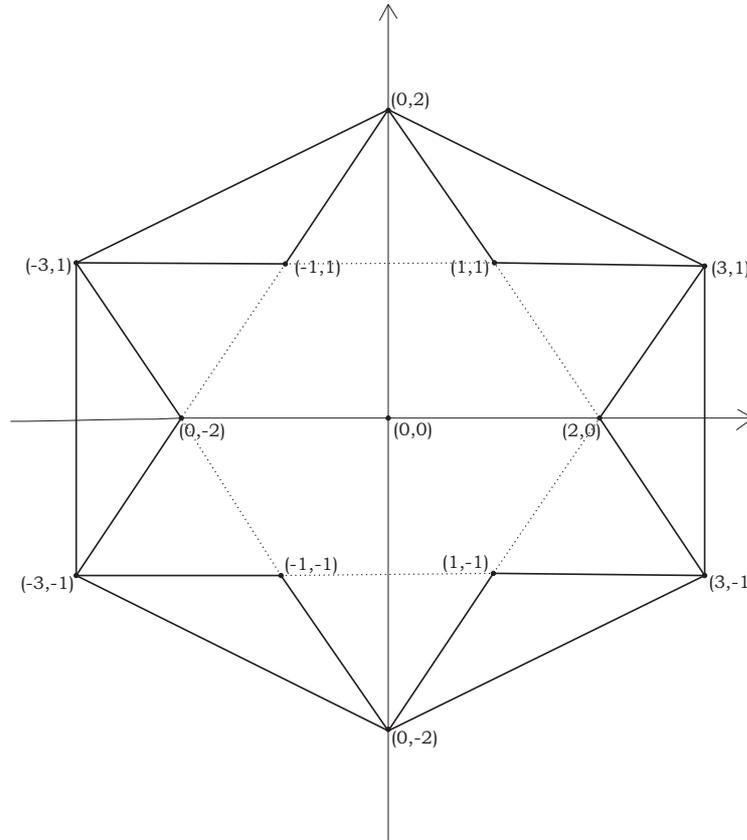


Figura 3.8: Projeção em  $\mathbb{R}^2$

A partir daí, podemos observar que:

- a coordenada  $(1, 1)$  representa 12 vértices do tipo  $(1, 0; 1, 0, 0, 0, 0, 0)$  e 15 do tipo  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ , resultando em 27 vértices;
- a coordenada  $(2, 0)$  representa 15 vértices do tipo  $(0, 0; 1, 1, 0, 0, 0, 0)$  e 12 do tipo  $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , resultando em 27 vértices;

Assim, como o vértice  $(1, 1)$  é vizinho comum a  $(0, 2)$  e  $(3, 1)$ , cada aresta de  $\mathcal{G}_8$  tem 27 faces de dimensão igual a 2 e isso resulta em  $\frac{6720 \cdot 27}{3} = 60480$  faces de dimensão 2.

Além disso pode-se dizer que:

- Cada face de dimensão 2 é adjacente a 16 faces de dimensão 3, o que resulta em  $\frac{6720 \cdot 16}{4} = 241920$  faces de dimensão 3;
- cada face de dimensão 3 é adjacente a 10 faces de dimensão 4, o que resulta em  $\frac{241920 \cdot 10}{5} = 483840$  faces de dimensão 4;
- cada face de dimensão 4 é adjacente a 6 faces de dimensão 5, o que resulta em  $\frac{483840 \cdot 6}{6} = 483840$  faces de dimensão 5;

As faces de dimensão 6 são sempre simplexos, mas de dois tipos:  $\alpha\beta$  e  $\beta\beta$ . Isto é, analogamente em dimensão mais baixa temos:

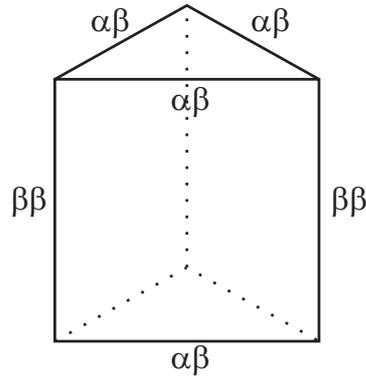


Figura 3.9:  $\mathcal{G}_3$

Assim, cada face de dimensão 5 é adjacente a 3 faces de dimensão 6, uma do tipo  $\alpha\beta$  e duas do tipo  $\beta\beta$ , o que resulta em  $\frac{483840 \cdot 1}{7} = 69120$  faces  $\alpha\beta$  de dimensão 6 e  $\frac{483840 \cdot 2}{7} = 138240$  faces  $\beta\beta$  de dimensão 6.

E para finalizar, como cada vértice de  $\mathcal{G}_8$  é adjacente a 576  $\alpha_6$ , então temos  $\frac{576 \cdot 240}{8} = 17280$  faces  $\alpha_7$  e como cada vértice também é adjacente a 126  $\beta_6$ , então temos  $\frac{126 \cdot 240}{14} = 2160$  faces  $\beta_7$ .

Podemos obter uma projeção como abaixo, na qual levamos as 8 coordenadas de cada um dos 240 vértices nas suas três primeiras coordenadas, isto é,

$$p : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^3 \tag{3-3}$$

$$(x_1, \dots, x_8) \mapsto (x_1, x_2, x_3) \tag{3-4}$$

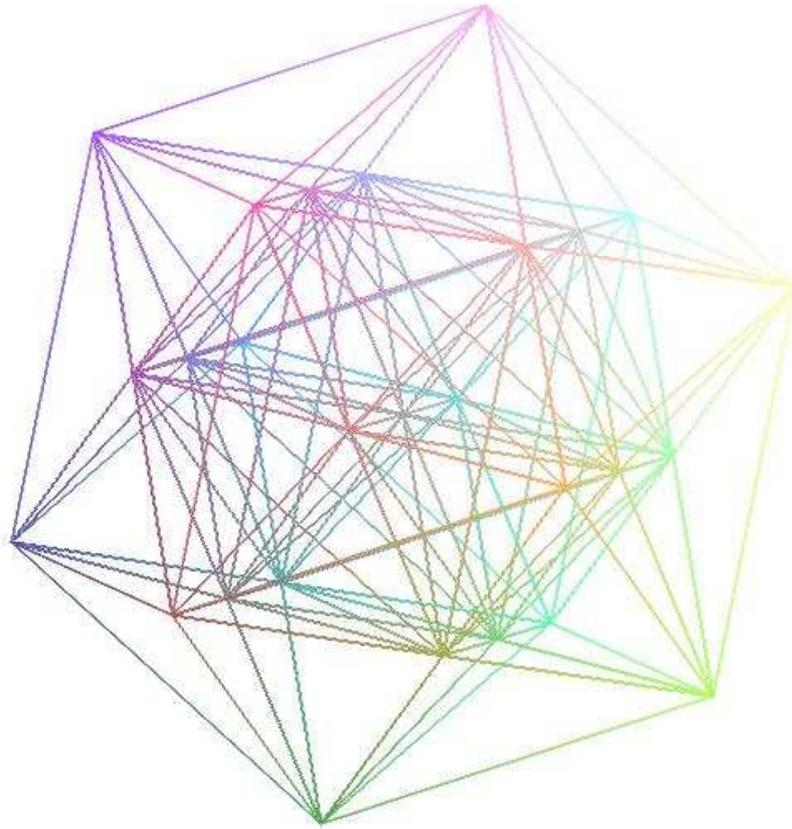


Figura 3.10: Projeção de  $\mathcal{G}_8$  em  $\mathbb{R}^3$

O polítopo de Gosset  $\mathcal{G}_7$ , também chamado por Coxeter de  $3_{21}$ , é formado pela figura de vértice do polítopo  $\mathcal{G}_8$ . Isto é,  $\mathcal{G}_7$  é um polítopo semiregular com 56 vértices e podemos construí-lo como na figura 3.5, escolhido o vértice  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  de  $\mathcal{G}_8$ , os vizinhos deste são os vértices de  $\mathcal{G}_8$  que estão a uma distância igual a  $\sqrt{2}$ . Assim,  $\mathcal{G}_7$ , neste caso, é formado pelo fecho convexo de

- 28 vértices do tipo  $(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
- 28 vértices do tipo  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

O polítopo  $\mathcal{G}_7$  também pode ser construído como o fecho convexo dos vizinhos de um buraco do reticulado  $E_7$ . Como já vimos no capítulo anterior,  $E_7$  tem 126 vetores de norma mínima que formam os vértices de um polítopo que não é semiregular.

Por exemplo, tome o ponto  $(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ . Os pontos que estão a uma distância igual a  $\sqrt{\frac{3}{2}}$  são:

- $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ ;
- $(-1, 0; 1, 0, 0, 0, 0, 0)$ , que permutados somam 12 pontos;
- $(-1, -1; 1, 1, 0, 0, 0, 0)$ , que permutados somam 15 pontos;
- $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , que permutados somam 15 pontos;
- $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , que permutados somam 15 pontos;
- $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

O polítopo  $\mathcal{G}_6$ , também chamado por Coxeter de  $2_{21}$ , é a figura de vértice do polítopo  $\mathcal{G}_7$ . Ou seja,  $\mathcal{G}_6$  é um polítopo semiregular com 27 vértices.

As tabelas abaixo nos mostram como são as faces de  $\mathcal{G}_7$  e de  $\mathcal{G}_6$ .

Dimensão	0	1	2	3	4	5	6
Faces de $\mathcal{G}_7$	56 $\alpha_0$	756 $\alpha_1$	4032 $\alpha_2$	10080 $\alpha_3$	12096 $\alpha_4$	2016 $\alpha\beta$ 4032 $\beta\beta$	576 $\alpha_6$ 126 $\beta_6$

Dimensão	0	1	2	3	4	5
Faces de $\mathcal{G}_6$	27 $\alpha_0$	216 $\alpha_1$	720 $\alpha_2$	1.080 $\alpha_3$	216 $\alpha\beta$ 432 $\beta\beta$	72 $\alpha_5$ 27 $\beta_5$

### 3.4 Projeções Ortogonais

Construção da projeção ortogonal de  $\mathcal{G}_8$  será feita com detalhes, já as demais serão omitidas, já que são feitas de forma análoga.

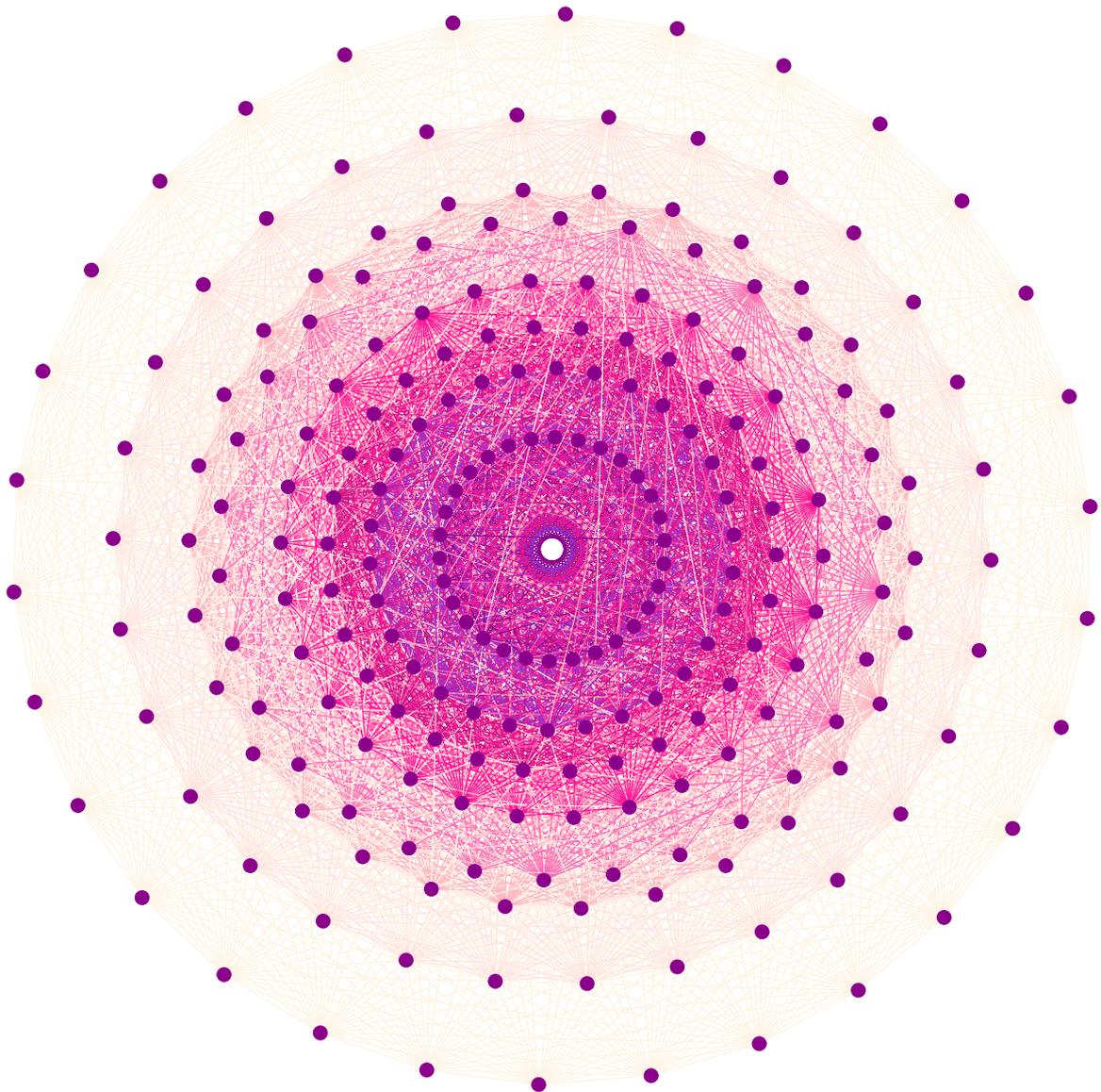


Figura 3.11: Projeção ortogonal de  $\mathcal{G}_8$  em  $\mathbb{R}^2$

Para a construção desta projeção tome uma base do reticulado  $E_8$  formada pelos vetores

$$\begin{aligned} v_1 &= (-1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & v_2 &= (0, -1, 1, 0, 0, 0, 0, 0), \\ v_3 &= (0, 0, -1, 1, 0, 0, 0, 0), & v_4 &= (0, 0, 0, -1, 1, 0, 0, 0), \\ v_5 &= (0, 0, 0, 0, -1, 1, 0, 0), & v_6 &= (0, 0, 0, 0, 0, -1, 1, 0), \\ v_7 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 1), & v_8 &= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Seja  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$  um vetor de  $\mathbb{R}^8$ . A reflexão com respeito ao vetor  $v_1$  é dada por

$$Rv_1 = x - 2 \frac{\langle v_1, x \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix}$$

Esta reflexão é associada a matriz  $A_1 =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De maneira análoga obtemos as outras 7 matrizes, sendo elas como em  $A_1$  mas com permutações das colunas  $i$  com  $i + 1$ , onde  $2 \leq i \leq 7$ .

E a última matriz de reflexão como abaixo:

$$A_8 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

O elemento de Coxeter, que é o produto destas 8 matrizes de reflexão, é igual a

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

cujo número de Coxeter, que é a ordem do elemento de Coxeter, é igual a 30, já que  $M^{30} = I_8$ , onde  $I_8$  é a matriz identidade de ordem 8.

O polinômio característico de  $M$  é  $p(t) = t^8 + t^7 - t^5 - t^4 - t^3 + t + 1$  e com ajuda do software Maple encontramos 8 autovalores complexos e seus autovetores associados.

Escolhendo um dos autovetores, chamaremos de  $u_1$  o vetor de  $\mathbb{R}^8$  cujas coordenadas são formadas pelas partes reais das oito coordenadas do autovetor escolhido e chamaremos de  $w_1$  o vetor de  $\mathbb{R}^8$  cujas coordenadas são formadas pelas partes imaginárias das oito coordenadas do mesmo autovetor.

Temos assim

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1.140976084 \\ 0.7962719514 \\ 0.5269240368 \\ 0.3447041310 \\ 0.2575761217 \\ 0.2693479189 \\ 0.7051620000 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad w_1 = \begin{pmatrix} -0.7548521365 \\ -0.4286386299 \\ -0.03788564864 \\ 0.4003290186 \\ 0.8668532956 \\ 1.341297827 \\ 0.7090462265 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A seguir, ortogonalizamos os vetores  $u_1$  e  $w_1$ . Assim, defina agora

$$\begin{aligned} un_1 &:= \frac{u_1}{\sqrt{\langle u_1, u_1 \rangle}} \\ wt_1 &:= w_1 - \langle un_1, w_1 \rangle \cdot un_1 \\ wn_1 &:= \frac{wt_1}{\sqrt{\langle wt_1, wt_1 \rangle}} \end{aligned}$$

Sejam  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, 240$ , os vértices de  $\mathcal{G}_8$ , os pontos da projeção em  $\mathbb{R}^2$  são da forma  $p_i = (a_i, b_i)$ , onde  $a_i = \langle un_1, \alpha_i \rangle$  e  $b_i = \langle wn_1, \alpha_i \rangle$ .

Logo, a figura 3.11 nos mostra os 240 de pontos  $\mathcal{G}_8 \subset \mathbb{R}^8$  em  $\mathbb{R}^2$  desta projeção, onde ligamos os pontos cuja distância entre eles em  $\mathbb{R}^8$  é mínima, isto é, igual a  $\sqrt{2}$ , e as cores são determinadas pelas normas dos vetores em  $\mathbb{R}^2$ .

Abaixo está a projeção ortogonal do polítopo formado pelos 126 vértices do reticulado  $E_7$ .

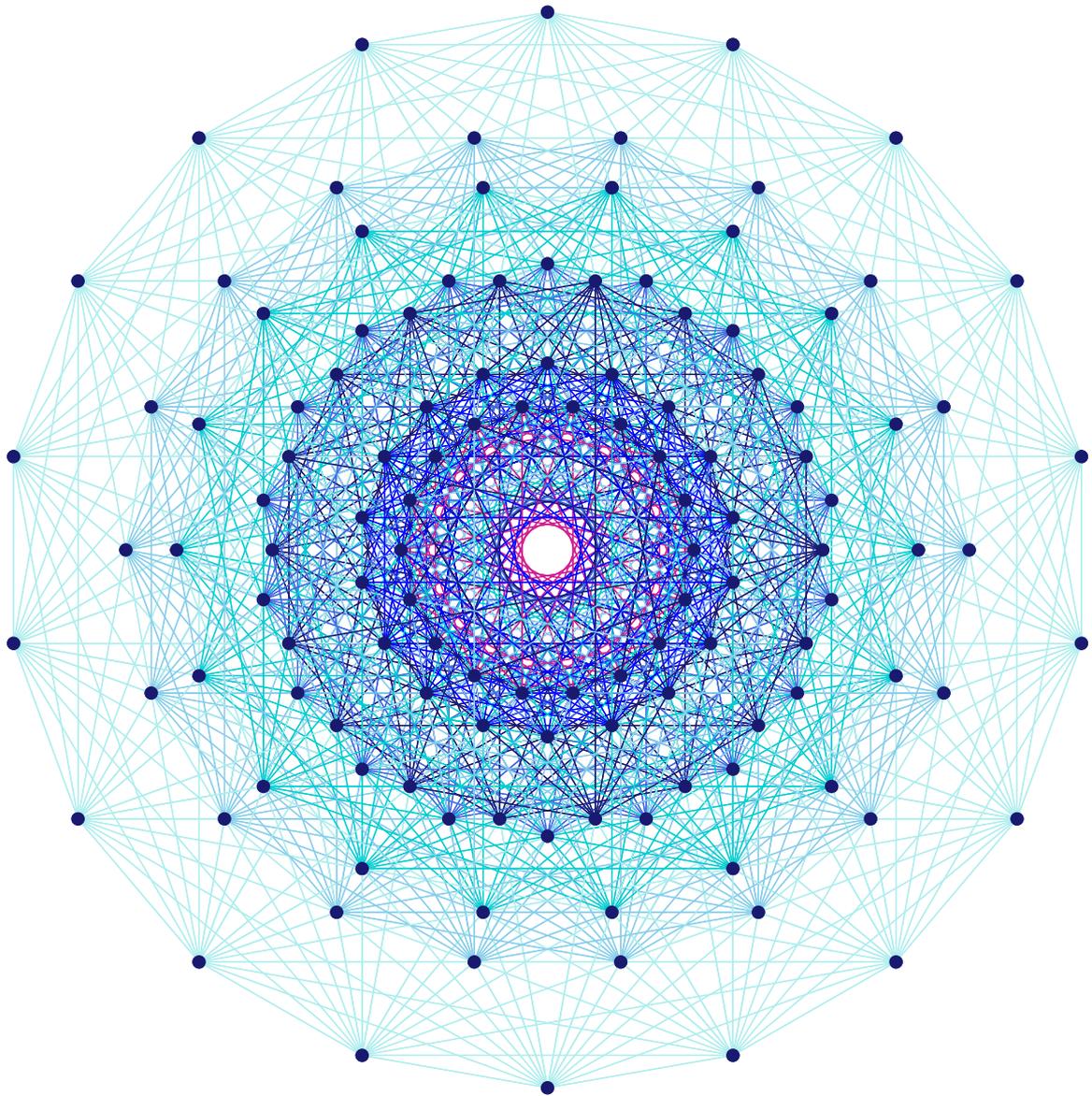


Figura 3.12: Projeção ortogonal de  $E_7$  em  $\mathbb{R}^2$

A figura abaixo mostram dois círculos com 27 pontos projetados mais dois pontos projetados no centro totalizando os 56 vértices de  $\mathcal{G}_7$ .

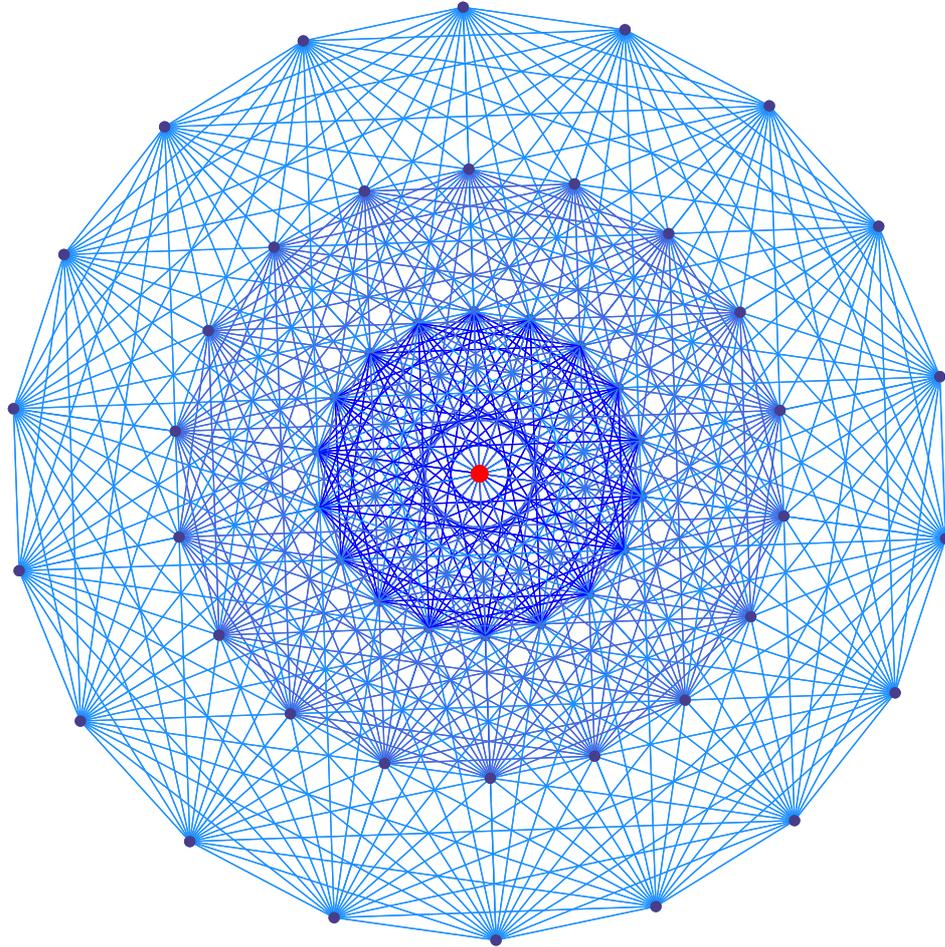


Figura 3.13: Projeção ortogonal de  $\mathcal{G}_7$  em  $\mathbb{R}^2$

Abaixo está a projeção ortogonal do polítopo formado pelos 72 vértices do reticulado  $E_6$ .

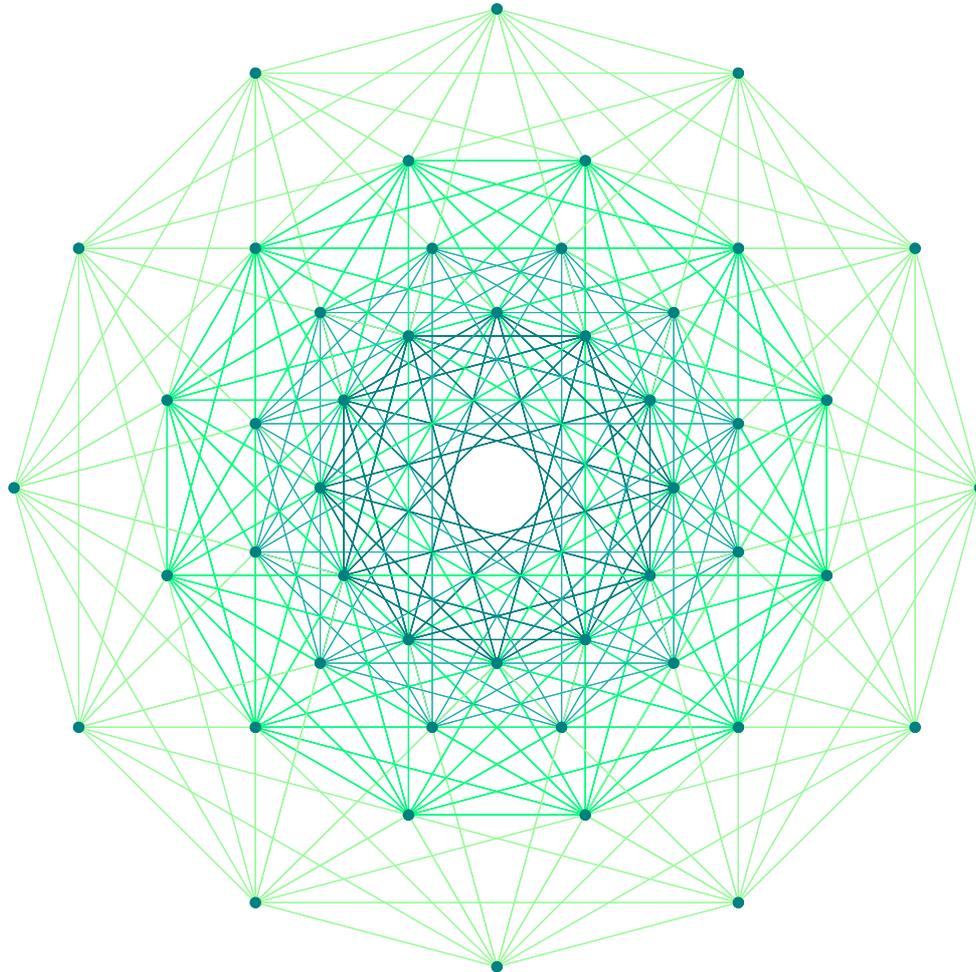


Figura 3.14: Projeção ortogonal de  $E_6$  em  $\mathbb{R}^2$

A figura abaixo mostram dois círculos com 12 pontos projetados mais três pontos projetados no centro totalizando os 27 vértices de  $\mathcal{G}_6$ .

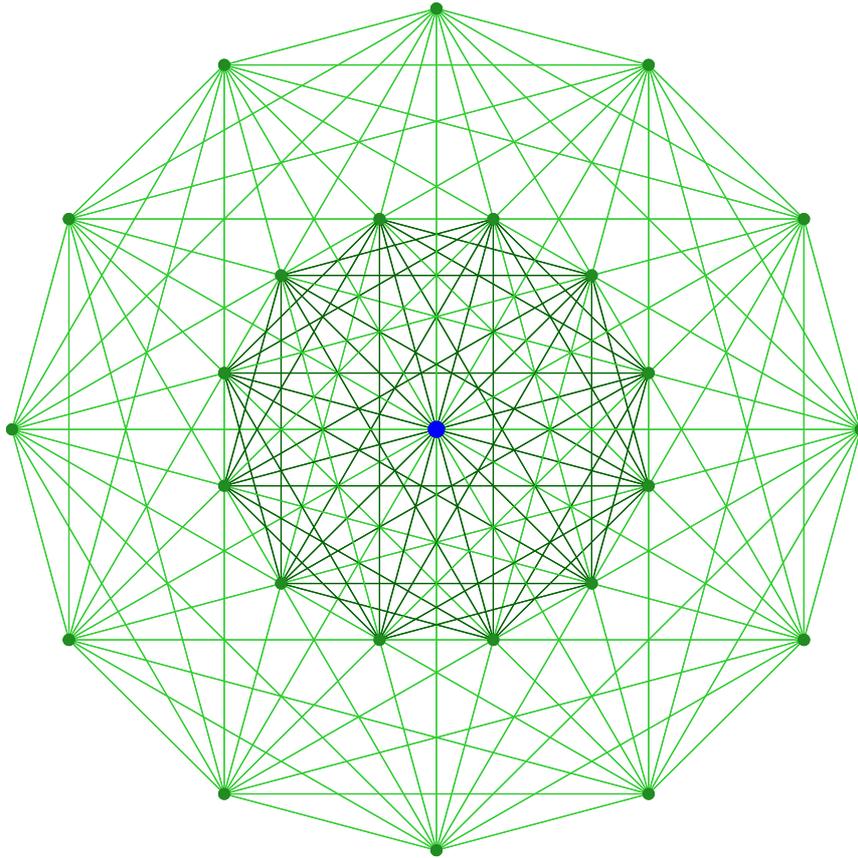


Figura 3.15: Projeção ortogonal de  $\mathcal{G}_6$  em  $\mathbb{R}^2$

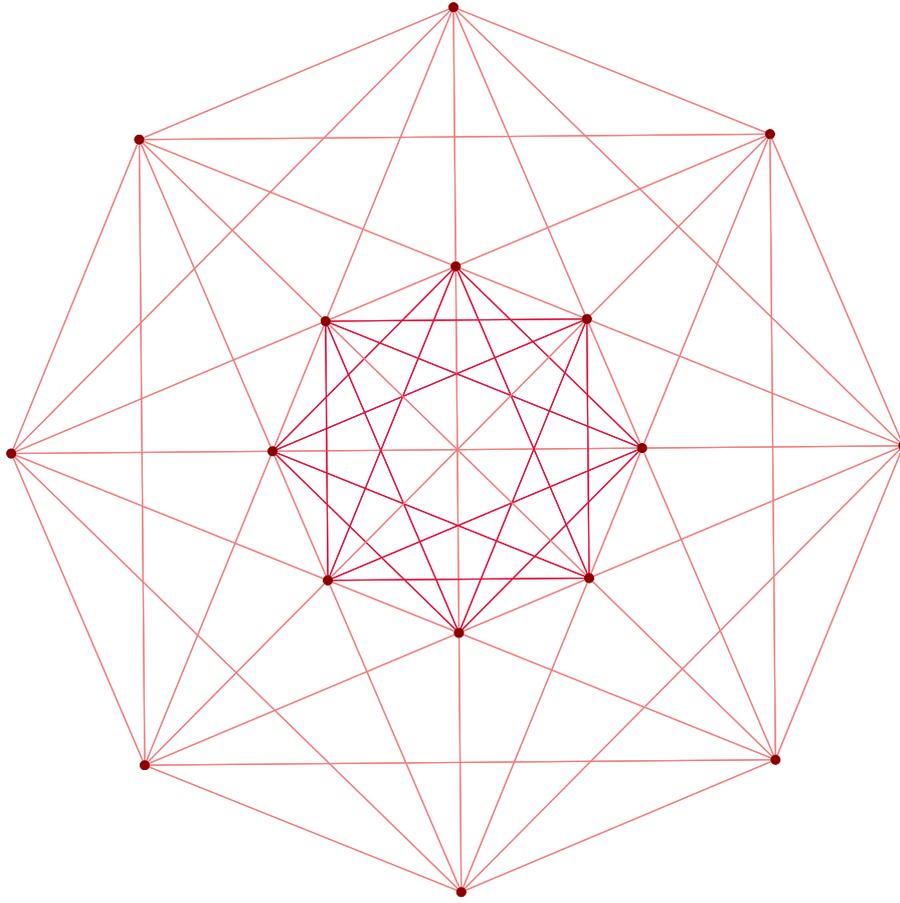


Figura 3.16: Projeção ortogonal de  $\mathcal{G}_5$  em  $\mathbb{R}^2$

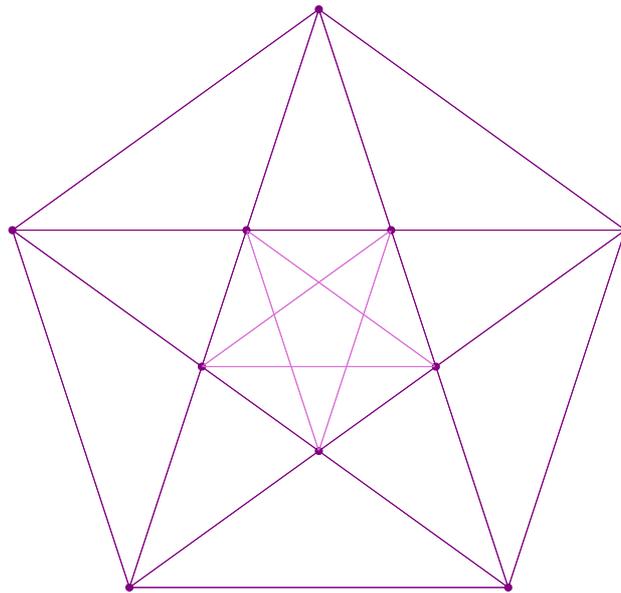


Figura 3.17: Projeção ortogonal de  $\mathcal{G}_4$  em  $\mathbb{R}^2$

As projeções ortogonais de  $E_7$  e  $E_6$  foram feitas de forma análoga a projeção feita para  $\mathcal{G}_8$ . Para as projeções ortogonais de  $\mathcal{G}_7$ ,  $\mathcal{G}_6$ ,  $\mathcal{G}_5$  e  $\mathcal{G}_4$  usamos o mesmo elemento de Coxeter que usado em  $E_7$ ,  $E_6$ ,  $D_5$  e  $A_4$  respectivamente.