

2

Reticulados e empacotamento esférico

Alguns grupos de Coxeter têm a propriedade notável de que seu sistema de raízes gera um reticulado. Este é o caso dos grupos E_8 , E_7 e E_6 e desta maneira podemos ver de forma mais clara do que no capítulo anterior a sua construção.

2.1

Reticulados

Definição 2.1 *Seja $\beta = \{v_1, \dots, v_m\}$ um conjunto de vetores em $\mathbb{R}^n$ linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$ com $m \leq n$. Chamamos de reticulado de dimensão m o conjunto do $\mathbb{R}^n$ da forma*

$$\Lambda_\beta = \{x \in \mathbb{R}^n ; x = \sum a_i v_i, a_i \in \mathbb{Z}\}$$

O conjunto β é a base deste reticulado.

Observação 2.2 *Note que um reticulado Λ_β é um subgrupo aditivo de $(\mathbb{R}^n, +)$. Em particular, a soma ou a diferença de quaisquer dois vetores do reticulado ainda é um vetor do reticulado.*

Observação 2.3 *Note também que Λ_β é um conjunto discreto, ou seja, para qualquer compacto K de $\mathbb{R}^n$, temos que $\Lambda_\beta \cap K$ é finito.*

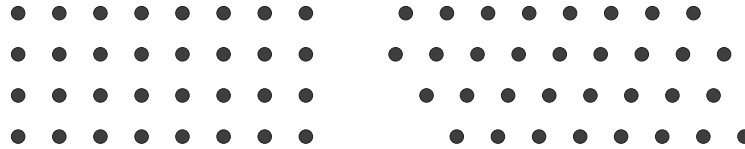


Figura 2.1: Reticulados em $\mathbb{R}^2$

Definição 2.4 *Seja $\Lambda_\beta \subset \mathbb{R}^n$ um reticulado com base $\beta = \{v_1, \dots, v_m\}$ e $m \leq n$. O conjunto*

$$P_\beta = \{x \in \mathbb{R}^n ; x = \sum \lambda_i v_i, 0 \leq \lambda_i < 1\}$$

é chamado de domínio fundamental ou região fundamental de Λ_β com relação a base β .

Exemplo 5 Seja $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$. O reticulado gerado por β é o conjunto $\Lambda_\beta = \{a(1, 0) + b(0, 1) ; a, b \in \mathbb{Z}\} = \{(a, b) ; a, b \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}^2$ e o domínio fundamental P_β é o quadrado unitário $[0, 1)^2$.

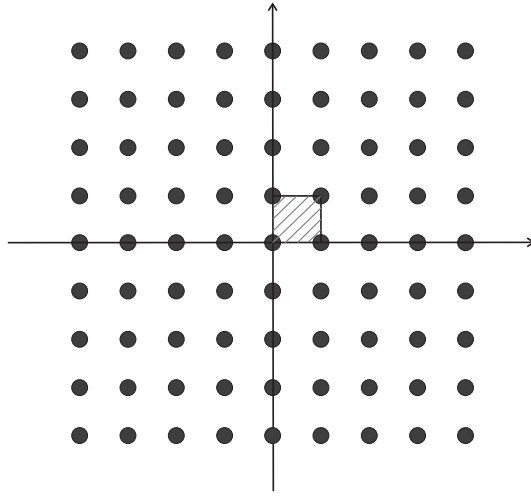


Figura 2.2: Reticulado $\mathbb{Z}^2$ e seu domínio fundamental

Note que há diversas formas de se escolher uma base e um domínio fundamental para o reticulado, mas o volume da região fundamental é unicamente determinado por Λ . De fato, uma matriz de mudança de base deve ser invertível no conjunto das matrizes com coeficientes inteiros, donde seu determinante é igual a ± 1 .

Definição 2.5 Sejam $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ um reticulado e $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base deste reticulado. Se $v_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in})$ para $i = 1, \dots, n$, chamamos de matriz geradora do reticulado Λ a matriz

$$M = \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \dots & v_{nn} \end{pmatrix}$$

Assim, com as mesmas hipóteses da definição 2.1, podemos descrever o reticulado como sendo

$$\Lambda = \{\lambda M ; \lambda \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Definição 2.6 A matriz $A = MM^\top$ é chamada de Matriz de Gram do reticulado Λ .

Definição 2.7 Definimos o determinante de um reticulado Λ como sendo

$$\det \Lambda = \det A = (\det M)^2 = (\text{vol}(P_\beta))^2.$$

2.2

Empacotamento reticulado

Definição 2.8 *Um empacotamento esférico em $\mathbb{R}^n$ é uma distribuição de esferas de mesmo raio ρ no $\mathbb{R}^n$ de forma que a interseção entre quaisquer duas esferas tenha no máximo um ponto.*

Definição 2.9 *Um empacotamento reticulado é um empacotamento esférico em que o conjunto dos centros das esferas formam um reticulado Λ no $\mathbb{R}^n$.*

Pela definição acima vimos que podemos descrever um empacotamento esférico apenas conhecendo o centro e o raio das esferas. E além disto, se u e v são centros de esferas, então também há esferas com centros $u + v$ e $u - v$, isto é, o conjunto de centros forma um conjunto aditivo.

Definição 2.10 *A densidade do reticulado é a proporção do espaço que é ocupado por esferas, isto é, é a razão entre o volume de uma esfera e o volume da região fundamental. Mais precisamente, temos*

$$\Delta = \frac{V_n}{(\det \Lambda)^{1/2}}$$

onde $V_n = \frac{\rho^n \pi^{n/2}}{(n/2)!}$ é o volume de uma esfera n -dimensional de raio ρ .

Definição 2.11 *A densidade dos centros é dada por*

$$\delta = \frac{\Delta}{V_n} = \frac{1}{\sqrt{\det \Lambda}}.$$

Para $\delta = 1$, δ é o número médio de centros por unidade de volume.

Em um empacotamento há lacunas entre as esferas; alguns pontos destas lacunas são chamados de buracos:

Definição 2.12 *Um buraco de $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ é um máximo local da função*

$$d : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \tag{2-1}$$

$$v \mapsto \min_{w \in \Lambda} \|v - w\| \tag{2-2}$$

Definição 2.13 *Um buraco fundo é um máximo global da função descrita acima.*

Definição 2.14 *O raio de recobrimento é a distância do ponto do reticulado a um buraco fundo.*

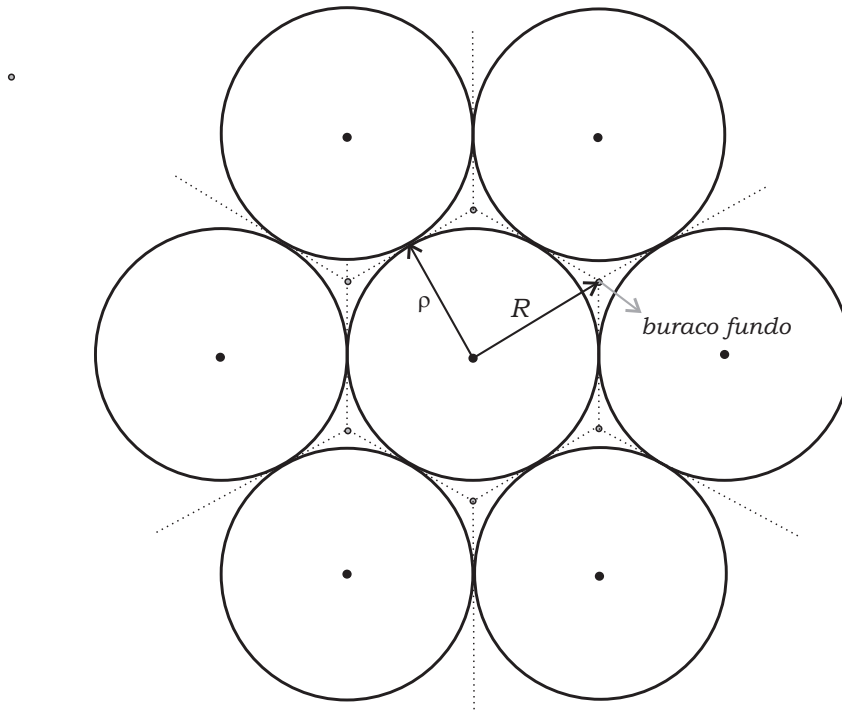


Figura 2.3: Empacotamento num reticulado hexagonal

2.3

Os reticulados A_n , B_n e D_n

O reticulado A_n é representado pelo diagrama de Coxeter-Dynkin abaixo

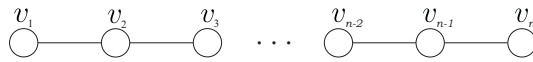


Figura 2.4: A_n

E descrito pelo conjunto

$$A_n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} ; \sum x_i = 0\}$$

Note que usamos $n + 1$ coordenadas neste reticulado, que é de dimensão n . E uma base para este reticulado pode ser construída pelos vetores

$$v_1 = (-1, 1, 0, \dots, 0), v_2 = (0, -1, 1, 0, \dots, 0), \dots, v_n = (0, 0, \dots, -1, 1)$$

já que $\langle v_i, v_{i+1} \rangle = -1$ para $i = 1, \dots, n - 1$ e além disso, quaisquer dois geradores que não estejam ligados por uma aresta formam um ângulo reto neste reticulado.

Seja W o grupo de reflexão gerado por

$$R_i w = w - 2 \frac{\langle v_i, w \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i$$

Assim temos:

$$\begin{aligned} R_1(x_1, \dots, x_{n+1}) &= (x_2, x_1, x_3, \dots, x_n, x_{n+1}) \\ R_2(x_1, \dots, x_{n+1}) &= (x_1, x_3, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \\ &\vdots \\ R_n(x_1, \dots, x_{n+1}) &= (x_1, x_3, x_2, \dots, x_{n+1}, x_n) \end{aligned}$$

Logo, R_i troca as coordenadas x_i e x_j , e W é o grupo S_{n+1} , o grupo das permutações de $n + 1$ elementos e W também pode ser visto como o grupo de simetrias de um hiper-tetraedro.

O reticulado B_n é descrito pelo diagrama de Coxeter-Dynkin abaixo

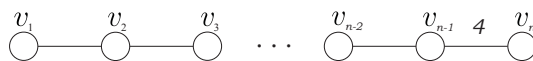


Figura 2.5: B_n

Este reticulado é gerado pelos $n - 1$ vetores da forma

$$v_1 = (1, -1, 0, \dots, 0), v_2 = (0, 1, -1, \dots, 0), \dots, v_{n-1} = (0, 0, \dots, 1, -1)$$

e para completarmos esta base usaremos o vetor $v_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$, que satisfaz as condições do seu diagrama de Coxeter-Dynkin

Assim, B_n é o conjunto formado por todos os vetores com norma mínima igual a 1 ou 2.

Seu grupo de reflexões é gerado por

$$\begin{aligned} R_1(x_1, \dots, x_n) &= (x_2, x_1, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n) \\ R_2(x_1, \dots, x_n) &= (x_1, x_3, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \\ &\vdots \\ R_n(x_1, \dots, x_n) &= (x_1, x_3, x_2, \dots, x_{n-1}, -x_n) \end{aligned}$$

que é o grupo das permutações de n elementos com sinais. Este grupo também pode ser visto como o grupo das simetrias do hiper-cubo.

Agora considere o reticulado D_n em $\mathbb{Z}^n$ dos vetores v tais que a soma das coordenadas é par. Logo, D_n é descrito pelo conjunto

$$D_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n ; \sum x_i \in 2\mathbb{Z}\}$$

Este reticulado é gerado pelos $n - 1$ vetores da forma

$$v_1 = (1, -1, 0, \dots, 0), v_2 = (0, 1, -1, \dots, 0), \dots, v_{n-1} = (0, 0, \dots, 1, -1)$$

e para completarmos esta base usaremos o vetor $v_n = (0, 0, \dots, 1, 1)$, que satisfaz as condições do seguinte diagrama de Coxeter-Dynkin

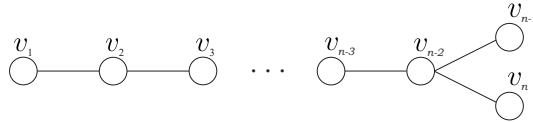


Figura 2.6: D_n

Isto é,

- $\langle v_i, v_i \rangle = 2$, para todo $i = 1, \dots, n$
- $\langle v_1, v_2 \rangle = -1$, $\langle v_1, v_i \rangle = 0$, para todo $i > 2$
- $\langle v_2, v_3 \rangle = -1$, $\langle v_2, v_i \rangle = 0$, para todo $i > 3$
- $\langle v_{n-2}, v_{n-1} \rangle = \langle v_{n-2}, v_n \rangle = -1$
- $\langle v_n, v_{n-1} \rangle = 0$

Seja o grupo de reflexão gerado por

$$\begin{aligned} R_1(x_1, \dots, x_n) &= (x_2, x_1, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n) \\ R_2(x_1, \dots, x_n) &= (x_1, x_3, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \\ &\vdots \\ R_n(x_1, \dots, x_n) &= (x_1, x_2, x_3, \dots, -x_n, -x_{n-1}) \end{aligned}$$

Estas reflexões geram o grupo D_n , que é o grupo das permutações com número par de sinais de menos. Geometricamente, este é o grupo das simetrias do hiper-cubo sendo que pintamos os vértices em duas cores de forma alternada.

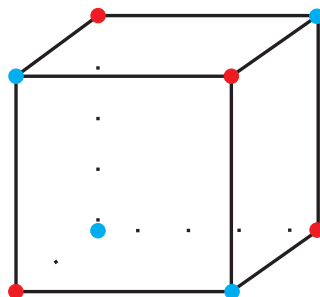


Figura 2.7: Cubo com vértices alternados em duas cores

2.4

O reticulados E_8

Existem diversas formas possíveis para obtermos um conjunto de geradores para o reticulado E_8 . Vamos apresentar algumas delas:

1º sistema de coordenadas de E_8 - versão par

Considere em $\mathbb{R}^8$ o reticulado D_8 , isto é, vetores em $\mathbb{Z}^8$ com a soma das coordenadas sendo par. Sendo assim, os vetores deste reticulado são:

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \quad v_2 = (0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0), \\ v_3 &= (0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0), \quad v_4 = (0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0), \\ v_5 &= (0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0), \quad v_6 = (0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0), \\ v_7 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1), \quad v_8 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1). \end{aligned}$$

Note que D_8 tem as seguintes propriedades:

- $\forall v_1, v_2 \in D_8, \langle v_1, v_2 \rangle \in \mathbb{Z}$,
- $\forall v \in D_8, \langle v, v \rangle \in 2\mathbb{Z}$.

É possível aumentar D_8 , acrescentando por exemplo o vetor $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, preservando todas estas propriedades. Desta forma, $E_8 = D_8 \cup (D_8 + (\frac{1}{2})^8)$. Assim, um vetor pertence a este reticulado se e somente se suas coordenadas são inteiras ou todas são da forma $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ e a soma das coordenadas é par.

Em outras palavras, podemos definir o reticulado neste sistema como sendo o conjunto

$$E_8 = \{x \in \mathbb{R}^8 ; x_i \in \mathbb{Z} \text{ ou } x_i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, \sum x_i \equiv 0 \pmod{2}\}$$

1º sistema de coordenadas de E_8 - versão ímpar

O sistema de coordenadas ímpares é obtido trocando o sinal de qualquer coordenadas. Um vetor pertence a este reticulado se e somente se suas coordenadas são inteiras e a soma das coordenadas é par ou são todas da forma $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ sendo a soma destas, ímpar.

Logo, podemos definir o reticulado neste sistema como sendo o conjunto

$$E_8 = \{x \in \mathbb{R}^8 ; x_i \in \mathbb{Z} \text{ ou } x_i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, \sum x_i \equiv 2x_1 \pmod{2}\}$$

2º sistema de coordenadas de E_8

Considerando agora o espaço vetorial $(\mathbb{Z}/(2))^3$ sobre $\mathbb{Z}/(2)$, com os 8 elementos:

$$000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111$$

Temos 14 subconjuntos de $(\mathbb{Z}/(2))^3$, que são os hiperplanos, isto é, subspaços translados de codimensão igual a 1, como por exemplo $W_0 = \{000, 001, 010, 011\}$. Estes subconjuntos têm as seguintes propriedades:

- Para todo subconjunto, existe um único subconjunto disjunto, a saber, o complemento (planos paralelos).
- Dados dois subconjuntos distintos e não disjuntos, a interseção tem exatamente dois elementos (uma reta).
- A diferença simétrica de dois conjuntos é $\emptyset$ (planos iguais), $(\mathbb{Z}/(2))^3$ (planos paralelos) ou um dos 14 planos.

O reticulado E_8 , neste sistema de coordenadas, é dado interpretando as posições do vetor como elementos de $(\mathbb{Z}/(2))^3$, e este tem as seguintes propriedades:

- $\forall v_1, v_2 \in E_8, \langle v_1, v_2 \rangle \in 2\mathbb{Z}$.
- $\forall v \in E_8, \langle v, v \rangle \in 4\mathbb{Z}$.

Sendo assim, esse sistema de coordenadas é constituído por pontos da forma $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \in \mathbb{R}^8$, tal que

$$x_i \in \mathbb{Z} \text{ e } \{i ; x_i \in 2\mathbb{Z}\} = \begin{cases} \emptyset, \text{ ou} \\ (\mathbb{Z}/(2))^3, \text{ ou} \\ \text{um dos 14 hiperplanos.} \end{cases}$$

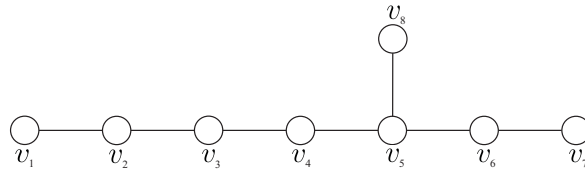
A partir de agora, apresentaremos características importantes de E_8 .

Vetores da base de E_8

Vamos relacionar o 1º sistema de coordenadas - versão ímpar,

$$E_8 = \{x \in \mathbb{R}^8 ; x_i \in \mathbb{Z} \text{ ou } x_i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, \sum x_i \equiv 2x_1 \pmod{2}\}$$

com o diagrama de Coxeter-Dynkin


 Figura 2.8: E_8

visto no capítulo anterior. Cada vértice é um elemento do reticulado e este diagrama pode nos dar informações sobre os ângulos formados pelos vetores da base do E_8 . Podemos observar pelo diagrama que v_1 e v_2 formam um ângulo igual a $\pi - \frac{\pi}{3}$, já que $m(v_1, v_2) = 3$. Além disso, v_1 deve formar um ângulo reto com os demais vetores da base, já que $m(v_1, v_i) = 2$, para $i \in \{3, \dots, 8\}$. O mesmo ocorre com as duplas de vetores que estão ligadas pela aresta neste diagrama, isto é, $m(v_2, v_3) = m(v_3, v_4) = m(v_4, v_5) = m(v_6, v_7) = m(v_8, v_5) = 3$, e já as duplas que não estão ligadas por uma aresta, formam um ângulo reto entre eles. Imitando a construção de A_7 podemos tomar os 7 primeiros vetores como $v_1 = (-1, 1, 0^6)$, $v_2 = (0, -1, 1, 0^5)$, $v_3 = (0^2, -1, 1, 0^4)$, $v_4 = (0^3, -1, 1, 0^3)$, $v_5 = (0^4, -1, 1, 0^2)$, $v_6 = (0^5, -1, 1, 0)$ e $v_7 = (0^6, -1, 1)$, pois $\langle v_i, v_{i+1} \rangle = -1$, para $i \in \{1, \dots, 6\}$ e $\|v_i\| = \sqrt{2}$, o que nos diz que $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ e portanto, $\theta = \pi - \frac{\pi}{3}$, como desejado.

O oitavo vetor forma um ângulo igual a $\pi - \frac{\pi}{3}$ com v_5 , pois $m(v_8, v_5) = 3$ e além disso, este também forma um ângulo reto com os demais. Então, uma boa escolha é o vetor da forma $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, já que $\langle v_8, v_5 \rangle = -1$ e $\langle v_8, v_i \rangle = 0$ para $i = 1, 2, 3, 4, 6, 7$.

Além disso, podemos perceber que cada um destes vetores pertencem ao reticulado, e como são 8 vetores linearmente independentes, os vetores $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8$ como descritos acima, formam uma base para o reticulado E_8 .

É possível adaptarmos a base anterior para a versão par deste sistema de coordenadas. Se trocarmos um número ímpar de sinais das coordenadas de v_8 , para obtermos por exemplo o vetor $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Observe que os vetores $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ ainda formam com v_8 os ângulos pedidos, e se tomarmos $v_7 = (0^6, 1, 1)$, vemos que este também satisfaz todas as propriedades pedidas.

Matriz Geradora de E_8

Uma matriz geradora para E_8 é

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Outra matriz geradora, obtida por escalonamento, é

$$M' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

E como esta é uma matriz triangular, não é difícil ver que seu determinante é igual a 1.

Densidades de E_8

A densidade do reticulado E_8 , que é a proporção do espaço que é ocupado por esferas, é igual a $\frac{\pi^4}{384} \cong 0.2537...$, a densidade dos centros é igual a $\frac{1}{16}$. Além disso o centro das esferas são os pontos do reticulado, sendo assim, o raio de cada esfera é dado pela metade da distância entre o centro de duas esferas vizinhas, ou seja, o raio é igual a metade da norma mínima, $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vetores de norma mínima de E_8

Os vetores de E_8 com norma mínima igual a 2 são da forma:

- $(\pm 1, \pm 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, onde as coordenadas não-nulas são permutadas. Devemos escolher duas posições e com a troca de sinal, obtemos um total de $\binom{8}{4} \cdot 4 = 112$ vetores

- $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$, onde escolhemos livremente 7 sinais e o oitavo fica determinado, o que resulta em $2^7 = 128$ vetores deste tipo.

Assim, E_8 tem no total 240 vetores com norma mínima 2.

Veremos no próximo capítulo que estes 240 vetores são os vértices de um politopo semiregular, chamado politopo de Gosset de dimensão 8; dois estes vértices são ligados por uma aresta, se a distância entre eles for mínima.

Empacotamento de E_8

O número de esferas que tocam uma esfera de mesmo tamanho é igual a 240. O raio destas esferas é o maior possível para que possamos distribuí-las de forma que fiquem centradas nos pontos do reticulado de E_8 e obter um empacotamento. Além disso, o raio de recobrimento é igual a $\rho\sqrt{2} = 1$.

Existem dois tipos de buracos. Os buracos fundos que são pontos da forma $(1, 0^7)$, que são cercados por 16 pontos do reticulado e os buracos rasos que são pontos do tipo $((\frac{1}{6})^7, \frac{5}{6})$, cercados por 8 pontos do reticulado.

2.5

Os reticulados E_7 e E_6

Os reticulados E_7 e E_6 são subconjuntos de E_8 , assim podemos descrevê-los de acordo com a escolha de um dos sistemas de coordenadas de E_8 .

Sistemas de coordenadas de E_7

O reticulado E_7 consiste dos vetores de E_8 que são perpendiculares a qualquer vetor de norma mínima v que pertença a E_8 .

$$E_7 = \{x \in E_8 ; \langle x, v \rangle = 0, v \in E_8\}$$

Considere o sistema de coordenadas par de E_8 e tomando $v = ((\frac{1}{2})^8)$, assim obtemos:

$$E_7 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \in E_8 ; \sum x_i = 0\}$$

E pelo sistema de coordenadas ímpar de E_8 e tomando $v = ((\frac{1}{2})^7, -\frac{1}{2})$, obtemos:

$$E_7 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \in E_8 ; \sum x_i = 2x_8\}$$

Ou em qualquer sistema de coordenadas, tomando $v = (0^6, 1, -1)$, temos:

$$E_7 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \in E_8 ; x_7 = x_8\}$$

Vetores da base de E_7

Como podemos ver, E_7 é um subconjunto de E_8 , sendo assim, não é difícil obtermos uma base para este reticulado.

Pelo diagrama de Coxeter-Dynkin de E_7

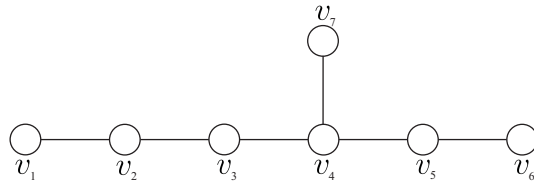


Figura 2.9: E_7

podemos perceber as relações entre os ângulos dos geradores deste reticulado. Neste conjunto temos 7 geradores, digamos, $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$, e assim como em E_8 , o ângulo formado por v_1 e v_2 é igual a $\pi - \frac{\pi}{3}$, e o ângulo entre v_1 e os demais vetores deve ser reto. E de forma análoga podemos ver as relações entre os outros pares de vetores deste conjunto.

Se considerarmos o sistema de coordenadas par de E_8 , não fica difícil perceber quais são os 6 primeiros geradores de E_7 . Se tomarmos $w = ((\frac{1}{2})^8)$, os vetores da forma $v = (-1, 1, 0^6)$ são todos perpendiculares a w e obedecem os ângulos pedidos, isto é, $\langle v_i, v_{i+1} \rangle = -1$ para $i \in \{1, \dots, 5\}$.

Sendo assim, só nos resta saber quem seria o sétimo gerador, o que também não fica difícil de se perceber que como este vetor pertence a E_8 e deve formar um ângulo igual a $\pi - \frac{\pi}{3}$ com o vetor v_4 , e deve ter ângulo reto com os demais, além de também ser perpendicular ao $w = ((\frac{1}{2})^8)$. Logo, o melhor candidato é o vetor $v_7 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Note que estes 7 vetores pertencem a E_7 , isto é, são vetores de E_8 cujas somas das coordenadas são nulas e todos são perpendiculares a w . Além disso, como estes vetores são linearmente independentes, estes formam então uma base para o reticulado E_7 .

Matriz Geradora de E_7

A matriz geradora de E_7 é a matriz cujas linhas são os vetores da base, a saber:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Densidades de E_7

A densidade de E_7 , que é a proporção do espaço que é ocupado por esferas, é igual a $\frac{\pi^3}{105} \cong 0.2953...$, já a densidade dos centros é igual a $\frac{1}{16}$.

Vetores de norma mínima de E_7

Os vetores de E_7 com norma mínima igual a 2 são da forma:

- $(-1, 1, 0^6)$, onde as coordenadas não-nulas são permutadas, então obtemos um total de $\binom{8}{4} = 56$ vetores
- $((\frac{1}{2})^4, (\frac{-1}{2})^4)$, onde o sinal de quatro coordenadas deve ser negativo e o sinal das outras 4 deve ser positivo e então resulta em 70 vetores deste tipo.

Assim, E_7 tem no total de 126 vetores com norma mínima 2.

Empacotamento de E_7

O número de esferas que tocam uma esfera de mesmo tamanho é igual a 126. Além disso o centro das esferas são os pontos do reticulado, sendo assim, o raio de cada esfera é dado pela metade da distância entre o centro de duas esferas vizinhas, ou seja, o raio é igual a metade da norma mínima, $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Além disso, o raio de recobrimento é igual a $\rho\sqrt{3} = \sqrt{\frac{3}{2}}$. E os buracos fundos são pontos da forma $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{4})$.

Os vetores de E_8 perpendiculares a qualquer A_2 -subreticulado V em E_8 formam os vetores que pertencem ao reticulado E_6 .

Sistemas de coordenadas de E_6

$$E_6 = \{x \in E_8 ; \langle x, v \rangle = 0, \forall v \in V\}$$

Da mesma forma que em E_7 , temos diversas possibilidades para o sistema de coordenadas de E_6 , como por exemplo, pelo sistema par de coordenadas de E_8 e tomando $v = \langle (1, 0^6, 1), (\frac{1}{2}^8) \rangle$, obtemos:

$$E_6 = \{x \in E_8 ; x_1 + x_8 = x_2 + \dots + x_6 = 0\}$$

E em ambos sistemas de coordenadas, se tomarmos $v = \langle (0^5, 1, -1, 0), (0^6, 1, -1) \rangle$, obtemos:

$$E_6 = \{x \in E_8 ; x_6 = x_7 = x_8\}.$$

Vetores da base de E_6

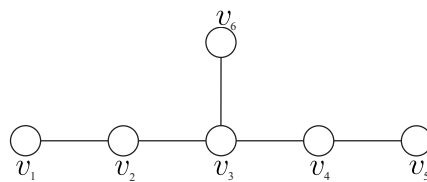


Figura 2.10: E_6

Como $E_6 \subset E_8$ podemos considerar o sistema de coordenadas par de E_8 e relacioná-lo ao diagrama de Coxeter-Dynkin de E_6 . Desta forma, podemos escolher o primeiro vetor como sendo $v_1 = (0, -1, 1, 0^6)$. Este vetor deve formar um ângulo igual a $\pi - \frac{\pi}{3}$ com o segundo vetor, e o ângulo entre v_1 e os demais vetores deve ser reto. E de forma análoga podemos ver as relações entre 4 seguintes vetores deste conjunto. Desta maneira, podemos considerar os vetores $v_1 = (0, -1, 1, 0^6), v_2 = (0^2, -1, 1, 0^5), v_3 = (0^3, -1, 1, 0^3), v_4 = (0^4, -1, 1, 0^2), v_5 = (0^5, -1, 1, 0)$, são boas escolhas, já que estes pertencem a E_6 e satisfazem aos ângulos pedidos.

O último vetor, deve formar um ângulo igual a $\pi - \frac{\pi}{3}$ com v_3 e deve ter ângulo reto com os demais. Logo, o melhor candidato é o vetor $v_6 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Estes 6 vetores pertencem a E_6 , isto é, são vetores de E_8 , cujas somas das primeira e última coordenadas são iguais a soma das demais e resultando em zero. Além disso, como estes vetores são linearmente independentes, estes formam então uma base para o reticulado E_6 .

Matriz Geradora de E_6

A matriz geradora de E_6 é a matriz cujas linhas são os vetores da base, a saber:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Densidades de E_6

A densidade de E_6 , que é a proporção do espaço que é ocupado por esferas, é igual a $\frac{\pi^3}{48\sqrt{3}} \cong 0.379...$, já a densidade do centro é igual a $\frac{1}{8\sqrt{3}}$.

Vetores de norma mínima de E_6

Os vetores de E_6 com norma mínima igual a 2 são da forma:

- $(0; 1, -1, 0^4; 0)$, num total de 30 vetores deste tipo;
- $\pm(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$, num total de 40 vetores deste tipo;
- $\pm(1; 0^6; -1)$, sendo somente 2 possibilidades.

Assim, E_6 tem um total de 72 vetores com norma mínima 2.

Empacotamento de E_6

O número de esferas que tocam uma esfera de mesmo tamanho é igual a 72. Além disso o centro das esferas são os pontos do reticulado, sendo assim, o raio de cada esfera é dado pela metade da distância entre o centro de duas esferas vizinhas, ou seja, o raio é igual a metade da norma mínima, $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Além disso, seu raio de recobrimento é igual a $\rho\sqrt{\frac{8}{3}} = 2\frac{\sqrt{3}}{3}$.