5
Decisão Sob Incerteza

Os problemas de decisão sob incerteza são caracterizados pela necessidade de se definir valores de variáveis de decisão sem o conhecimento prévio da realização de parâmetros que, de alguma maneira, afetarão as conseqüências da decisão tomada. Neste sentido, as consequências de uma decisão não são determinísticas e, portanto, torna-se necessário expressar a satisfação, ou preferência, do decisor com relação às suas decisões. Neste sentido, de maneira usual, modelos de otimização estocástica são utilizados. Neste contexto, o modelo de otimização se diferencia do padrão em função de conter algum dos seus dados, variáveis aleatórias [13] [14].

Neste tipo de problema deve existir um subconjunto de variáveis de decisão (denominadas decisões de primeiro estágio) que são escolhidas antes das realizações das incertezas e variáveis de segundo estágio, que poderão ter seus valores selecionados após o conhecimento da realização dos parâmetros incertos. Neste tipo de modelo, denominado modelo de dois estágios, o que diferencia os estágios é justamente a posse da informação. Por exemplo, quando um gerador eólico assina um contrato de venda de longo prazo de energia, é obrigado a decidir o montante em que se comprometerá a entregar, mesmo sem saber quanto poderá gerar exatamente em cada mês; durante esta decisão, o gerador não possui a informação do perfil de geração e, portanto, é uma decisão de primeiro estágio (sob incerteza). Uma vez firmado o contrato e decidido o seu montante, este gerador pode, à medida que verifica os montantes produzidos em função da quantidade de vento, comprar a energia faltante ou vender o excedente no mercado de curto prazo. Estas decisões podem ser tomadas já com a informação da realização das incertezas (quantidades produzidas) e desta maneira, se caracterizam como decisões de segundo estágio.

Devido à complexidade destes problemas, uma forma tratável de abordá-los é através do uso de cenários, que basicamente são obtidos por procedimentos de simulação [35].

Neste trabalho, todas as variáveis aleatórias serão tratadas por meio ou através das suas aproximações discretas ou amostrais (cenários), e a geração desses cenários, apesar de impactar nos resultados dos modelos que serão apresentados e de serem de grande relevância para a tomada de decisão, não estão no escopo de contribuições deste trabalho. Nesta dissertação, estes cenários são consideradas como dados de entrada para os modelos de decisão que serão apresentados e suas origens serão apresentadas no decorrer do estudo de caso.

5.1
Medidas de Risco

Na gestão de risco uma medida bastante utilizada é o *Value-at-Risk* ou VaR. O VaR é a avaliação da potencial perda máxima a um especificado α nível de confiança que um investidor estaria exposto durante o período considerado. O VaR pode ser traduzido como a quantia que as perdas não se excederão em (1-α)% dos cenários.

Apesar de o VaR ser uma medida aceita e largamente utilizada no mundo corporativo (na gestão de riscos), ele sofre várias críticas do mundo acadêmico pois possui várias deficiências, sendo a principal, o fato de não apresentar subaditividade, isto é, o VaR de uma combinação de variáveis aleatórias pode ser maior do que a soma dos VaR de cada uma delas, o que torna o VaR uma medida de risco não coerente, (mais detalhes em [9]) . Além disto, o VaR também não traz nenhuma informação sobre as perdas maiores que o valor encontrado para o quantil 1-α [41], que muitas vezes podem ser catastróficas. O VaR também não possui propriedades desejáveis, como por exemplo, a diferenciabilidade e a convexidade, dificultando sua implementação em modelos de programação matemática.

Devido a estas desvantagens e dificuldades, foram apresentadas novas medidas para resolver problemas de portfolio, como a métrica de risco CVaR (Conditional Value at Risk), que tem sido largamente utilizada, e possui a grande propriedade de detectar a presença de eventos catastróficos na distribuição avaliada. O CVaR é considerado uma medida coerente de risco [9] e é mais pessimista que o VaR. É utilizado para medir perdas, e pode ser definido como o limite superior para a máxima perda permitida em problemas de portfolio. Assim como em [45], neste trabalho o CVaR será utilizado como medida de satisfação, sendo utilizado para limitar as perdas durante o processo decisório a partir da média dos (1-α)% piores cenários (lado esquerdo da distribuição).

Um grande benefício do uso do CVaR em relação ao VaR está na detecção das perdas máximas aceitáveis [36]. Pode acontecer de duas distribuições com o mesmo valor de VaR à α% possuir valores de CVaR à α% diferentes (menores ou iguais ao VaR, como pode ser visto na figura 5-1). Isso ocorre porque o CVaR pode também ser considerado como a perda média excedida do VaR, ou seja, ao nível de confiança de α% o CVaR será o valor esperado condicional às perdas de um portfolio, e estas perdas serão maiores ou iguais ao VaR [33].

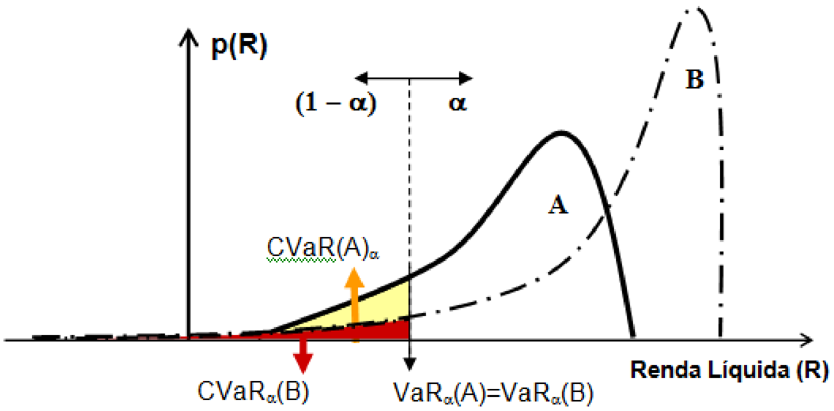

Figura 5-1 - Comparação de CVaR para duas distribuições com o mesmo valor de VaR (Fonte: Street [45])

Em [40] é proposto um modelo de otimização de portfolio que ao mesmo tempo calcula o VaR e otimiza o CVaR. Consideraram que o CVaR poderia ser minimizado de maneira eficiente através de métodos de programação linear, admitindo trabalhar com carteiras que possuem um grande número de cenários e incertezas. Tal metodologia minimiza o CVaR além de diminuir o VaR do portfolio, em termos de perdas esperadas no investimento.

O CVaR de uma variável aleatória discreta, $\tilde{R}$, com S (conjunto) cenários com probabilidade p_s cada (todas as variáveis aleatórias neste trabalho serão consideradas discretas e com cenários equiprováveis – oriundos de simulações de Monte Carlo) pode ser calculado pelo seguinte problema de otimização linear:

$$CVaR_{\alpha}(\tilde{R}) = \max_{(z,\delta_s)} z - \frac{1}{(1-\alpha)} \sum_{s \epsilon S} p_s \cdot \delta_s \quad (5\text{-}1)$$

$$\delta_s \geq 0, \forall\, s \,\epsilon\, S \quad (5\text{-}2)$$

$$\delta_s \geq z - \; R_s, \forall\, s \,\epsilon\, S \quad (5\text{-}3)$$

5.2 Otimização de Portfolio

Os problemas de otimização de carteiras de investimentos (portfolio de ativos) são de grande interesse tanto do mundo cientifico quanto do mundo corporativo e têm sido desenvolvidos pela literatura cientifica desde os anos 50, com a proposição de MARKOVITZ [32]. E desde então várias abordagens foram apresentadas para resolver tais problemas nos mais diversos campos.

Os modelos de otimização de portfolio visam minimizar o risco associado ao valor esperado do retorno do investimento. Neste trabalho, o retorno do modelo de comercialização será calculado pelo valor esperado do lucro do período que este compreende. O modelo de comercialização consistirá na compra e venda ótima de contratos e a modelagem do risco associado será abordada pela medida de risco CVaR, como foi feito no trabalho de STREET [45], no qual encontra um portfolio ótimo de contratos dadas duas fontes de energia, PCH e biomassa.

O trabalho de ROCKAFELLAR ET AL. [40], proporcionou que o CVaR pudesse ser escrito como um problema de programação linear e utilizado dentro do contexto da otimização de carteiras de investimentos.

Esta metodologia é desenvolvida para o caso de problemas de otimização de portfólio, que possui como função objetivo maximizar o retorno esperado com restrição de CVaR [37]. A formulação é mostrada abaixo:

$$\underbrace{\boldsymbol{Maximizar}}_{(x,\delta_s,z)} \sum_{n \in N} x_n \cdot \mu_n \quad (5\text{-}4)$$

$s.t.$:

$$z - \frac{1}{(1-\alpha)} \sum_{s \in S} p_s \cdot \delta_s \geq R \quad (5\text{-}5)$$

$$\delta_s \geq 0, \forall\, s \in S \quad (5\text{-}6)$$

$$\delta_s \geq z - \sum_{n \in N} x_n \cdot r_{n,s}, \ \forall \, s \in S \tag{5-7}$$

$$\sum_{n \in N} x_n = 1 \tag{5-8}$$

$$x_n \geq 0, \forall \, n \in N \tag{5-9}$$

Onde:

N: Número total de possíveis ativos para formar o portfólio;

x: Porcentagem aplicada em cada ativo *n;*

μ_n: Valor esperado do retorno do ativo *n;*

z: Variável que representa o VaR do portfolio ao nível de confiança α%;

α: Nível de confiança para os cálculos de VaR e CVaR;

S: Conjunto de cenários;

p_s: Probabilidade de ocorrência do cenário s;

δ: Variável auxiliar para o cálculo do CVaR;

R: Valor requerido pelo investidor;

r_s: Retorno do portfolio no cenário s.

As restrições (5-5), (5-6) e (5-7) são referentes ao cálculo do CVaR do portfolio que será limitado por um valor mínimo *R* requerido pelo investidor. O CVaR à nível de confiança de α% será o valor esperado condicional dos retornos menores ou iguais ao VaR.

Esta metodologia pode ser estendida e utilizada na maximização do lucro de compra e venda de contratos de energia.

Em [45] é utilizado o CVaR para otimizar carteiras de contrato de energia, e este foi associado às piores rendas líquidas de forma a expressar a idéia de limite inferior para a distribuição de probabilidade.