PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

Camilla Neres Peixoto

Politopos de Gosset e os grupos de Coxeter E_n

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós–graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC–Rio

Orientador: Prof. Nicolau Corção Saldanha

Rio de Janeiro
Março de 2010

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Camilla Neres Peixoto

Politopos de Gosset e os grupos de Coxeter $\mathbb{E}_n$

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós–graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC–Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Nicolau Corção Saldanha
Orientador
Departamento de Matemática — PUC–Rio

Prof. Carlos Tomei
Departamento de Matemática — PUC–Rio

Prof. George Svetlichny
Departamento de Matemática — PUC–Rio

Prof. Roberto Imbuzeiro M.F. de Oliveira
Instituto de Matemática Pura e Aplicada — IMPA

Prof. José Eugenio Leal
Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC–Rio

Rio de Janeiro, 26 de Março de 2010

Camilla Neres Peixoto

Graduação: Licenciatura e Bacharelado em Matemática — Universidade Federal Fluminense – UFF (2001–2006).

Ficha Catalográfica

Peixoto, Camilla N.

Politopos de Gosset e os grupos de Coxeter $\mathbf{E}_n$ / Camilla Neres Peixoto; orientador: Nicolau Corção Saldanha. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2010.

v., 68 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1; Matemática – Tese. 2; Grupos de Coxeter. 3; Reticulados. 4; Politopos de Gosset. 5; Álgebras de Lie Excepcionais. I; Saldanha, Nicolau C.. II; Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III; Título.

CDD: 510

Dedico esta dissertação primeiramente aos meus tão queridos pais, Elisia e Enildo, que não viram limites ao me darem estudo e educação. Com certeza, eles são os melhores pais do mundo.

Dedico também ao meu amado marido Rogério, que sempre esteve ao meu lado me incentivando para que eu realizasse todos os meus sonhos e me encorajando para que eu superasse qualquer obstáculo.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus.

Agradeço ao meu orientador Nicolau, pela ótima orientação e por compartilhar de seus valiosíssimos conhecimentos, além da enorme paciência que teve com tantos acontecimentos importantes na minha vida pessoal durante o período de realização deste trabalho.

Agradeço ao Departamento de Matemática da PUC-Rio e em especial ao querido pessoal da secretaria, Creuza, Katia e Otávio que sempre esteveram a postos para me auxiliar no que fosse necessário.

Agradeço ao CNPq por todo incentivo financeiro dado neste período.

Agradeço aos amigos especiais: Betina Vath, Renato Zanforlin (sempre presente), Hellen Silva, Joana Becker, Cecília Lustosa, Eduardo Telles, João Paulo Romanelli, Ady Cambraia, Guilherme Frederico, Carlos Pinãfiel, Rodrigo Pacheco, que de alguma forma me ajudaram para que esse trabalho se concretizasse.

Aos familiares e amigos não citados, agradeço profundamente por existirem na minha vida, sem vocês a vida não seria tão bonita!

Resumo

Peixoto, Camilla N.; Saldanha, Nicolau C.(orientador). **Politopos de Gosset e os grupos de Coxeter $\mathbf{E}_n$**. Rio de Janeiro, 2010. 68p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Um politopo convexo é semiregular se todas as suas faces forem regulares e o grupo de isometrias agir transitivamente sobre os vértices. A classificação dos politopos semiregulares inclui algumas famílias infinitas, algumas exceções em dimensão baixa e uma família, os politopos de Gosset, que está definida para dimensão entre 3 e 8. Certos grupos de isometrias de $\mathbb{R}^n$ gerados por reflexões são chamados grupos de Coxeter. A classificação dos grupos de Coxeter inclui três famílias infinitas, algumas exceções em dimensão menor ou igual a 4 e os grupos excepcionais $\mathbf{E}_6$, $\mathbf{E}_7$ e $\mathbf{E}_8$. O grupo $\mathbf{E}_n$ é o grupo das isometrias do politopo de Gosset em dimensao n. Nesta dissertação construiremos os grupos de Coxeter $\mathbf{E}_n$, os politopos de Gosset e indicaremos a relação destes objetos com os reticulados e as álgebras de Lie também conhecidos como $\mathbf{E}_n$.

Palavras–chave

Grupos de Coxeter; Reticulados; Politopos de Gosset; Álgebras de Lie Excepcionais;

Abstract

Peixoto, Camilla N.; Saldanha, Nicolau C.(adviser). **Gosset polytopes and the Coxeter groups $\mathbf{E}_n$**. Rio de Janeiro, 2010. 68p. MSc. Dissertation — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A convex polytope is semiregular if all its faces are regular and the group of isometries acts transitively over vertices. The classification of semiregular polytopes includes a few infinite families, some low dimensional exceptions and a family, the Gosset polytopes, which is defined for dimension 3 to 8. Certain groups of isometries of $\mathbb{R}^n$ generated by reflections are called Coxeter groups. The classification of finite Coxeter groups includes three infinite families, some exceptions in dimension 4 or lower and the exceptional groups $\mathbf{E}_6$, $\mathbf{E}_7$ and $\mathbf{E}_8$. The group $\mathbf{E}_n$ is the group of isometries of the Gosset polytope in dimension n. In this dissertation we construct the Coxeter groups $\mathbf{E}_n$, the Gosset polytopes and indicate the relationship of these objects with the lattices and Lie algebras which are also known as $\mathbf{E}_n$.

Keywords

Coxeter Groups; Lattices; Gosset polytopes; Exceptionals Lie algebras;

Sumário

Lista de figuras