2
Modelagem da Não-Estacionariedade

Nas áreas mais diversas como na análise de séries temporais, teoria dos valores extremos e teoria de cópulas, assume-se geralmente que as observações, ou ao menos uma transformação apropriada delas constituem uma sequência estacionária de variáveis aleatórias.

A estacionariedade sempre desempenhou um papel importante no tratamento teórico de séries temporais. Por exemplo, a densidade espectral é definida para processos estacionários e o consagrado modelo auto-regressivo de média móvel (ARMA) é um modelo de séries temporais estacionário. Além disso, o pressuposto de estacionariedade é base para teoria assintótica geral, na qual o aumento da amostra traz mais informações do mesmo tipo, o que é fundamental para a teoria assintótica fazer sentido.

Por outro lado muitas séries demonstram um comportamento não-estacionário, e desta formal algumas técnicas simples, como utilizar as diferenças ou considerar períodos menores e estacionários das séries, tem sido utilizadas para tornar possível a análise através dos procedimentos estacionários.

Se abandonamos a suposição de estacionariedade, o número de modelos possíveis de serem utilizados em séries temporais explodem. Como exemplo, podemos utilizar modelos ARMA com coeficientes variando no tempo, e ainda neste caso o comportamento temporal dos coeficientes podem ser estimados de várias formas diferentes.

Neste contexto, e motivada pela crescente suposição de instabilidade nas características estocásticas dos retornos financeiros, assim como pelas consequências em se assumir estacionariedade quando essa não é uma característica razoável, Mikosch e Starica (2004) (32), Herzel *et al* (2004) (16), Starica e Granger (2005) (41), Andreou e Ghysels (2006) (7), utilizamos a metodologia estendida por Starica e Granger (2005) (41), (inicialmente proposta por Picard (1985) (37) e utilizada com algumas modificações em Kluppelberg e Mikosch (1996) (23)), cujo objetivo é identificar períodos estacionários em séries globalmente não-estacionárias, e aproximá-las por modelos localmente estacionários.

O método consiste resumidamente em identificar intervalos de homogeneidade (estacionários), no qual um determinado modelo estacionário descreve satisfatoriamente os dados. Para inferir sobre esses períodos utilizamos um teste de aderência para modelos lineares no domínio espectral, à luz da dinâmica de re-estimação de modelos após detecção de blocos não-estacionários, como proposto em Starica e Granger (2005) (41).

Na seção 2.1 fazemos uma breve revisão da literatura, trazendo um pouco da discussão que suporta as suspeitas sobre a quebra estrutural de séries temporais e como a falta de estacionariedade pode ser confundida por efeito de memória longa. Na seção 2.2 apresentamos a estatística de teste utilizada na identificação dos períodos homogêneos e por último na seção 2.3 apresentamos a dinâmica de identificação e delimitação dos blocos homogêneos.

2.1 Revisão da Literatura

Nos últimos anos diversos estudos foram conduzidos no sentido de se analisar as implicações de se ignorar mudanças estruturais de séries financeiras, tanto em questões mais teóricas da inferência estatística assim como em termos mais práticos como nas decisões sobre alocações de investimentos. Na inferência estatística, Diebold (1986) (12), Lamoureux e Lastrapes (1990) (25), Mikosch e Starica (2004) (32), Hillebrand (2005) (18) mostraram que ignorar mudanças estruturais em séries temporais financeiras pode resultar em estimativas espúrias dos parâmetros da volatilidade condicional, podendo sugerir um efeito GARCH Integrado ou de memória longa; podendo, como é mostrado em Andreou e Ghysels (2005) (4) e Mikosch e Starica (2004) (32), ter implicações nos momentos de maior ordem incondicionais, como a curtose e o índices de cauda, ou mesmo como em Pesaran e Timmermann (2003) (33), Starica e Granger (2005) (41) e Pesaran *et al* (2007) (34) afetando inclusive nas previsões.

No campo da economia existe uma vasta produção que reporta evidências empíricas de quebras estruturais em mercados financeiros, que afetam o retorno e a volatilidade de importantes indicadores financeiros, como evidencia Lamoureux e Lastrapes (1990) (25), Andreou e Ghysels (2006) (5), Horvath *et al* (2006) (19); tem implicações na alocação de ativos como investiga Pettenuzzo e Timmerman (2005) (36), na cauda da distribuição e nas medidas de risco como o Valor em Risco (VaR), e na perda esperada, discutido em Andreou e Ghysels (2005) (4), assim como nos modelos para risco de crédito e medidas de *default*, abordado em Andreou e Ghysels (2006) (6).

Já na área de probabilidade aplicada, estudos exploram a conexão entre não-estacionariedade e os modelos de memória longa, como pode ser visto em Boes e Salas-La Cruz (1978) (10), Potter (1976) (38), Bhattacharya *et al* (1983) (9), Anderson e Turkman (1995) (2) e Teverovsky e Taqqu (1997) (42); e está presente (um pouco menos intensamente) na literatura econométrica como nos estudos de Hidalgo e Robinson (1996) (17) e Lobato e Savin (1996) (30). Granger e Hyung (1999) (15) e Diebold e Inoue (2000) (13) por exemplo, investigam em um contexto econométrico a ligação entre a memória longa detectada e mudanças estruturais, procurando entender esta relação através de simples modelos econométricos com os parâmetros evoluindo no tempo.

Quando o enfoque são retornos financeiros, paralelamente à ampla utilização dos modelos condicionais auto-regressivos estacionários já consagrados na literatura; vem aumentando o número de estudos com evidências (empíricas) de falta de estacionariedade Hsu *et al* (1974) (20), em especial no segundo momento incondicional como discute Mikosch e Starica (2004) (32) e Starica e Granger (2005) (41).

2.2
Metodologia de Teste

Na literatura encontramos estudos que mostram claras evidências de mudanças nas características estocásticas em séries temporais financeiras reais, que tornam inviável a modelagem de longas séries financeiras por modelos GARCH, sendo essencial atualizar os parâmetros do modelo ajustado, indicando assim a necessidade em se ter ferramentas estatísticas para detectar quando essas atualizações devem ser feitas.

O periodograma integrado (e principalmente funções dele) vem sendo utilizado no intuito de se detectar mudanças na distribuição espectral de sequências estacionárias. A base para os resultados são teoremas do limite central para os periodogramas integrados com limite no campo gaussiano, encontrados em Kluppelberg e Mikosch (1996) (23) e Mikosch e Starica (2004) (32).

Vários autores vêm construindo teorias para o periodograma integrado e suas modificações. Em Kluppelberg e Mikosch (1996) encontramos a prova de teoremas que fundamentam o teste para detecção de mudanças em sequências lineares gerais com o quarto momento finito, o qual demostra ser a condição de momento ótima. Starica e Granger (2005) (41) apresentam uma versão modificada da estatística sugerida em Kluppelberg e Mikosch (1996), e estende a metodologia de forma a tornar dinâmico os modelos assumidos por cada bloco homogêneo. Nesta seção apresentamos sumariamente a estatística de teste utilizada em Starica e Granger (2005) (41), e indicamos uma possível extensão da estatística de teste construída.

Seja o periodograma integrado

$$\int_{-\pi}^{\lambda} I_{n,X}(y)f(y)dy, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi, \tag{2-1}$$

para uma função suave f e para o periodograma.

De acordo com Shumway e Stoffer (2000) (40) temos que o periodograma é dado por:

$$I_{n,X}(\lambda) = \frac{1}{n}\left|\sum_{t=1}^{n} x_t e^{-i\lambda t}\right|^2, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi \tag{2-2}$$

de uma amostra $X_1, \cdots, X_n$ de um processo linear com média μ

$$X_t - \mu = \sum_{-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j} = \psi_(B)Z_t, \quad t \in \mathbb{Z} \tag{2-3}$$

com a sequência de ruídos $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ de média zero e variância finita $var(Z_0) = \sigma^2 > 0$, e B representando o operador de atraso.

Processos do tipo (2-1) tem sido utilizados para detectar mudanças na função de distribuição espectral de amostras $X_1, \cdots, X_n$. Estatísticas de teste baseadas em (2-1) tem uma estrutura que é similar às estatísticas de teste do tipo Kormogorov-Smirnov. A idéia básica é re-normalizar o periodograma tal que:

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{t=1}^{n} X_t e^{-i\lambda t}\right|^2 \Big/ |\psi(e^{-i\lambda})|^2 \tag{2-4}$$

Recordando que periodograma é o estimador da densidade espectral $f_\psi(\lambda)$, e o termo $|\psi(e^{-i\lambda})|^2$ representa a essência de $f_\psi(\lambda)$ de um modelo linear geral, tal que:

$$f_\psi(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}|\psi(e^{-i\lambda})|^2 \tag{2-5}$$

torna-se clara as vantagens em se utilizar a forma padronizada do periodograma 2-4, tanto em termos interpretativos como termos assintóticos. Em termos interpretativos é possível visualizar facilmente o acesso aos desvios do espectro empírico comparado ao hipotético; já em termos assintóticos podemos ver que a distribuição desse termo independente da densidade espectral, ou seja, o caso não normalizado do periodograma estaria amarrado às possíveis hipóteses nulas.

2.2.1
Estatística de Teste Clássica

A estatística para testar se a sequência X de tamanho n é de fato gerada por um processo linear $\mathcal{M}_{\mu,\sigma^2,f_\psi}$ (modelo de média μ, variância σ^2 e densidade espectral f_ψ) é construída sob um caráter de teste de aderência, tomando a forma[1]:

$$B(n, X, \mathcal{M}_{\mu,\sigma^2,f_\psi}) = \sup_{\lambda\in[0,\pi]} \left| \int_{-\pi}^{\lambda} \left(\frac{I_{n,X}(y)}{|\psi(e^{-iy})|^2} - \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \right), dy \right| \tag{2-6}$$

Tal que $\hat{\sigma}^2$ é calculado como sendo:

$$\hat{\sigma}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{I_{n,X}(z)}{|\psi(e^{-iz})|^2} dz \tag{2-7}$$

A distribuição da estatística de teste foi obtida através de simulação e disponibilizada em Kluppelberg e Mikosch (1996) (23), sendo esta invariante aos processos geradores, dentro das classe dos modelos lineares. Os valores críticos para a estatística de teste são dados na tabela 2.1.

Tabela 2.1: Valores críticos da estatística de teste.

5%	10%	95%	99%
1.29	1.38	2.91	3.48

2.2.2
Estatística de Teste Robusta

Uma tentativa de se estender a estatística de teste de forma a induzir um caráter robusto foi desenvolvida, substituindo-se o desvio padrão utilizado (σ),

[1]A estatística apresentada aqui é uma modificação da sugerida por Starica e Granger (2005) (41), substituindo-se o periodograma por ele considerado pelo sugerido em Shumway e Stoffer (2000) (40)

pelo MAD (desvio absoluto mediano), uma alternativa robusta para estimar a variabilidade dos dados.

Obviamente a distribuição assintótica desta estatística de teste robusta, é diferente da estatística de teste clássica inicialmente apresentada. A distribuição foi obtida por simulação e os valores críticos para a estatística de teste robusta são apresentados na tabela 2.2.

Tabela 2.2: Valores críticos da estatística de teste robusta.

5%	10%	95%	99%
0.99	1.31	3.28	3.71

Podemos observar que a distribuição da estatística de teste robusta é levemente mais assimétrica à direita, resultando em valores críticos mais elevados.

Essa extensão robusta, sugerida para a estatística de teste, tem neste primeiro momento um intuito muito mais exploratório que inovador, uma vez que a preocupação aqui não é de estudar as propriedades nem verificar os pressupostos dessa nova estatística, e sim, comparar o desempenho da estatística proposta originalmente em diferentes cenários (capítulo 3) onde podem ser encontrados *outliers*, por exemplo.

2.3
Identificação dos Intervalos de Homogeneidade

A identificação dos intervalos de homogeneidade ao longo da série é efetuada através de testes de aderência para modelos lineares no domínio espectral utilizando as estatísticas apresentadas na seção 2.2. O objetivo é testar se em um intervalo os parâmetros do processo gerador dos dados não variam muito quando comparados aos parâmetros do modelo aproximado tomado como hipótese nula.

Basicamente a metodologia consiste em deixar os parâmetros (e consequentemente a média e variância) evoluírem temporalmente de acordo com uma função *step*, onde eles são constantes dentro do intervalo de homogeneidade (estacionário), e significativamente diferentes entre consecutivos intervalos de homogeneidade; assumindo desta forma, que as características estocásticas do processo gerador de X_t evoluem no tempo como um resultado de mudanças contínuas no mercado financeiro.

Considerando, por exemplo, que X_t é gerado por um ARMA(p,q) com parâmetros que são funções do tempo teríamos:

$$\Phi(t,B)[X_t - \mu_t] = \Theta(t,B)Z_t, \quad Z_t = \sigma_t \epsilon_t$$

Onde ϵ_t é i.i.d. com média zero e variância 1 e B é o operador de atraso. Nossa metodologia consiste em aproximar as funções $\Phi(t,B)$, $\Theta(t,B)$, μ_t e σ_t por funções *step*, constantes dentro do intervalo de homogeneidade definido.

Os intervalos de homogeneidade são construídos monitorando-se mudanças na função de distribuição espectral de X_t. Inicialmente começamos com um período/bloco estacionário $X_{m_1}, X_{m_{1+1}}, \ldots, X_{m_2}$ descrito por $\mathcal{M}_{\mu,\sigma^2,f_\psi}$ e verificamos se as p próximas observações $X_{m_{2+1}}, \ldots, X_{m_{2+p}}$ também pertencem a este intervalo de homogeneidade, testando a hipótese de o modelo linear $\mathcal{M}_{\mu,\sigma^2,f_\psi}$ também se ajustar bem aos dados $X_{m_{2+p-s}}, \ldots, X_{m_{2+p}}$, sub-amostra tamanho s que contém os p novos dados.

Com isso a inclusão no teste de apenas $(s-p)$ observações provenientes do bloco anterior (estacionário) é feita para que durante toda a varredura o teste não seja afetado pelo tamanho dos blocos antecessores (estacionários) de modelo $\mathcal{M}_{\mu,\sigma^2,f_\psi}$, penalizando assim com o mesmo rigor as próximas p observações. O tamanho s é mantido constante durante toda a varredura da série.

Neste teste a hipótese nula é que a sequência $X_{m_{2+p-s}}, \ldots, X_{m_{2+p}}$ é estacionária com modelo linear também descrito por $\mathcal{M}_{\mu,\sigma^2,f_\psi}$. Se o valor obtido pela estatística de teste encontra-se dentro do intervalo de confiança dado pela sua distribuição assintótica, então o intervalo de homogeneidade é estendido de forma a incluir as observações $X_{m_{2+1}}, \ldots, X_{m_{2+p}}$; caso contrário um novo intervalo de homogeneidade é iniciado pelo bloco $X_{m_{2+p-s}}, \ldots, X_{m_{2+p}}$, o modelo que descreve este novo bloco é re-estimado e o procedimento de construção dos intervalos de homogeneidade é reiterado.