

1

Grupos de Coxeter

Um Grupo de Coxeter é um grupo abstrato dado por geradores e relações. Vamos nos conter nesse espaço a falar apenas da teoria geral de grupos de Coxeter finitos, e mais adiante, nas seções finais deste capítulo, mostraremos os grupos excepcionais E_8 , E_7 e E_6 .

1.1

Sistemas de Coxeter

Definição 1.1 Definimos um sistema de Coxeter como sendo o par (W, S) , onde W é um grupo e $S \subset W$ é um conjunto de geradores que tem relações apenas do tipo

$$(ss')^{m(s,s')} = 1,$$

onde $m(s, s') \in \{1, 2, 3, \dots, \infty\}$. Além disso, $m(s, s) = 1$, para todo $s \in S$; $m(s, s') = m(s', s) \geq 2$, para quaisquer $s \neq s' \in S$. E no caso em que nenhuma relação ocorra entre s e s' , faremos a convenção $m(s, s') = \infty$.

Formalmente, W é o quociente F/N , onde F é um grupo livre e N é o subgrupo normal gerado por todos os elementos $(ss')^{m(s,s')}$.

Definição 1.2 $|S|$ é o grau de (W, S) .

Um Sistema de Coxeter (W, S) é descrito por um conjunto S finito e uma matriz M simétrica, indexada por S com entradas em $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ com as condições da definição 1.1.

Definição 1.3 Definimos um diagrama de Coxeter-Dynkin como sendo um diagrama finito, onde as arestas que ligam os vértices s e s' ganham o valor de $m(s, s')$, que é no mínimo 3. No caso em que os vértices s e s' não são ligados por uma aresta, fica entendido que $m(s, s') = 2$ e para simplificar a notação, quando $m(s, s') = 3$, este valor é omitido do diagrama.

Definição 1.4 Dizemos que um sistema de Coxeter (W, S) é irredutível se seu diagrama de Coxeter-Dynkin é conexo.

Exemplo 1 O diagrama abaixo representa o grupo de Coxeter A_3 , que é gerado por três geradores, digamos a , b e c .

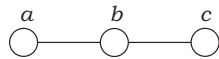


Figura 1.1: A_3

A partir dele podemos concluir que as relações deste grupo são: $(ab)^3 = (bc)^3 = (ac)^2 = a^2 = b^2 = c^2 = 1$.

O grupo de Coxeter correspondente é S_4 , permutações de 4 elementos com $a = (12)$, $b = (23)$, $c = (34)$.

1.2

Representação Geométrica de W

Definição 1.5 Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e uma base $\{\alpha_s ; s \in S\}$ numa correspondência injetiva com S . Dado um sistema de Coxeter (W, S) definimos a forma bilinear simétrica B em V como

$$B(\alpha_s, \alpha_{s'}) = -\cos\left(\frac{\pi}{m(s, s')}\right)$$

Além disso, $B(\alpha_s, \alpha_{s'}) = -1$, se $m(s, s') = \infty$ e $B(\alpha_s, \alpha_s) = 1$ e $B(\alpha_s, \alpha_{s'}) \leq 0$, se $s \neq s'$.

Observação 1.6 Se α_s não é isotrópico, o subespaço H_s ortogonal a α_s , relativo a B é complementar a reta $R\alpha_s$.

Nós podemos assim definir uma reflexão como sendo uma transformação linear que fixa o hiperplano ponto a ponto e leva um vetor não nulo ao seu negativo, desta forma impomos uma geometria em V cujo ângulo entre α_s e $\alpha_{s'}$ é determinado por $m(s, s')$, isto é, o ângulo entre α_s e $\alpha_{s'}$ é igual a $\pi - \frac{\pi}{m(s, s')}$.

Exemplo 2 Considere em $\mathbb{R}^2$ o grupo Diedral de ordem 4, $I_2(4)$.

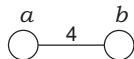


Figura 1.2: $I_2(4)$

Pelo seu diagrama de Coxeter-Dynkin temos as seguintes relações:

$$a^2 = b^2 = (ab)^4 = 1$$

Além disso, também podemos ver que o ângulo formado pelas reflexões associadas a cada gerador é igual a 45 graus. Assim, geometricamente temos:

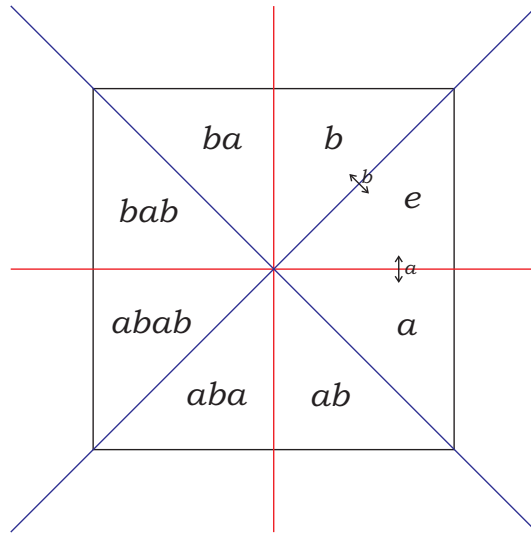


Figura 1.3: Grupo $I_2(4)$ gerado pelas reflexões a e b

Logo, podemos observar facilmente que $e, a, b, ab, ba, aba, bab, abab$ são 8 os elementos desse grupo.

De forma geral, $I_2(m)$ é o grupo Diedral de ordem $2m$, que consiste das simetrias dos polígonos regulares de m lados.

Definição 1.7 Para cada $s \in S$ definimos a reflexão $R_s : V \rightarrow V$ da seguinte forma:

$$R_s(\lambda) = \lambda - 2B(\alpha_s, \lambda)\alpha_s$$

Observação 1.8 R_s preserva a forma B . Como resultado disso, cada elemento do subgrupo de $GL(V)$ gerado por $R_s, s \in S$, também preserva B .

Exemplo 3 Seja o grupo A_3 e $S = \{a, b, c\}$ o conjunto de seus geradores. Tome $V = \mathbb{R}^3$ e $\beta = \{\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c\}$ a sua base canônica. Então a forma bilinear é a matriz simétrica positiva definida

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

A partir daí, podemos definir as reflexões. Seja v um vetor qualquer de $\mathbb{R}^3$, assim temos:

$$\begin{aligned}
 R_a(v) &= v - 2B(\alpha_a, v)\alpha_a = \\
 &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 2 \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} -x + y \\ y \\ z \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Logo, $a = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz da reflexão com respeito ao vetor α_a .

E da mesma maneira, podemos obter as reflexões

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Observe que cada uma destas matrizes é um elemento do grupo de Coxeter A_3 . Não fica difícil verificar para estas matrizes as relações de Coxeter-Dynkin, isto é, por produtos de matrizes vemos que

$$a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^3 = (bc)^3 = (ac)^2 = I_3,$$

aonde I_3 é a matriz identidade de ordem 3.

Lembre que uma reflexão pode ser escrita como: $R_{v_i}(v) = v - 2\frac{\langle v_i, v \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}v_i$.

Proposição 1.9 *Existe um único homomorfismo $R : W \rightarrow GL(V)$ que leva s para R_s , e o grupo $R(W)$ preserva a forma B em V . Mais ainda, para cada par $s, s' \in S$, a ordem de ss' em W é precisamente $m(s, s')$.*

Este homomorfismo R é a representação geométrica de W .

1.3

Sistema de raízes

Definição 1.10 *Um sistema de raízes de W , Φ , é a coleção de todos os vetores $R_w(\alpha_s)$, onde $w \in W$ e $s \in S$.*

Observação 1.11 Φ consiste em vetores unitários de V permutados por W .

Observação 1.12 *Para simplificar a notação, usamos $w(\alpha_s)$ em vez de $R_w(\alpha_s)$.*

Exemplo 4 *Seguindo o raciocínio do exemplo anterior, para obtermos o conjunto Φ das raízes de A_3 , o primeiro passo é aplicar cada uma das reflexões a, b e c a cada vetor da base canônica β , como abaixo:*

$$a(\alpha_a) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a(\alpha_b) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a(\alpha_c) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$b(\alpha_a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b(\alpha_b) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, b(\alpha_c) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$c(\alpha_a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, c(\alpha_b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c(\alpha_c) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Eliminando as repetições, temos inicialmente um conjunto formado por 7 vetores. E em seguida, aplicamos cada uma das reflexões a, b e c a cada um dos 7 vetores acima obtido e assim sucessivamente, obtendo a seguinte lista:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Observação 1.13 *Se α é uma raiz qualquer, então podemos escrevê-la unicamente como*

$$\alpha = \sum c_s \alpha_s, \text{ onde } c_s \in \mathbb{R}.$$

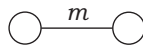
1.4

Classificação dos Grupos de Coxeter Finitos

Os grupos de Coxeter são classificados através de seus diagramas de Coxeter-Dynkin. Eles são finitos se suas matrizes da forma bilinear são positiva-definidas.

Vamos considerar apenas diagramas conexos. E uma propriedade que vai nos ajudar a eliminar alguns casos é que se um diagrama é positivo-definido, então cada sub-diagrama também é.

Diagrama com 2 geradores:

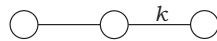


Sua forma bilinear é representada pela matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \cos(\frac{\pi}{m}) \\ -2 \cos(\frac{\pi}{m}) & 2 \end{pmatrix},$$

que é positiva-definida para qualquer $m \geq 3$.

Diagramas com 3 geradores:



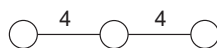
No caso em que $k = 3$, temos a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

que é positiva-definida. O mesmo vale para $k = 4$ e 5 . Já para $k = 6$, temos a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

que não é positiva-definida.

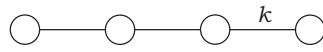


Neste caso, temos a matriz

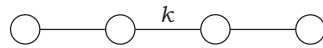
$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

que também não é positiva-definida.

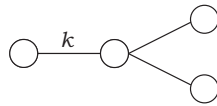
Diagramas com 4 geradores:



Para $k = 3, 4$ e 5 as matrizes são positivas definidas, mas não para $k \geq 6$.

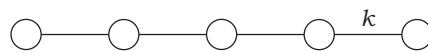


Para $k = 3, 4$ as matrizes são positivas definidas, mas não para $k \geq 5$.

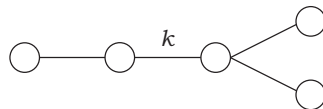


Apenas para $k = 3$ a matriz é positiva-definida.

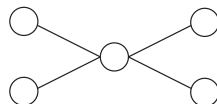
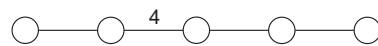
Diagramas com 5 geradores:



Para $k = 3, 4$ as matrizes são positivas definidas, mas não para $k \geq 5$.



Apenas para $k = 3$ a matriz é positiva-definida.

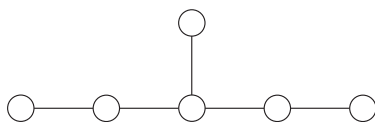
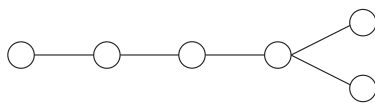


As formas bilineares dos diagramas acima não são positivas-definidas.

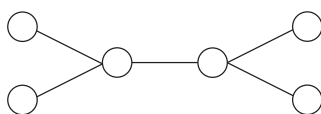
Diagramas com 6 geradores:



Para $k = 3, 4$ as matrizes são positivas definidas, mas não para $k \geq 5$.

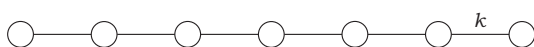


As matrizes associadas em ambos os casos acima são positiva-definidas.

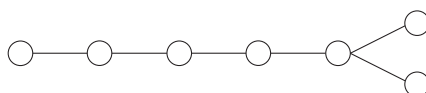


Neste caso, para qualquer valor nas arestas, a matriz não é positiva-definida, logo não vamos considerar diagramas com mais de uma encruzilhada.

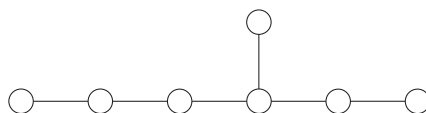
Diagramas com 7 geradores:



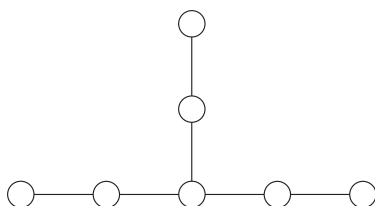
Para $k = 3, 4$ as matrizes são positiva-definidas, mas não para $k \geq 5$.



Apenas para $k = 3$, a matriz associada é positiva definida.



A matriz associada é positiva-definida.

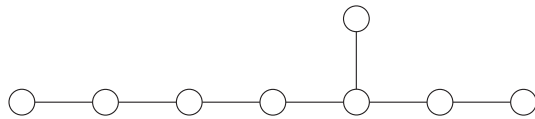
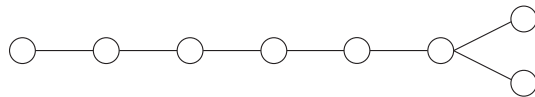


Neste caso, para qualquer valor nas arestas, a matriz não é positiva-definida.

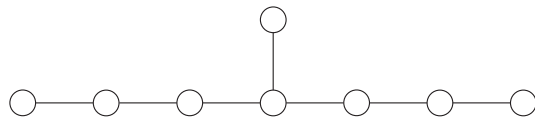
Diagramas com 8 geradores:



Para $k = 3, 4$ as matrizes são positivas definidas, mas não para $k \geq 5$.

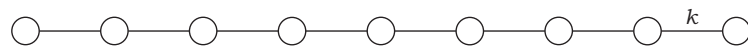


Ambos diagramas acima possuem forma bilinear positiva-definida.

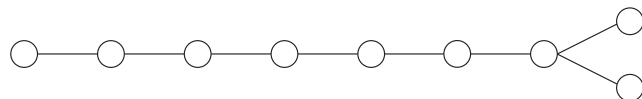


O diagrama acima não possui forma bilinear positiva-definida.

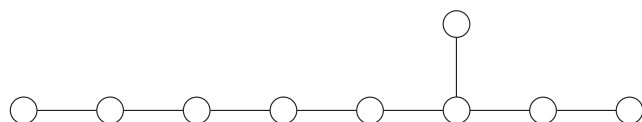
Diagramas com 9 geradores:



Para $k = 3, 4$ as matrizes são positivas definidas, mas não para $k \geq 5$.



A matriz associada a este diagrama é positiva-definida.



Neste caso, a forma bilinear não é positiva-definida.

Logo, podemos classificar e dividir os grupos de Coxeter finitos em duas categorias:

- As famílias infinitas A_n, B_n e D_n
- Os excepcionais grupos $E_6, E_7, E_8, F_4, H_3, H_4, I_2(m)$.

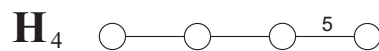
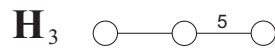
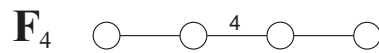
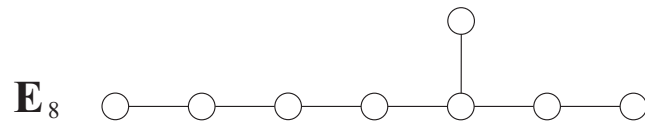
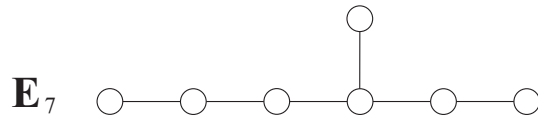
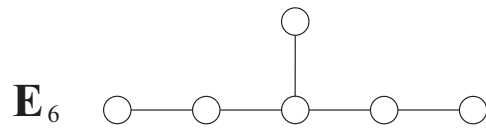
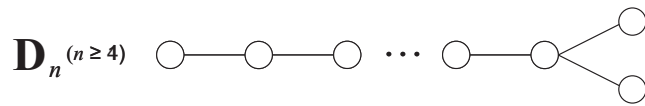
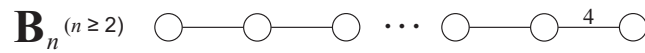
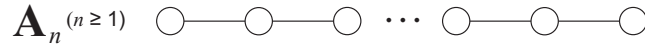


Figura 1.4: Grupos de Coxeter Finitos

Estes são os casos irredutíveis, isto é, sempre podemos tomar um produto cartesiano de grupos que correspondem a uma união disjunta de diagramas.

Todos esses grupos são representados por grupos de reflexão em espaços euclidianos de dimensão finita. Além disso, podemos relacioná-los a grupos de simetria de certos sólidos geométricos, chamados politopos, que veremos com mais detalhes no capítulo 3.

A família $A_n (n \geq 1)$ corresponde ao grupo S_{n+1} , grupo das permutações de $n + 1$ elementos. Ou seja, se pensarmos em S_{n+1} como um subgrupo de $O(n, \mathbb{R})$, o grupo das matrizes ortogonais, temos que seus geradores transpõem os elementos i e $i + 1$ agindo assim como reflexões em $\mathbb{R}^n$. Em outras palavras, os geradores podem ser escritos como $a_1 = (12), a_2 = (23), a_3 = (34), \dots, a_n = (n \ n + 1)$.

A família $B_n (n \geq 2)$ é o grupo de permutações com sinais de n elementos. Isto é, os elementos de B_n são matrizes de permutações com sinais, em que toda entrada é igual a 0, 1 ou -1 e há exatamente uma entrada não nula em cada linha e exatamente uma entrada não nula em cada coluna.

A família $D_n (n \geq 4)$ é o grupo de permutações de n elementos com número par de sinais de menos. Este pode ser visto como um subgrupo de B_n com índice 2. Ou seja, os elementos deste grupo são matrizes com número par de entradas iguais a -1 .

Já os grupos E_6, E_7 e E_8 são ditos excepcionais pois não formam famílias infinitas. Isto é, tirando o primeiro vértice de E_8 nós obtemos E_7 , se tirarmos o primeiro vértice de E_7 , obtemos E_6 , mas note que se tirarmos o primeiro vértice de E_6 , obtemos $E_5 = D_5$ e se tirarmos o primeiro e o segundo vértices de E_6 vemos que $E_4 = A_4$. Já para $n \geq 9$, E_n é infinito. Estes grupos correspondem ao grupo de simetria de certos politopos ditos semiregulares.

O grupo $I_2(m)$ corresponde ao grupo Diedral de ordem $2m$ e é o menor dos grupos excepcionais, tendo apenas 2 geradores. Suas reflexões geram o grupo de simetria dos polígonos regulares em $\mathbb{R}^2$.

O grupo H_3 , possui três geradores e é formado pelo grupo de simetrias do icosaedro em $\mathbb{R}^3$. Já H_4 e F_4 , possuem 4 geradores e correspondem ao grupo de simetria de certos politopos regulares em dimensão 4.

Apesar de muito interessantes, não faremos neste trabalho a construção dos 3 últimos grupos citados acima.

1.5

O Grupo de Coxeter E_8

O grupo de Coxeter E_8 é representado pelo grafo de Coxeter-Dynkin

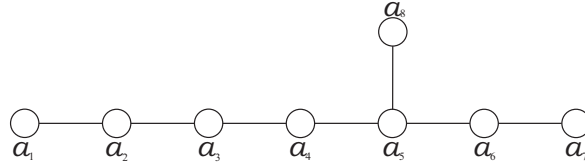


Figura 1.5: Diagrama de Coxeter-Dynkin do grupo E_8

onde $a_1, \dots, a_8$ representam os vetores que formam uma base para $\mathbb{R}^8$ e a partir deles somos capazes de obter informações sobre os elementos deste grupo, que são as reflexões que o geram.

Do diagrama de Coxeter-Dynkin, sabemos que, para $i, j \in \{1, \dots, 8\}$,

$$m(a_i, a_j) = 1 \text{ e } m(a_i, a_j) = \begin{cases} 3, & \text{os vetores são ligados por uma aresta;} \\ 2, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Lembrando que isto dizer que quando $m(a_i, a_j) = 3$ então o ângulo formado entre a_i e a_j é igual a $\pi - \frac{\pi}{3}$ e quando $m(a_i, a_j) = 2$ então o ângulo formado entre a_i e a_j é igual a $\frac{\pi}{2}$.

A forma bilinear simétrica, neste caso, é a matriz cujas entradas são da forma $b_{ij} = -\cos(\frac{\pi}{m(a_i, a_j)})$ e portanto temos:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se considerarmos a base canônica $\beta = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$ de $\mathbb{R}^8$, podemos definir as reflexões R_i , para cada $i = 1, \dots, 8$ como sendo:

$$R_i(\lambda) = \lambda - 2B(\lambda, e_i)e_i$$

Note que cada uma das 8 reflexões são matrizes 8×8 que geram o grupo E_8 .

Para $i = 1$, temos

$$R_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Analogamente podemos encontrar as outras 7 matrizes geradoras deste grupo e em seguida, os primeiros elementos do seu sistema de raízes. Inicialmente, basta aplicarmos R_1 a cada vetor da base canônica de $\mathbb{R}^8$. Isto é,

$$R_1(e_1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A partir daí, basta fazer o mesmo processo para as outras 7 reflexões e aplicar cada uma das 8 reflexões a estes resultados obtidos e assim sucessivamente. Desta forma e eliminando as repetições, é possível encontrar os 240 elementos para o sistema de raízes deste grupo de Coxeter.

Uma outra forma de descrever o grupo E_8 é definir uma outra base $\{v_i ; 1 \leq i \leq 8\}$ de $\mathbb{R}^8$ diferente da base canônica e tal que o produto interno usual satisfaça $\widehat{v_i v_j} = \pi - \frac{\pi}{m(a_i, a_j)}$.

Para isto, vamos tomar a matriz B definida anteriormente. Como B é positiva definida, então B admite a fatoração de Cholesky, isto é, $B = LL^T$, onde L é uma matriz triangular superior, a saber

$$L = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 2\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\frac{\sqrt{5}}{2} & \frac{\sqrt{30}}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{30}}{6} & \frac{\sqrt{42}}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{42}}{7} & 2\frac{\sqrt{14}}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{30}}{6} & -5\frac{\sqrt{42}}{42} & -5\frac{\sqrt{14}}{28} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$$

e

$$L^T = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{2} & -2\frac{\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{30}}{5} & -\frac{\sqrt{30}}{6} & 0 & -\frac{\sqrt{30}}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{42}}{6} & -\frac{\sqrt{42}}{7} & -5\frac{\sqrt{42}}{42} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\frac{\sqrt{14}}{7} & -5\frac{\sqrt{14}}{28} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$$

Como o produto interno que definimos anteriormente era dado por:

$$\langle w_1, w_2 \rangle_* = w_1^T A w_2 = w_1^T L L^T w_2 = \langle L^T w_1, L^T w_2 \rangle,$$

então as colunas de L^T (imagem via L^T da base canônica) nos fornece vetores explícitos em $\mathbb{R}^8$ que satisfazem o produto interno usual com os ângulos pedidos. Mas no nosso caso, esta fatoração nos deu uma matriz com entradas não muito simples que complicariam qualquer tipo de conta, podemos então encontrar uma matriz ortogonal Q , já que as colunas de $Q L^T$ também são boas.

Já uma base na qual os elementos de E_8 têm expressão bem mais simples é

$$\begin{aligned} & \{(-1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (0, -1, 1, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, -1, 1, 0, 0, 0, 0), \\ & (0, 0, 0, -1, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, -1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 0, -1, 1, 0), \\ & (0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 1), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}. \end{aligned}$$

No capítulo seguinte veremos como chegar a esta base de forma natural.

Assim, escolhendo convenientemente a matriz Q ortogonal, podemos definir as reflexões associadas a esta base, onde

$$R_i(\lambda) = \lambda - 2 \frac{\langle v_i, \lambda \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i$$

No caso em que $i = 1$, temos

$$R_1 = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix}$$

Analogamente podemos encontrar as outras sete reflexões.

1.6

Os Grupos de Coxeter E_7 e E_6

O grupo E_7 é representado pelo seguinte diagrama de Coxeter-Dynkin

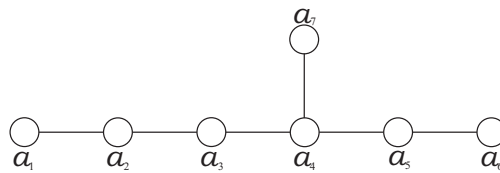


Figura 1.6: Diagrama de Coxeter-Dynkin do grupo E_7

que possui os 7 geradores $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ e sua forma bilinear é a matriz definida abaixo.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 1 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 1 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Considerando a base canônica de $\mathbb{R}^7$ e utilizando o mesmo procedimento feito para E_8 , podemos construir as 7 matrizes de reflexões que geram este grupo e em seguida se aplicarmos cada uma das 7 reflexões aos resultados obtidos e eliminando as repetições, é possível encontrar os 126 elementos que formam o sistema de raízes deste grupo de Coxeter.

O grupo E_6 é representado pelo seguinte diagrama de Coxeter-Dynkin

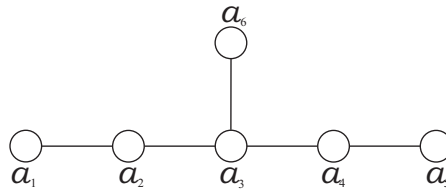


Figura 1.7: Diagrama de Coxeter-Dynkin do grupo E_6

que possui os 6 geradores $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ e a sua forma bilinear é a matriz definida abaixo.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Considerando a base canônica de $\mathbb{R}^6$ podemos encontrar de forma análoga ao que foi feito anteriormente, as 6 matrizes de reflexão que geram este grupo. E a partir daí, encontramos os 72 elementos que formam o sistema de raízes deste grupo de Coxeter.