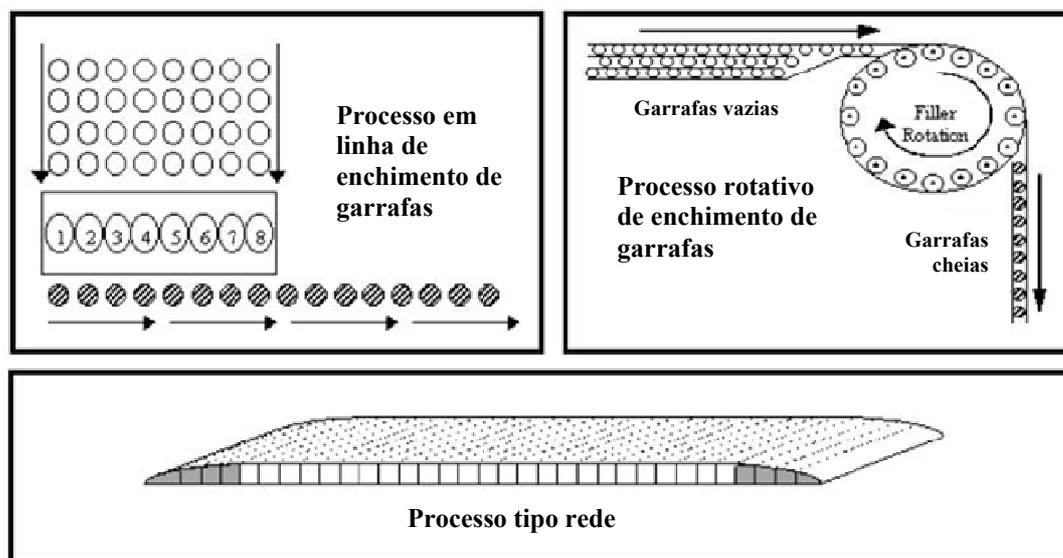


2

Fundamentação Teórica e Trabalhos Precedentes

Processos multicanal (PMC) são constituídos de vários fluxos ou canais individuais, que produzem um mesmo tipo de produto. Lanning et al. (2002) afirmam que há uma definição de processos multicanal contínuos que também deve ser considerada. Em processos contínuos, como um processo tipo rede, por exemplo, não há uma separação física entre os canais. Nesses casos específicos os canais podem ser “virtualmente” separados tomando-se medições em diversos pontos ao longo do processo, tal como ocorre em algumas etapas de fabricação de automóveis e aeronaves, galvanização do aço e na produção de papel. A Figura 2.1 ilustra alguns exemplos de PMC.



Fonte: Lanning et al. (2002)

Figura 2.1 – Exemplos de processos multicanal

Como reconhecido por vários autores, por exemplo, Montgomery (2004) e Mortell e Runger (1995), processos multicanal podem estar sujeitos a dois tipos de causas especiais de variação². Algumas causas podem fazer com que a saída de

² Causas de origem não aleatória, possivelmente ocasionadas pelo uso de matéria prima não pré-selecionada, deterioração do maquinário, entupimento de algum canal ou erros de manuseio do sistema pelo pessoal do chão de fábrica. Na presença de causas especiais de variação, o processo é considerado fora de controle.

um canal (ou de alguns canais) se afaste do valor alvo; nesse caso procura-se a causa atribuível que possa ter afetado um ou mais canais. Outras causas podem fazer com que as saídas de todos os canais se afastem do valor alvo, e nesse caso procura-se a causa atribuível que afetou todos os canais simultaneamente.

Antes de passar à descrição dos trabalhos precedentes na literatura para o controle de processos com múltiplos canais, é conveniente, para melhor entendimento do leitor, apresentar o esquema EWMA (e algumas de suas peculiaridades), que é empregado em vários desses trabalhos e também em gráficos propostos nesta tese.

2.1

O Esquema EWMA

Suponha que há retiradas *observações individuais* ($n=1$) de um processo *univariado* e que os dados gerados pelo processo sejam independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.; característica necessária para a utilização de gráficos de controle na versão Shewhart). Cada observação extraída, quando o processo está em controle, pode ser representada pelo seguinte modelo:

$$\eta_t = \mu + \varepsilon_t \quad (2.1)$$

onde μ é a média do processo e ε_t é o ruído do processo, i.i.d., de média nula ($E(\varepsilon_t) = 0$) e variância σ^2 .

Os gráficos de controle de Shewhart são lentos na detecção de alterações de magnitude pequena a moderada nos parâmetros do processo (média e dispersão). O gráfico de controle baseado na estatística EWMA (*Exponentially Weighted Moving Average*) desenvolvido por Roberts (1959) é mais sensível a tais alterações.

A partir do seu desenvolvimento, no contexto de CEP, outros pesquisadores dedicaram seus trabalhos para avaliar as propriedades de tal esquema, tais como Robinson e Ho (1978), Hunter (1986), Waldman (1986), Lucas e Saccucci (1987), Montgomery, Gardiner e Pizzano (1987) e Crowder (1987).

Então, de posse das observações extraídas do processo, a estatística EWMA de η_t é calculada pelo seguinte modelo:

$$Z_{\eta_t} = \lambda\eta_t + (1 - \lambda)Z_{\eta_{t-1}} \quad (2.2)$$

onde:

λ é a constante de amortecimento, tal que $0 < \lambda \leq 1$;

O valor inicial da estatística é usualmente representado pelo valor alvo do processo, i.e., $Z_0 = \mu_0$.

A estatística EWMA é de aplicação mais ampla que no contexto de CEP. Ela é muito usada na modelagem e previsão de séries temporais (ver, por exemplo, Box et al., 1994 e Montgomery, Johnson e Gardiner, 1990). Mostra-se que o amortecimento exponencial simples (EWMA) gera previsões ótimas para processos ARIMA(0, 1, 1). (Vide, por exemplo, Chatfield, 2004, p. 77). Ainda Chatfield et al. (2001) mostram que há muitos outros modelos de processos, além desse, para os quais o EWMA fornece previsões ótimas.

O gráfico de controle de Shewhart não é sensível a alterações pequenas em μ , porque um pequeno deslocamento da média ($\delta < 2$, onde $\delta\sigma$ é o deslocamento que a média sofre de μ_0 para μ_1) aumenta muito pouco a probabilidade de que o gráfico sinalize a alteração no processo (probabilidade na cauda além dos limites de controle). Como a estatística EWMA tem variância muito menor, sendo $\lambda/(2 - \lambda)$ vezes a variância das observações individuais ou da média dos subgrupos considerados, os limites de controle do gráfico EWMA são muito mais próximos da linha média (região de aceitação, “em controle”, muito mais estreita que o do gráfico de Shewhart), fazendo com que pequenos deslocamentos na média do processo sejam maiores em termos da distância entre os limites de controle e o gráfico demore menos a sinalizar. Assim, quanto menor o valor de λ , menor o fator $\lambda/(2 - \lambda)$, fazendo com que o gráfico de EWMA seja sensível a pequenas alterações. Em contrapartida, para alterações de grande magnitude, valores muito pequenos de λ tornam-se uma desvantagem, pois, dão pouco peso às observações mais recentes, a estatística tem inércia, demorando a atingir um valor que ultrapasse seu limite de controle.

Sabe-se que o valor de λ que minimiza o valor esperado do tempo (ou do número de amostras) até o sinal varia conforme a magnitude da alteração no parâmetro sendo controlado (média ou dispersão): quanto menor a magnitude da alteração, menor o valor de λ ótimo (veja, por exemplo, Lucas e Saccucci, 1990 e Costa et al., 2005).

Montgomery (2004) demonstra que, após desenvolver recursivamente o modelo da estatística EWMA (substituir sucessivamente $Z_{\eta_{t-j}}$, $j=1,2,\dots,t$, pelas suas respectivas equações obtidas em 2.2), tem-se que:

$$Z_{\eta_t} = \lambda \sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^j \eta_{t-j} + (1-\lambda)^t Z_0 \quad (2.3)$$

Os pesos $\lambda(1-\lambda)^j$ do conjunto das observações passadas decrescem exponencialmente, como uma série geométrica, em função do tempo.

Se as observações η_t são variáveis aleatórias independentes, com variância igual a σ_0^2 (processo em controle), então a variância amostral de Z_{η_t} pode ser expressa como a soma da progressão geométrica apresentada em (2.3), tornando-se igual a:

$$\begin{aligned} \sigma_{z_{\eta_t}}^2 &= \left(\frac{\lambda}{2-\lambda} \right) \text{Var}(\eta_t) \\ &= \left(\frac{\lambda}{2-\lambda} \right) [1 - (1-\lambda)^{2t}] \sigma_0^2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde a constante $\left(\frac{\lambda}{2-\lambda} \right) [1 - (1-\lambda)^{2t}]$ é a soma dos termos dessa progressão geométrica. Quando t aumenta (mais amostras), a constante $[1 - (1-\lambda)^{2t}]$ tende para a unidade e variância amostral, para seu limite assintótico, dado por:

$$\sigma_{z_{\eta_t}}^2 = \left(\frac{\lambda}{2-\lambda} \right) \sigma_0^2 \quad (2.5)$$

É usual expressar a distância dos limites de controle à linha média (μ_0 ; valor-alvo do processo em controle) como um múltiplo K do desvio-padrão de Z_{η_t} , onde K é o fator de abertura dos limites de controle. Então, os limites de controle do gráfico de EWMA podem ser expressos por:

$$LSC_Z = \mu_0 + K \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right) [1 - (1-\lambda)^{2t}]} \quad (2.6)$$

$$LIC_Z = \mu_0 - K \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right) [1 - (1-\lambda)^{2t}]} \quad (2.7)$$

Quando $\lambda = 1$, observa-se que os limites do gráfico de controle de EWMA são equivalentes aos limites de Shewhart, o que faz sentido, pois a estatística Z_{η_t} se reduz ao valor de η_t .

Montgomery (2004) afirma que o gráfico de controle de EWMA é um esquema de controle ideal para ser usado com observações individuais, pois é robusto à hipótese de não-normalidade dos dados. O uso mais comum deste gráfico é para o controle de observações individuais, pelo motivo de a estatística EWMA já ser uma média (média móvel ponderada, com pesos de progressão geométrica). No entanto, tal esquema pode ser também aplicado ao controle de médias amostrais. No caso de se trabalhar com subgrupos de tamanho n , η_t deve ser substituído por $\bar{\eta}_t$ e σ_0 por σ_0/\sqrt{n} nas fórmulas acima definidas.

Costa et al. (2005) relatam que a eficiência de um gráfico de controle é medida pela rapidez com que o dispositivo de controle detecta alterações no processo. A medida de desempenho mais comumente usada que avalia essa rapidez é o NMA (Número Médio de Amostras até a detecção, ou ARL: *Average Run Length*). O NMA_0 , ou NMA sob controle, é o valor esperado do número de amostras até um alarme falso quando o processo encontra-se em controle. Na presença de causas especiais de variação, quando o processo sai de controle, o número médio de amostras até o alarme verdadeiro é chamado de NMA_1 . O desvio-padrão do comprimento de corrida (RL) é denominado SDRL; como não existe uma nomenclatura para esta medida de dispersão, utilizar-se-á SDRL (termo em inglês).

Contudo, mesmo conhecendo a média e o desvio-padrão da estatística Z_t , e sabendo que ela segue uma distribuição normal, não é possível (contrariamente ao que ocorre com os gráficos de Shewhart) determinar o valor do fator K em (2.6) e (2.7) que fornece um valor especificado para NMA_0 pela inversa da distribuição

normal (em outras palavras, K difere de $z_{\alpha/2}$, onde $\alpha = 1/NMA_0$), devido à autocorrelação entre sucessivos valores de Z_t . Assim, o valor de K que, para um dado valor de λ , garante o NMA_0 especificado deve ser obtido através de buscas por simulação, ou por Cadeias de Markov (veja Brook e Evans, 1972 e Borrór et al., 1998) ou por equações integrais (veja Baker, 1977 e Crowder, 1987).

Os esquemas EWMA podem ser bilaterais (constituídos por dois limites de controle: LSC e LIC) ou unilaterais (constituídos por LSC ou LIC). Um esquema unilateral superior (utilizando apenas o LSC) é utilizado quando há interesse em detectar aumentos nos parâmetro (média ou dispersão da característica de qualidade) do processo. De forma análoga, um esquema unilateral inferior (utilizando apenas o LIC) é utilizado quando há interesse em detectar reduções no parâmetro monitorado. Para o controle da dispersão, o aumento significa uma deterioração e redução significa melhora na qualidade. Já os esquemas bilaterais são utilizados quando tanto o aumento como a redução em algum parâmetro são indesejáveis (por exemplo, no caso de variações na média de um processo).

Para os esquemas EWMA unilaterais pode ser utilizada uma “barreira refletora” como um instrumento para minorar o problema de inércia da estatística EWMA, que é mais grave quando tal estatística estiver abaixo do valor-alvo (no caso do esquema unilateral superior), ou acima do valor-alvo (no caso do esquema unilateral inferior). Em tais casos, sem a utilização de uma “barreira refletora”, a estatística demoraria um tempo maior (mais amostras) até cruzar o limite de controle.

É importante ressaltar que, embora a “barreira refletora” altere a distribuição da estatística EWMA, pode-se, opcionalmente, ainda assim representar o limite de controle em função dos parâmetros da distribuição da estatística EWMA não limitada por tal “barreira” (veja Crowder e Hamilton, 1992). O valor de K , que já não é obtido invertendo a função de distribuição acumulada de Z_t , se ajusta à dinâmica da estatística em função da existência da “barreira refletora”.

A seguir, serão descritos os trabalhos precedentes na literatura para CEP Multicanal, incluindo aqueles que empregam a estatística EWMA em seus modelos.

2.2

Trabalhos Precedentes – Visão Geral

Esta seção apresenta uma visão geral dos esquemas de controle propostos na literatura para o monitoramento de PMC. Nas seções 2.3 a 2.6 serão detalhados os esquemas mais relevantes para o desenvolvimento desta tese.

Descritos nos trabalhos de Nelson (1986), de Pyzdek (1992) e de Montgomery (2004), os gráficos de controle de grupos (GCG) de Boyd (1950) estão entre as técnicas estatísticas mais utilizadas para o controle de PMC; a técnica consiste em marcar, em um único gráfico, apenas os valores extremos (máximo \bar{X}_i , mínimo \bar{X}_i e máximo R_{ij} , onde o índice indica o canal) das estatísticas amostrais obtidas nos diversos canais a cada instante de tempo; se estas estatísticas estiverem dentro dos limites de controle, as demais também estarão. A metodologia destes gráficos será discutida adiante.

Uma das idéias que se tinha anteriormente ao trabalho de Boyd (1950) era a utilização simultânea de gráficos de controle estilo Shewhart para cada fluxo separado, o que conduz a um número proibitivamente grande de gráficos de controle, caso fossem monitorados um número razoavelmente grande de canais. Quando os canais do sistema apresentam um alto grau de correlação (correlação quase perfeita), o controle do processo pode ser realizado monitorando-se apenas um único canal, mas essa é uma situação pouco freqüente em sistemas de produção. Outra idéia era a aplicação de gráficos de controle multivariados ao monitoramento de processos com canais múltiplos. Embora seja uma alternativa viável, um dos maiores problemas que traria ao ambiente produtivo seria a identificação correta do canal afetado.

Nelson (1986) propôs um novo esquema de corridas para o gráfico de controle de grupos de Boyd (1950), tornando-o mais sensível a alterações em apenas um dos canais. Tal proposta é detalhada na Seção 2.2.

Alguns pesquisadores se dedicaram a elaborar novos esquemas para o controle estatístico de processos multicanal. O Quadro 2.1 mostra uma lista dos trabalhos correlatos conhecidos já realizados até a elaboração desta tese.

Quadro 2.1 – Trabalhos na literatura de PMC

Estilo Shewhart	Boyd (1950) Nelson (1986) Mortell e Runger (1995) Runger et al. (1996) Lanning et al. (2002) Passos (2005) Liu et al. (2008) Meneces et al. (2008) Barbosa (2008)
Estilo EWMA	Mortell e Runger (1995) Runger et al. (1996) Amin e Li (2000) Xiang e Tsung (2008)

Mortell e Runger (1995) apresentaram um novo modelo matemático para processos multicanal, decompondo a fonte de variação de um processo em duas componentes distintas: uma fonte comum a todos os canais e outra referente à variação individual de cada um dos canais do processo. Uma linha de trabalhos mais recentes começando por Mortell e Runger (1995) reconhece essas características e procura desenvolver esquemas de controle mais sensíveis a esses dois tipos de causas especiais, por meio de estatísticas que sejam afetadas por uma ou por outra isoladamente, tais como as técnicas estatísticas apresentadas no próprio trabalho citado (Mortell e Runger, 1995) e nos trabalhos de Runger et al. (1996) e Barbosa (2008).

Mortell e Runger (1995) preconizam o uso de dois gráficos de controle para o monitoramento das componentes de variação do modelo elaborado para PMC. Para o controle da componente comum a todos os canais do processo, propõem adotar um gráfico de médias de todos os canais, mais sensível a causas especiais de variação que afetam todos os canais simultaneamente. Tal gráfico seria um gráfico de \bar{X} convencional, ou EWMA, ou CUSUM, ou um gráfico qualquer para processos autocorrelacionados dependendo da dinâmica do nível médio de todos os canais no processo particular em questão.

Para o monitoramento da segunda componente de variação, i.e., controle da causa especial de variação que afeta os canais individualmente, um gráfico de controle baseado na amplitude entre os canais (gráfico de controle de R_i) é discutido e analisado. A estatística a ser considerada nesse gráfico de controle é a

diferença entre o valor máximo e o mínimo observado nos diversos canais (quando são extraídas observações individuais de cada um dos canais), ou a diferença entre o valor máximo e o mínimo das médias calculadas para cada um dos canais (para dados subgrupados³).

No mesmo trabalho, Mortell e Runger (1995) propõem também o gráfico de controle de R_t na versão EWMA, amortecendo exponencialmente a estatística de controle, com o intuito de obter sinalizações mais rápidas contra alterações de magnitude pequena a moderada na média de componentes individuais do processo.

Com a definição de um novo modelo matemático mais eficiente para o controle de processo multicanal, Runger et al. (1996) propuseram dois novos gráficos de controle baseados na técnica multivariada de Análise de Componentes Principais. Tal técnica multivariada foi anteriormente explorada para a construção de gráficos de controle por Jackson (1980, 1985 e 1991) e Schall e Chandra (1987).

O primeiro gráfico de controle multivariado destina-se a detectar as causas especiais que afetem simultaneamente todos os canais do sistema. Neste esquema estatístico, o controle da variável é realizado utilizando a primeira componente principal; tal componente é a combinação linear de maior poder de explicação da estrutura de variabilidade dos dados originais e consiste simplesmente na média de todos os canais do sistema. Este primeiro gráfico, portanto, coincide com o primeiro gráfico recomendado por Mortell e Runger (1995), para o monitoramento das causas especiais que afetem a todos os canais simultaneamente. A primeira componente principal foi utilizada anteriormente em gráficos de controle por Pignatiello e Runger (1990) e Hawkins (1993) contra alterações de mesma magnitude em muitas variáveis.

O segundo gráfico de controle monitora as causas especiais que afetem os canais individualmente. Runger et al. (1996) ao propor tal esquema de controle, provaram que um esquema de controle baseado na estatística T^2 de Hotelling das últimas $c-1$ componentes remanescentes corresponde a um gráfico de controle de S^2 estilo Shewhart; tal esquema de controle é mais sensível contra causas

³ Os subgrupos são conjuntos de dados gerados por um único canal quase num mesmo instante de tempo. Por exemplo, considere um processo composto por três canais ($c=3$), com retiradas de amostras de duas unidades ($n=2$) de cada um dos canais do processo. Nesse caso, há três subgrupos de tamanho dois.

especiais que afetem a uniformidade entre os canais do sistema (Montgomery, 2004). Para adquirir maior sensibilidade a alterações de pequena magnitude na média, os autores propõem ainda o mesmo gráfico de controle multivariado em estilo EWMA, semelhante ao proposto por Lowry et al. (1992): o esquema de controle de S^2 MEWMA para o monitoramento da média das componentes individuais.

Amin e Li (2000) desenvolveram um esquema de controle MaxMin EWMA para o *controle univariado* da média e da dispersão em um único gráfico. Esse esquema proposto é um gráfico de controle com limites de tolerância⁴ amortecidos; é uma extensão natural do gráfico proposto por Howell (1949), que propôs o esquema MaxMin estilo Shewhart. Embora não tenha sido projetado para processos multicanal, o esquema foi adaptado para tal finalidade; contudo, os resultados obtidos pelo esquema não foram comparados aos resultados dos esquemas de controle propostos para processos que sejam bem representados por um modelo matemático formal para PMC, o que dificulta a conclusão sobre o esquema mais eficiente.

Por não desenvolver um modelo matemático formal para PMC, nem seguir o modelo proposto por Mortell e Runger (1995), o trabalho de Amin e Li (2000) não será considerado nessa tese, mas fica registrado como um dos trabalhos de *CEP univariado* que pode ser desenvolvido posteriormente para CEP multicanal.

Lanning et al. (2002) estudaram alguns processos produtivos compostos por um grande número de canais idênticos e independentes. Neste trabalho consideraram que não existe uma causa especial que afete um único canal individualmente, pois se essa causa ocorresse, ela não é considerada relevante. Como não há variação individual dos canais, propuseram um gráfico de controle adaptativo univariado. Utilizaram gráficos de controle de média e desvio-padrão na versão Shewhart, conjugados a um esquema VSSI (*Variable Sample Size and Interval*), variando tanto o número de canais amostrados no processo quanto o tempo em que ocorre o processo de amostragem.

⁴ Os limites de tolerância são os limites que incluem uma proporção específica da população alvo em um dado nível de confiança (α). Em CEP, tais limites são usados para corroborar a análise dos limites de controle, reafirmando o estado de controle do processo.

O princípio de variação consiste na amostragem de uma fração dos c canais em um espaço regular de tempo, sendo esta fração aumentada, e o tempo entre retiradas de amostras reduzido, quando a posição da estatística no gráfico (ainda entre os limites de controle) aumenta a suspeita de que possam estar presentes causas especiais de variação que afetem a média do processo. Por não considerar que os canais podem ser afetados individualmente (i.e., só existe uma componente de variação em comum), nem tratar um modelo matemático formal para processos multicanal, essa abordagem não se aplica ao tipo de processo que está sendo considerado nesta tese. Na verdade, as observações nos diversos canais são tratadas como uma amostra de um processo univariado, e o esquema VSSI empregado é o esquema adotado para processos univariados (Reynolds, 1989; Prabhu et al., 1994; Costa, 1997).

Portanto, os esquemas de controle fracionários e adaptativos não serão discutidos, mas ficam registrados para o desenvolvimento de pesquisas futuras, como uma das possíveis extensões ao tema que será aqui apresentado.

Passos (2005) aplicou um gráfico de controle de grupos (GCG) em um processo real que apresentava correlação cruzada entre os canais. Uma situação peculiar do processo analisado é que os diversos canais do sistema apresentavam diferentes valores médios e variâncias, e nem havia a possibilidade de ajuste individual desses canais, por se tratar de mangueiras que podiam ser no máximo substituídas. Entretanto, segundo a empresa em análise, a capacidade do processo era alta, o que naturalmente já reduz a chance da produção de não-conformes pelo sistema.

De forma semelhante ao observado por Mortell e Runger (1995), as observações obtidas dos canais são decompostas em duas componentes de variação distintas (uma, representando um nível-base com uma dinâmica e outra, representando a diferença individual de cada canal em relação ao nível-base) e um ruído aleatório. Através de tal decomposição foi eliminada a correlação cruzada existente entre os canais (decorrente da componente comum de variação), fazendo com que cada uma das componentes apresente apenas autocorrelação.

No monitoramento da componente do nível-base (i.e., controle das causas especiais que afetam simultaneamente todos os canais) um par de gráficos de Shewhart foi adotado. O par adotado consiste de um gráfico de controle para

observações individuais (gráfico de X) e de um gráfico de controle para amplitude móvel (MR – *moving range*) das médias dos c canais.

Para o monitoramento da segunda componente, outro par de gráficos foi adotado: um GCG das observações individuais (GCG de X) e um gráfico de controle de MR das diferenças de cada canal em relação à média (nível-base estimado) de todos os canais. Tal par de gráficos foi mencionado (não foi detalhado, nem o desempenho foi analisado) como um esquema de controle alternativo ao gráfico de controle de R_t por Mortell e Runger (1995).

Outra peculiaridade do processo considerado era a presença de correlação serial das diferenças em relação ao nível-base, o que de início poderia inviabilizar o uso dos GCG tradicionais de Boyd (1950). Para tal situação, foi realizada uma adaptação dos gráficos tradicionais, alterando as fórmulas de cálculo dos limites de controle de forma a considerar a correlação existente. A questão de correlação serial das diferenças em relação ao nível-base não foi considerada no esquema proposto por Mortell e Runger (1995), o que não tornaria viável a sua aplicação no processo em questão. As medidas de desempenho e a formulação analítica dos gráficos de controle de grupos aplicados por Passos (2005) não foram obtidas.

Outra característica marcante do processo analisado por Passos (2005) era o fato de as médias e as variâncias das componentes individuais (diferenças entre cada canal e o nível-base) serem distintas de canal para canal. Este é um fator complicador para a definição do esquema de CEP. A solução adotada foi calcular os limites de controle que cada componente teria, com base em sua média e variância, e adotar, para o GCG, o maior dos limites superiores e o menor dos limites inferiores assim obtidos. Porém, Passos (2005) sugeriu para o desenvolvimento de pesquisas futuras, como uma alternativa GCG adotado, um GCG das diferenças padronizadas (com média igual a zero e desvio-padrão igual a um) de cada canal em relação ao nível médio do processo. Neste esquema podem ser adotados limites de controle com fatores de abertura (K , distância entre o limite superior ou inferior de controle e a média em termos do desvio-padrão) equivalentes para qualquer número de canais.

Liu et al. (2008) propuseram uma abordagem diferenciada para processos multicanal, ao utilizarem dois novos gráficos de controle para monitorar canais múltiplos baseados na metodologia de Análise de Variância. Um forte apelo dos gráficos de controle propostos é que podem ser adotados com ou sem a realização

da Fase I, isto é, não há necessidade da estimação prévia dos parâmetros do processo para a determinação dos limites de controle. Para um bom desempenho (detecção rápida das mudanças nas médias dos canais do processo), tais gráficos devem ser utilizados em conjunto com os gráficos de controle de \bar{X} e S.

O primeiro gráfico de controle é baseado na estatística de Fisher-Snedecor, para o controle de processos com variância desconhecida, projetados para detectar diferenças entre os canais individualmente. Existem situações em que podem ser feitas hipóteses alternativas mais específicas, desde que, em muitos processos de produção é razoável que se assuma a ocorrência de alterações em somente um canal por vez. O segundo gráfico de controle é proposto para tais situações, projetados para detectar alterações em um canal específico. Este gráfico é baseado no teste de razão de verossimilhança. Embora este esquema de controle seja mais robusto para o controle do processo, ele é recomendado somente quando há um número grande de canais, ou quando podem ser obtidas muitas observações em cada um dos canais; essa não é a situação real em muitos processos produtivos, que em sua grande maioria são automatizados e não é possível a retirada de mais de uma amostra ao mesmo tempo.

Meneces et al. (2008) propuseram um gráfico de controle individual, na versão Shewhart, para cada um dos canais do processo. A estatística de controle utilizada é a diferença do canal em relação à sua própria média. Os limites de controle dos gráficos foram estabelecidos para uma determinada probabilidade de alarme falso ($\alpha = 0,0027$), para diferentes níveis de correlação cruzada e diferentes números de canais. Além disso, a análise dos efeitos da amostragem parcial nos limites de controle também foi contemplada no trabalho. Foram avaliadas também as vantagens e desvantagens desses gráficos em relação aos GCGs de Boyd (1950) e ao gráfico de controle de R_t de Mortell e Runger (1995).

A pesquisa contemplou dois casos distintos. No primeiro deles, existe a possibilidade de retirada de amostras de todos os canais do sistema para o cálculo da estatística de controle. No segundo caso, contempla os sistemas constituídos de um número grande de canais, onde não é possível a retirada de amostras de todos eles num mesmo instante de tempo. Nesse último caso, um esquema de amostragem parcial é necessário, selecionando-se quais os canais que serão amostrados num mesmo instante.

Nesse trabalho, Meneces et al. (2008) reafirmam que o uso de esquemas individuais para o controle de cada canal fornece maior informação sobre a causa especial de variação; quando o processo encontra-se fora de controle o canal afetado é facilmente identificado, tomando-se imediatamente as ações necessárias para restaurar o estado de controle do processo. Além dessa afirmação, através das análises realizadas, os autores concluíram que ao se utilizar gráficos individuais para o controle de PMC é possível distinguir facilmente as causas especiais que afetam individualmente os canais das causas especiais que afetam todos os canais simultaneamente.

É importante ressaltar que a utilização de gráficos de controle para cada canal individual pode levar a um número proibitivamente grande de gráficos de controle, caso o processo seja constituído de um número grande de canais, situação muito freqüente na prática. O uso de gráficos de controle individualmente para cada canal é válido somente para os casos em que o processo é constituído por poucos canais.

A pesquisa de Barbosa (2008) obteve analiticamente os limites de controle do gráfico de controle de grupos das diferenças de cada canal em relação ao nível-base, na versão Shewhart. Após o cálculo dos limites de controle, foi analisada a eficiência do gráfico na detecção de alterações na média de um canal individual. Foram obtidas ainda as medidas de desempenho desse esquema e comparadas com as medidas obtidas através do esquema de Mortell e Runger (1995). A proposta é que tal gráfico seja utilizado em conjunto com um gráfico de controle da média de todos os canais para o monitoramento do nível-base (componente comum a todos os canais) da mesma maneira que o recomendado em Mortell e Runger (1995) e em Runger et al. (1996). Da mesma maneira que realizada nestes trabalhos, esse gráfico não foi analisado, por reduzir-se a algum esquema pré-existente de CEP.

Foi observado na pesquisa de Barbosa (2008) que há uma sensibilidade maior do GCG das diferenças em relação ao nível-base se comparado ao esquema de controle da amplitude amostral (R_t) proposto por Mortell e Runger (1995), contra alterações na média das componentes individuais de variação com magnitude maior que um desvio-padrão. Entretanto, ambos os esquemas se mostram insensíveis a alterações na média de magnitude menor que um desvio-

padrão, tal como o comportamento já esperado para esquemas de controle estilo Shewhart.

Há expectativa de que, ao se aplicar um esquema de controle de EWMA ao GCG das diferenças em relação ao nível-base (DNB), o gráfico torne-se mais sensível a alterações de pequena magnitude na média das componentes individuais do processo. Além disso, espera-se também que a sinalização seja ainda mais rápida que as sinalizações dos esquemas de Mortell e Runger (1995) e de Runger et al. (1996) contra uma determinada faixa de alterações na média. A extensão natural do gráfico de controle de grupos das diferenças em relação ao nível-base para um esquema de controle na versão EWMA e a obtenção dos seus projetos ótimos são dois dos objetivos dessa tese.

Xiang e Tsung (2008) trabalharam com uma abordagem totalmente diferente das utilizadas nos trabalhos anteriores. Apresentaram um novo método para o controle estatístico de processos multiestágio, que foi aplicado ao controle de processos multicanal, utilizando-se de um GCG de EWMA dos erros de previsão um passo à frente. Ao utilizar tal GCG, o problema de monitoramento de processos de múltiplos estágios tornou-se equivalente ao problema de monitoramento de processos com múltiplos canais idênticos, para situações que envolvam alteração na média dos canais. Contudo, o GCG desenvolvido é aplicado a um modelo linear de espaços de estados, dedicado à representação de processos multiestágio. O algoritmo EM (*Expectation-Maximization*) foi utilizado para obter as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros desse modelo. As medidas de desempenho não foram comparadas com nenhum outro trabalho referenciado a processos multicanal.

Como Xiang e Tsung (2008) não desenvolveram um modelo matemático para processos multicanal, nem trabalharam com as características levantadas pelo modelo proposto por Mortell e Runger (1995), esse trabalho foge do escopo desta pesquisa e não será aqui apresentado. É importante lembrar que a maioria dos esquemas de controle de processos multicanal mais eficiente já desenvolvida é aplicada a processos representados pelo modelo de Mortell e Runger (1995).

Não há trabalhos na literatura de CEP multicanal, aplicados a processos bem representados pelo modelo matemático de PMC de Mortell e Runger (1996) ou por algum outro tipo de modelo matemático formal para PMC, que relatem a utilização de gráficos de controle para o *monitoramento da dispersão* de

componentes individuais dos canais. A proposta de gráficos de controle para a dispersão, as suas extensões naturais para esquemas de EWMA e a obtenção dos seus projetos ótimos também são objetivos dessa tese, como será visto nos próximos capítulos.

As propostas de Boyd (1950), Mortell e Runger (1995), Runger et al. (1996) e Barbosa (2008) serão discutidas com maiores detalhes adiante, por serem relevantes para a continuidade desta tese. Embora não exista uma mesma notação nos trabalhos existentes na literatura, tais trabalhos serão mostrados seguindo uma única notação, para facilitar o leitor.

2.3

Os Gráficos de Controle de Boyd (1950)

No monitoramento de um processo multicanal a utilização simultânea de vários gráficos de controle para cada fluxo separado é pouco viável quando o processo é constituído de um número grande de canais; a dificuldade dada à sobrecarga da manutenção, exibição e à interpretação simultânea dos diversos gráficos de controle aumentaria conforme a quantidade de canais presentes no sistema.

Boyd (1950) propôs uma alternativa viável ao uso simultâneo de diversos gráficos de controle, introduzindo uma nova forma de monitoramento de processos multicanal, os gráficos de controle de grupos (*Group Charts*). Eles consistem basicamente na plotagem de todas as informações necessárias para o monitoramento dos canais do processo em apenas um gráfico de controle, o que leva a uma maior facilidade de elaboração e interpretação dos gráficos. Tais gráficos foram tão bem aceitos que até hoje são encontrados como um procedimento padrão para o controle estatístico de processos multicanal (veja Pyzdek, 1992 e Montgomery, 2004).

O monitoramento é realizado através da plotagem dos valores extremos da estatística de controle, entre todos os canais analisados. Ou seja, consistem basicamente na plotagem dos valores máximos e dos mínimos calculados (no caso de dados subgrupados) ou observados (para observações individuais) pelas amostras extraídas dos canais. Se o valor máximo da estatística de controle for

maior que o limite superior de controle, ou o valor mínimo for menor que o limite inferior de controle, há uma forte indicação de descontrole no processo.

A figura 2.2 mostra um exemplo de um gráfico de controle de grupos, considerando um processo composto por apenas 3 canais. As séries pontilhadas não são plotadas no gráfico, estão presentes somente para ilustrar a idéia de superposição de gráficos de controle.

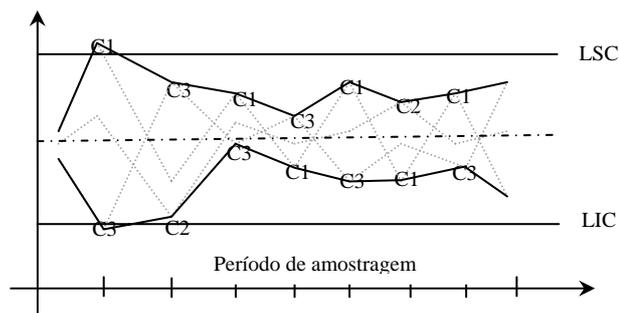


Figura 2.2 – GCG proposto por Boyd (1950)

Como medida de cautela, é aconselhável identificar o canal correspondente a cada valor extremo plotado no gráfico de controle, para facilitar na identificação dos canais que podem estar em descontrole. Por exemplo, na Figura 2.2, observa-se facilmente que os canais 1 (valor máximo ultrapassa o LSC) e 3 (valor mínimo ultrapassa o limite inferior de controle) estão em descontrole no primeiro período de amostragem.

O conceito de “*Group Chart*” introduzido por Boyd (1950) é bem amplo. Tais esquemas de controle podem ser aplicados tanto ao monitoramento da média quanto ao da dispersão. Não há trabalhos na literatura, de conhecimento do autor da tese, que analise o desempenho de tais gráficos contra alterações na dispersão.

Para identificar corretamente as origens das causas especiais, facilitando na solução do problema de descontrole, Pyzdek (1992) afirma que é importante distinguir entre dois tipos de causas especiais diferentes que podem aparecer em um processo multicanal: as causas que podem afetar todos os canais, afastando-os do valor-alvo, das causas especiais que podem afetar um ou poucos canais. Essas causas possuem diferentes origens, e conhecê-las previamente facilita o entendimento do processo antes de se aplicar qualquer ferramenta estatística de CEP em processos multicanal.

Os gráficos de controle de grupos propostos por Boyd (1950) podem realizar controle simultâneo das duas causas especiais comuns a PMC. O critério utilizado na detecção de mudança do nível-base (afastamento de todos os canais do valor-alvo) é a existência de pontos excedendo os limites de controle do gráfico. Em relação às causas especiais que ocorrem individualmente nos canais, a sensibilidade do gráfico é reduzida se baseada somente nesse critério de detecção.

Nelson (1986) propõe uma regra suplementar de decisão para análise do comprometimento de desempenho de um canal em particular, baseado em um critério de corridas. O critério é particularmente simples; verifica-se o descontrole do processo por meio de uma série significativamente longa de valores extremos proveniente de um mesmo canal. A interpretação do descontrole no processo é realizada pela observação da leitura máxima ou mínima (r) produzida por um determinado canal.

Na Tabela 2.1, Pyzdek (1992) mostra o número de valores extremos consecutivos de um simples canal que sinaliza um problema de descontrole. O valor do comprimento de corrida significativo é determinado em função do número de canais (c) presentes em um processo. Por exemplo, um canal será declarado fora de controle se apresentar valores extremos por cinco vezes consecutivas, em um processo composto por três canais.

Tabela 2.1 – Comprimento de corrida significativo para um único canal

Número de canais (c)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Comprimento de corrida significativo (r)	7	5	5	4	4	4	4	4	3	3	3

Fonte: Pyzdek (1992)

Nelson (1986) descreve como obter o NMA_0 de um processo com c canais idênticos para diferentes valores de r (comprimento de corrida significativo para identificar um canal em descontrole). O número médio de amostras, quando o processo está em controle, necessárias para gerar uma sequência de r valores máximos (ou mínimos) para um mesmo canal é obtido na seguinte forma matemática:

$$NMA_0 = \frac{c^r - 1}{c - 1} \quad (2.8)$$

Embora o procedimento proposto por Nelson (1986) seja útil para a tomada de decisão ao identificar comportamentos atípicos nos gráficos de controle de grupos (GCG), a sua aplicação é limitada ao caso de alterações em apenas um canal do processo. Quando mais de um canal sofre alteração simultaneamente, os valores extremos podem se alternar entre esses canais, impedindo que sejam identificados os canais alterados; a alternância dos valores entre os canais pode ser um empecilho à formação de uma seqüência suficientemente longa (r) de máximos ou mínimos oriundos de um mesmo canal.

Montgomery (2004) relata outra desvantagem em relação ao critério de corridas, o fato de o NMA_0 calculado ser discreto. Na literatura, os valores mencionados como aceitáveis para o NMA_0 praticamente pertencem à faixa compreendida entre 200 e 500 amostras, porém os valores calculados com base no critério de corridas fogem deste padrão. Na Tabela 2.2 o valor de NMA_0 é obtido em função do número c de canais no processo, considerando diversos valores de r (seqüência de valores máximos ou mínimos consecutivos de um mesmo canal).

Então, para um processo com 20 canais é esperado que em um único canal seja obtida uma seqüência de 3 valores extremos a cada 421 amostras, quando o processo encontra-se sob controle.

Com os valores apresentados nesta tabela, é possível afirmar que um dos maiores problemas que podem ser encontrados utilizando o critério proposto por Nelson (1986) é a escolha dos parâmetros com base no Comprimento de Corrida Significativo (r), pois, dependendo do número de canais do processo, pode não haver nenhum valor de r que leve ao NMA_0 na faixa mencionada. Valores muito pequenos de NMA_0 são indesejáveis; Valores grandes de NMA_0 não são indesejáveis em si, mas podem ser acompanhados de valores de NMA_1 inaceitavelmente grandes.

Tabela 2.2 – Valores de NMA_0 obtidos para diferentes comprimentos de corridas pelo critério de corridas proposto por Nelson (1986)

Número de canais (c)	Comprimento de Corrida Significativo (r)					
	2	3	4	5	6	7
2	3	7	15	31	63	127
3	4	13	40	121	364	1093
4	5	21	85	341	1365	5461
5	6	31	156	781	3906	19531
6	7	43	259	1555	9331	55987
7	8	57	400	2801	19608	137257
8	9	73	585	4681	37449	299593
9	10	91	820	7381	66430	597871
10	11	111	1111	11111	111111	1111111
15	16	241	3616	54241	813616	12204241
20	21	421	8421	168421	3368421	
30	31	931	27931	837931		
50	51	2551	127551			
100	101	10101				

Fonte: Mortell e Runger (1995)

Por exemplo, considere o NMA_0 igual a 200 amostras. Verifica-se que na maioria dos casos (número de canais) o critério de corridas acima estabelecido não obtém nem o valor exato requerido, nem algum valor próximo a esse valor nominal de 200 amostras. Agora considere ainda um processo composto por 20 canais. Os valores calculados mais próximos do valor nominal de 200 amostras são de 421 e 8421 amostras. Portanto, se for adotado um comprimento de corridas que fornece algum desses valores nominais, aumentará consideravelmente o tempo de sinalização de alterações pelo GCG. Por outro lado, se a opção for pelo comprimento de corridas que fornece o menor NMA_0 calculado, de 21 amostras, aumentará consideravelmente a taxa de alarmes falsos.

Em suma, dependendo do número de canais do processo, pode não haver nenhum valor de r que garanta um bom desempenho em controle e fora de controle.

Há determinadas características do processo que devem ser avaliadas antes da adoção do GCG proposto por Boyd (1950). O processo não deve apresentar autocorrelação serial ou correlação cruzada entre canais, e todos os canais devem ser ajustados em um mesmo valor-alvo e, quando em controle, distribuídos da mesma forma (mesma média e mesma variância). Embora tais premissas sejam necessárias para um bom desempenho dos gráficos de controle, não são verificadas na maioria das situações práticas.

Pyzdek (1992) ressalva que, para um processo com média não constante entre canais, pode ser construído um GCG para as diferenças de cada canal em relação a sua respectiva média. Contudo, a amplitude das amostras obtidas nos diversos canais do sistema deve permanecer constante. Quando tais diferenças são significativas, um dos canais pode ser muito diferente dos demais, e este sempre produzirá valores extremos, o que pode esconder algumas mudanças eventualmente sofridas por outros canais do sistema.

Embora os GCGs constituam uma alternativa viável para monitorar simultaneamente diversos canais do processo, podem tornar-se uma ferramenta de aplicação limitada quando o processo é composto por muitos canais, pois será necessária a coleta de todas as amostras provenientes de todos eles. Entretanto, Ott e Snee (1973) mencionaram como solução para esse problema a escolha alternada das observações de apenas partes dos canais, de forma cíclica.

2.4

A proposta de Mortell e Runger (1995)

Depois de estudada a metodologia dos gráficos de Boyd (1950), Mortell e Runger (1995) afirmaram que tais gráficos de controle não são eficazes para detectar alterações em canais individuais quando a variabilidade em controle do nível médio dos canais (nível-base) é maior do que a variabilidade adicional de cada canal individual. Então, desenvolveram um novo modelo matemático para processos multicanal, atribuindo a fonte de variação do processo a duas componentes distintas: uma componente comum a todos os canais e outra referente à variação individual de cada um dos canais do processo.

Este foi o primeiro trabalho publicado que modelou explicitamente as duas fontes independentes de variação em processos multicanal. Uma linha de trabalhos posteriores, dedicados ao controle de processos multicanal, procurou desenvolver novos gráficos de controle para processos bem representados pelo modelo matemático desenvolvido. De acordo com o modelo proposto por Mortell e Runger, cada observação do processo é modelada na seguinte forma:

$$X_{ijk} = \mu + A_i + e_{ijk} \quad (2.9)$$

onde

X_{tjk} é a variável aleatória que representa o valor esperado da k-ésima observação contida no canal j obtida no instante t;

μ é a média global do processo (constante);

A_t é variável aleatória que representa a variação do nível-base do processo, normalmente distribuído com média igual a zero e variância igual a σ_a^2 . É a parcela de variação que é comum a todos os canais;

e_{tjk} é a variável aleatória que representa a componente individual de cada canal. Esta é independente e normalmente distribuída com média igual a zero e variância igual a σ^2 .

Com base nesse modelo, eles propuseram um conjunto de dois novos gráficos para o controle de processos bem representados pelo modelo.

Para o controle das causas especiais que afetem o nível-base (A_t), propuseram utilizar a média de todos os canais ($x_t = \sum_{j=1}^c x_{tj} / c$) como estatística, a ser controlada com algum gráfico adicional (\bar{X} , EWMA, CUSUM ou algum gráfico para o controle de resíduos obtidos após ajustar um modelo de séries temporais, no caso da presença de autocorrelação no nível-base, por exemplo).

Os limites de controle desse gráfico são mais estreitos que os limites do GCG, para um determinado NMA_0 , tornando uma ferramenta mais sensível contra causas especiais que afetem simultaneamente todos os canais do processo. De fato, um GCG tem os limites de controle baseados na variância da estatística considerada, neste caso $V(x_{ij})$. De acordo com o modelo apresentado na equação (2.9), a variância da estatística de controle do GCG é igual a $V(x_{ij}) = \sigma_a^2 + \sigma^2/n$,

onde $x_{ij} = \sum_{j=1}^c x_{tjk} / c$. Já a estatística de controle x_t tem variância obtida por $V(x_t) = \sigma_a^2 + \sigma^2/nc$, que é menor que a variância de x_{ij} (tais expressões são utilizadas para o caso mais genérico de subgrupos, para observações individuais basta considerar $n=1$).

Mortell e Runger (1995) não analisaram o desempenho do gráfico de controle para o nível-base, seu trabalho foi focado no controle das causas especiais que afetem individualmente os canais do processo (i.e., alterações nos parâmetros individuais e_{ij} 's). Para esse controle, propuseram um gráfico do tipo de Shewhart baseado na amplitude das médias dos canais no instante t , R_t .

Depois de analisado o desempenho desse novo gráfico, perceberam que é pouco sensível a alterações de magnitudes menores no processo, tal como os gráficos de Shewhart tradicionais. Então, propuseram uma extensão natural ao gráfico de controle de R_t , desenvolvendo o mesmo gráfico nas versões EWMA, CUSUM e utilizando esquemas *Runs rules*. Destes esquemas desenvolvidos somente as versões Shewhart e EWMA serão descritas, pela relevância destes gráficos na tese.

Os gráficos de controle de R_t nas versões Shewhart e EWMA serão melhor detalhados a seguir.

2.4.1

Gráfico de R_t tipo Shewhart

A estatística de controle do gráfico de controle tipo Shewhart proposto é a amplitude amostral, definida por:

$$R_t = \text{Max}(x_{ij}) - \text{Min}(x_{ij}) \quad (2.10)$$

onde:

$\text{Max}(x_{ij})$ é o valor máximo obtido dentre as médias de todos os canais;

$\text{Min}(x_{ij})$ é o valor mínimo obtido dentre as médias de todos os canais.

Expandindo x_{ij} de acordo com (2.9), tem-se:

$$\begin{aligned} R_t &= \text{Max}(\mu + A_t + e_{ij}) - \text{Min}(\mu + A_t + e_{ij}) \\ &= \text{Max}(e_{ij}) - \text{Min}(e_{ij}) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Portanto, a componente do nível-base é anulada no cálculo da estatística e a variância da estatística x_{ij} torna-se menor, o que estreita mais os limites de controle do gráfico de R_t que os limites do gráfico de controle de grupos.

Assim, o gráfico de controle de R_t é mais sensível que os GCG de Boyd (1950) à ocorrência de causas especiais que afetem individualmente os canais; alterações no nível-base (A_t) não afetam o desempenho do gráfico.

Desta forma, quanto maior for a variação nas médias dos canais (σ_a^2) em relação à variação individual de cada canal (σ^2) melhor será o desempenho do gráfico de controle de R_t em relação ao GCG.

Como alternativa ao gráfico de R_t , Mortell e Runger (1995) sugeriram controlar o resíduo máximo, extraído da diferença entre a média global (X_t) de todos os canais e a máxima média observada entre os canais, $\text{Max}(X_{ij})$. A condição de verificação de descontrole no processo é a mesma dos GCG's: se o resíduo máximo estiver abaixo do limite superior de controle, todos os outros resíduos (dos outros canais) também estarão. Análise semelhante pode ser realizada para o resíduo mínimo, que deve ser diretamente comparado ao limite inferior de controle do gráfico. Tal como realizado nos gráficos de controle de Boyd (1950), não há necessidade de se plotar todos os canais na construção do gráfico, somente sendo considerados os resíduos máximos e mínimos; este esquema pode ser encarado como um GCG dos resíduos.

Assim como o gráfico de R_t , tal esquema alternativo proposto no trabalho de Mortell e Runger (1995) também é destinado à detecção de alterações nas componentes individuais do processo (causas especiais que afetam os canais individualmente) a medida que isola os termos dos e_{ij} 's no cálculo da estatística de controle, tornando a variância da estatística dos resíduos menor que a variância de x_{ij} . Da mesma forma que ocorre no gráfico de R_t , as variações na parcela comum referente ao nível-base (A_t) não afetam o desempenho do gráfico.

O desenvolvimento de tal gráfico alternativo não foi mostrado no trabalho de Mortell e Runger (1995); eles deixaram somente a idéia. Um gráfico de controle semelhante foi posteriormente aplicado a um caso real de PMC por Passos (2005). Neste trabalho, já mencionado anteriormente, a idéia de Mortell e Runger (1995) teve que ser adaptada, pois os canais, além de apresentarem médias e variâncias diferentes, apresentaram autocorrelação serial (trata-se de um processo real, em que os e_{ij} 's não eram i.i.d.) características estas não estudadas por Mortell e Runger (1995).

O gráfico de controle de grupos dos resíduos foi estudado por Barbosa (2008), que estabeleceu matematicamente seus limites de controle e analisou seu desempenho na sinalização de causas especiais que afetem individualmente os canais do processo.

Para avaliar o desempenho do gráfico de R_t , Mortell e Runger (1995) obtiveram o limite superior de controle para um NMA_0 de 200 amostras diretamente dos valores tabelados da Distribuição Acumulada da Amplitude Relativa (W) apresentados no trabalho de Pearson e Hartley (1996), em função do total do número de canais (c) que compõe o processo produtivo por eles analisado. No entanto, expressando a distância do limite superior de controle à linha média (representada por $d_2\sigma$) como um múltiplo de K_{mru} do desvio-padrão de R_t , onde K_{mru} é o fator de abertura do limite de controle, pode-se obter uma expressão para tal limite que garante o NMA_0 especificado.

Portanto, sabendo que $\sigma(R_t) = d_3\sigma$, o limite superior de controle pode ser expresso por:

$$LSC_{R_t} = (d_2 + K_{mru}d_3)\sigma_0/\sqrt{n} \quad (2.12)$$

onde:

d_2 e d_3 são constantes determinadas pelo número total de canais no processo;

σ_0/\sqrt{n} é o desvio-padrão do processo em controle.

Para trabalhar diretamente com os valores da Distribuição Acumulada da Amplitude Relativa, basta considerar para (2.12) que:

$$(d_2 + K_{mru}d_3) \approx F_{w,s}^{-1}(1 - \alpha) \quad (2.13)$$

onde $F_{w,s}$ representa a função acumulada da amplitude relativa, tal que $w = R/\sigma$.

Os valores tabelados são apresentados no trabalho de Pearson e Hartley (1996).

Um valor de R_t maior que o limite superior de controle é uma forte evidência da presença de uma causa especial de variação atuando sobre algum (ou alguns) dos canais do processo individualmente. Nesse caso deve ser realizada uma intervenção no processo visando localizar a causa especial e restabelecer o estado de controle estatístico.

Nas análises de desempenho, Mortell e Runger (1995) confirmaram que o gráfico de controle de R_t sinaliza mais rápido (valores menores de NMA_1) as alterações na média do processo que os GCG propostos por Boyd (1950).

Contudo, por mais que o gráfico de controle de R_t tenha valores menores de NMA_1 que os GCG, ainda é pouco sensível a alterações de magnitudes menores que 2σ , tal como o comportamento esperado para gráficos de controle tipo Shewhart. Para aumento da sensibilidade do gráfico contra tais alterações na média do processo, Mortell e Runger (1995) propuseram aplicar um esquema EWMA e um esquema CUSUM ao gráfico de controle de R_t . O esquema CUSUM foge do escopo desta tese, portanto não será aqui apresentado. O esquema EWMA será apresentado logo a seguir.

2.4.2

Gráfico de controle em estilo EWMA

A estatística de controle EWMA de R_t para o monitoramento das componentes individuais é dada por:

$$Z_{R_t} = \lambda R_t + (1 - \lambda) Z_{R_{(t-1)}} \quad (2.14)$$

onde λ é a constante de amortecimento do modelo, tal que $0 < \lambda \leq 1$.

O valor inicial adotado para a estatística EWMA (Z_0) é usualmente o valor-alvo ou valor médio em controle de R_t , dado por $d_2\sigma$. No trabalho de Mortell e Runger (1995) há um erro conceitual, ou “cochilo” na redação, ao se considerar que o valor inicial da estatística EWMA é igual a zero.

No trabalho, Mortell e Runger (1995) obtém o limite de controle que produz o NMA_0 específico de 200 amostras por simulação, para cada quantidade específica de canais considerada.

No entanto, como usualmente adotado na literatura, a distância do limite de controle à linha média (representada por $d_2\sigma/\sqrt{n}$) pode ser expressa como um múltiplo K_{mru} do desvio-padrão de Z_{R_t} , onde K_{mru} deve ser obtido por busca, garantindo o NMA_0 desejado, com o valor de λ utilizado. A Seção 2.1 discute essa questão.

Considerando que as amplitudes móveis (R_t) são variáveis aleatórias independentes, a variância amostral de Z_{R_t} pode ser expressa como uma soma de uma progressão geométrica (estatística EWMA de R_t desenvolvida recursivamente). Logo, o desvio-padrão torna-se igual a:

$$\sigma(Z_{R_t}) = d_3 \sigma \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)} \quad (2.15)$$

Portanto, de forma semelhante ao realizado em (2.6), o limite superior de controle do gráfico EWMA de R_t pode ser expresso na seguinte forma:

$$LSC_{Z_{R_t}} = \left(d_2 + K_{mru} d_3 \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} \right) \sigma_0 / \sqrt{n} \quad (2.16)$$

Um valor de Z_{R_t} maior que o limite superior de controle é interpretado como evidência da presença de uma causa especial de variação atuando sobre algum (ou alguns) dos canais do processo individualmente.

Nas análises foi observado que o gráfico de controle de EWMA de R_t apresentou melhor desempenho na detecção de pequenas mudanças quando são utilizados valores menores para a constante de amortecimento, enquanto apresentava melhor desempenho contra alterações maiores quando são utilizados valores maiores de constante de amortecimento.

Uma linha de trabalhos posteriores procurou criar novos esquemas para o controle das componentes estudadas no modelo de Mortell e Runger (1995) para representar processos multicanal.

2.5

A proposta de Runger, Alt e Montgomery (1996)

Runger et al. (1996) estendem o conceito de análise multivariada a processos multicanal, considerando-o como um caso particular de processos multivariados. Uma das propostas para CEP multivariado é usar a técnica multivariada de Análise de Componentes Principais (Jackson, 1980, 1985 e 1991, e Schall e Chandra, 1987). Baseados nisso, Runger et al. (1996) apresentam uma nova forma de monitoramento dos processos multicanal descritos por Mortell e Runger (1995). A forma matricial do modelo de Mortell e Runger (1995) é a seguinte:

$$\mathbf{X}_t = A_t \mathbf{1} + \mathbf{E}_t \quad (2.17)$$

onde

\mathbf{X}_t é um vetor $c \times 1$ das observações de todos os canais no instante t ;

$\mathbf{1}$ é um vetor de dimensão $c \times 1$ com todas as componentes iguais a 1;

A_t é uma variável aleatória (escalar) que representa a componente de variação comum a todos os canais, e que pode ser i.i.d. ou possuir alguma dinâmica, conforme cada processo particular;

\mathbf{E}_t é um vetor $c \times 1$ de variáveis aleatórias independentes e normalmente distribuídas, com média igual a 0 e variância igual a σ^2 . Representa a variação individual de cada canal.

Ao compreender um PMC como um caso particular de processos multivariados, pode-se definir a matriz de covariâncias dos dados observados nos c canais de um processo na seguinte forma:

$$\Sigma = \sigma_A^2 \mathbf{1}\mathbf{1}^T + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (2.18)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade $c \times c$.

Os autovalores de Σ são $\sigma_A^2 + \sigma^2$ e σ^2 . Os autovetores correspondentes são $\mathbf{1}(1/c^{1/2})$ e algum outro conjunto de $c-1$ vetores ortonormais que são ortogonais a $\mathbf{1}$.

Os coeficientes da combinação linear que corresponde à i -ésima componente principal são obtidos pelo autovetor (normalizado) correspondente ao i -ésimo maior autovalor de Σ . A primeira componente principal é a combinação linear de *maior poder de explicação* da estrutura de variabilidade dos dados originais do processo. A segunda componente principal é a combinação linear de \mathbf{X} que possui a maior variabilidade dentre as combinações lineares com o vetor de coeficientes ortogonal a primeira componente. Analogamente, definem-se as componentes remanescentes.

O primeiro gráfico de controle desenvolvido baseado na técnica de ACP monitora a primeira componente principal ($U_1 = \mathbf{1}^T \mathbf{X} / c^{1/2}$), que é a combinação linear de maior explicação da estrutura de variabilidade dos dados originais. Numa perspectiva multivariada, este esquema de controle foi proposto por

Pignatiello e Runger (1990) e Hawkins (1993) para detectar alterações iguais em todas as variáveis do processo.

Ao trabalhar essencialmente com a média de todos os canais, Runger et al. (1996) afirmam que o esquema de controle baseado na primeira componente é sensível a causas especiais que afetem simultaneamente todos os canais, de forma semelhante ao gráfico de monitoramento do nível-base sugerido por Mortell e Runger (1995). O desempenho desse gráfico para o controle do nível-base do processo não foi analisado por Runger et al. (1996), por tratar-se de um gráfico, em qualquer caso, já conhecido e largamente analisado na literatura, como um gráfico de \bar{X} ou de observações individuais (X), ou EWMA de \bar{X} ou de X , ou CUSUM de \bar{X} ou de X , ou um gráfico para o controle de resíduos de algum modelo de série temporal aplicado a U_1 .

Runger et al. (1996) desenvolveram um gráfico de controle baseado na estatística T^2 de Hotelling⁵ das $c-1$ componentes remanescentes, na versão Shewhart, para a detecção das causas especiais que afetem individualmente os canais do processo.

Devido à ortogonalidade dos vetores das componentes principais, uma causa especial que afeta a média de todos os canais não exerce nenhum efeito sobre o gráfico de controle projetado para as $c-1$ componentes remanescentes. Da mesma forma, uma causa especial que afeta a média de X de um vetor num subespaço de $c-1$ componentes remanescentes não exerce nenhum efeito sobre o gráfico de controle baseado na primeira componente principal (U_1).

Foram realizadas análises de desempenho para o gráfico de controle de T^2 em questão sem compará-lo a nenhum outro esquema de controle, e foi constatado que ele é pouco sensível a alterações de pequena magnitude no processo, tal como os gráficos de Shewhart tradicionais. Então, uma extensão natural ao gráfico de controle de T^2 foi proposta, desenvolvendo o mesmo gráfico em estilo MEWMA (versão EWMA multivariada).

Os gráficos de controle de T^2 e MEWMA serão detalhados a seguir.

⁵ Estatística de controle utilizada para o monitoramento da média em processos multivariados; o gráfico de controle baseado nesta estatística foi desenvolvido por Hotelling (1947).

2.5.1

Gráfico de controle de T^2 das $c-1$ componentes remanescentes

Considere uma matriz \mathbf{G} de dimensão $c \times c$, cujas colunas são iguais aos autovetores de Σ . Seja \mathbf{G}_1 o vetor de dimensão $c \times 1$ formado pela primeira coluna de \mathbf{G} e \mathbf{G}_2 a matriz de dimensão $c \times (c-1)$ formada pelas $c-1$ colunas remanescentes. Então, $\mathbf{U}_2 = \mathbf{G}_2^T \mathbf{X}$ contém as $c-1$ componentes remanescentes, com matriz de covariâncias igual a $\sigma^2 \mathbf{I}$.

O gráfico de controle de \mathbf{U}_2 é baseado na estatística T^2 de Hotelling das $c-1$ componentes principais remanescentes. Para o monitoramento de \mathbf{U}_2 , o gráfico qui-quadrado é utilizado. Tal procedimento é padrão e foi desenvolvido por Hotelling (1947) para o controle simultâneo de um número grande de variáveis em um mesmo gráfico. A estatística de controle do gráfico de qui-quadrado é determinada por:

$$\begin{aligned} S^2 &= \mathbf{U}_2^T (\sigma^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{U}_2 \\ &= \mathbf{X}^T \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_2^T \mathbf{X} / \sigma^2 \end{aligned} \quad (2.19)$$

A matriz $\mathbf{G}_2 \mathbf{G}_2^T$ formada nesse termo quadrático é uma projeção ortogonal num subespaço das $c-1$ componentes remanescentes. Então, a matriz $\mathbf{G}_2 \mathbf{G}_2^T$ pode ser representada pela matriz $(\mathbf{I} - \mathbf{G}_1 \mathbf{G}_1^T)$. Tal matriz é equivalente a uma matriz centrada definida por $\mathbf{H} = \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}{c} \right)$, onde c é o número total de canais do processo.

Então, desenvolvendo o termo quadrático $\mathbf{G}_2 \mathbf{G}_2^T$ em função da matriz centrada \mathbf{H} , a seguinte estatística de controle é obtida:

$$\begin{aligned}
S^2 &= \mathbf{X}^T \mathbf{H} \mathbf{X} / \sigma^2 \\
&= \mathbf{X}^T (\mathbf{I} - \mathbf{1}\mathbf{1}^T / c) \mathbf{X} / \sigma^2 \\
&= \sigma^{-2} (\mathbf{X}^T \mathbf{X} - \mathbf{X}^T \mathbf{1}\mathbf{1}^T \mathbf{X} / c) \\
&= \sigma^{-2} \sum_{i=1}^c (X_{ii} - \bar{X}_i)(X_{ii} - \bar{X}_i)^T \tag{2.20}
\end{aligned}$$

A estatística acima obtida é proporcional à variância de \mathbf{X}_t . Analisando um processo multicanal como um caso particular de um processo multivariado, a estatística S^2 pode ser reescrita na forma de:

$$S^2 = \sigma^{-2} \sum_{i=1}^c (X_{ii} - \bar{X}_i)^2 \tag{2.21}$$

Runger et al. (1996) desenvolveram analiticamente a estatística de controle e descobriram que o gráfico de controle proposto baseado na estatística T^2 de Hotelling das $c-1$ componentes remanescentes é equivalente a um gráfico de controle de S^2 .

Esse esquema de controle, embora seja bem conhecido na literatura, é muito pouco utilizado no controle de processos produtivos. A indústria prefere, pela facilidade de interpretação, o gráfico de controle de S , que é equivalente ao S^2 . A estatística S e os limites de controle do gráfico de S (caso se utilizem limites probabilísticos, que correspondam a uma probabilidade pré-específica de alarmes falsos) são exatamente a raiz quadrada da estatística S^2 e dos limites de controle do gráfico de S^2 , respectivamente. A sensibilidade de ambos os gráficos é a mesma contra alterações no processo.

Então, provada a equivalência do gráfico de controle sugerido em relação a um gráfico de S^2 clássico de Shewhart, é observada uma maior sensibilidade deste esquema contra alterações na uniformidade dos canais. Claramente, alterações no nível-base não afetam o desempenho do esquema de controle de S^2 , tal como já determinado pela ortogonalidade das componentes principais envolvidas.

O limite superior de controle é determinado com base na distribuição amostral da estatística de controle. A estatística S^2 segue uma distribuição qui-quadrada com $c-1$ graus de liberdade, quando o processo está isento de causas

especiais de variação. Então, o limite superior de controle deste gráfico é determinado por:

$$LSC_{RAM} = \chi_{c-1, \alpha}^2 \quad (2.22)$$

onde α é a probabilidade de sinalizar descontrole, quando o processo está sob controle.

Quando o gráfico sinaliza algum descontrole ($S^2 > LSC_{RAM}$), há fortes evidências que uma causa especial pode ter afetado a média de um ou mais canais, individualmente. Se o processo estiver fora de controle, S^2 tem uma distribuição qui-quadrado não-central com $c-1$ graus de liberdade, cujo parâmetro de não-centralidade é determinado por:

$$\begin{aligned} \nu &= \sigma^{-2} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_2^T \boldsymbol{\mu} \\ &= \sigma^{-2} \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{I} - \mathbf{G}_1 \mathbf{G}_1^T) \boldsymbol{\mu} \\ &= \sigma^{-2} \sum_{i=1}^c (\mu_{ii} - \bar{\mu}_i) (\mu_{ii} - \bar{\mu}_i)^T \end{aligned} \quad (2.23)$$

Portanto,

$$\nu = \sigma^{-2} \sum_{i=1}^c (\mu_{ii} - \bar{\mu}_i)^2 \quad (2.24)$$

A análise de desempenho do gráfico S^2 revelou sua baixa sensibilidade a alterações de pequena magnitude na média do processo, tal como o comportamento esperado para um gráfico de Shewhart. Então, para garantir uma maior sensibilidade do gráfico de controle contra tais alterações, um esquema MEWMA S^2 foi proposto para o controle das $c-1$ componentes remanescentes, como será mostrado logo a seguir.

2.5.2

Gráfico de controle MEWMA das $c-1$ componentes remanescentes

Observadas as limitações de desempenho do gráfico S^2 contra alterações de pequena magnitude na uniformidade dos canais, a sua extensão natural é proposta por Runger et al. (1996) ao aplicar um esquema EWMA multivariado ao gráfico S^2 .

De forma análoga ao usualmente realizado para o gráfico de Shewhart univariado, o desempenho do gráfico de S^2 pode ser melhorado (tornando-o mais sensível a alterações de pequena magnitude), pela incorporação do esquema de controle de MEWMA (*Multivariate Exponentially Weighted Moving*) ao monitoramento. Este é o mesmo gráfico de controle proposto por Lowry et al. (1992) para processos multivariados.

Para esse esquema de controle, os dados são primeiramente amortecidos e depois aplicados à estatística S^2 . A estatística de controle de U_2 é calculada na seguinte forma:

$$Z_{RAM_t} = \mathbf{Z}_t^T(\mathbf{U}_2) \Sigma_Z^{-1} \mathbf{Z}_t(\mathbf{U}_2) \quad (2.25)$$

onde:

$\mathbf{Z}_t(\mathbf{U}_2)$ representa a estatística EWMA das $c-1$ componentes remanescentes, definida por $\mathbf{Z}_t(\mathbf{U}_2) = \mathbf{G}_2 \mathbf{Z}_t^T(\mathbf{X})$;

$\mathbf{Z}_t(\mathbf{X})$ representa a estatística EWMA das observações originais;

Σ_Z é a matriz de covariâncias assintóticas da estatística de controle determinada por $\Sigma_Z = [\lambda/(2-\lambda)]\Sigma$.

Então, de forma análoga a (2.20), a estatística de controle é obtida analiticamente pela simplificação abaixo:

$$\begin{aligned} Z_{RAM_t} &= \left[\frac{(2-\lambda)}{\lambda\sigma^2} \right] \mathbf{Z}_t^T(\mathbf{X}) \mathbf{G}_2^T \mathbf{G}_2 \mathbf{Z}_t^T(\mathbf{X}) \\ &= \left[\frac{(2-\lambda)}{\lambda\sigma^2} \right] \mathbf{Z}_t^T(\mathbf{X}) (\mathbf{I} - \mathbf{G}_1 \mathbf{G}_1^T) \mathbf{Z}_t^T(\mathbf{X}) \\ &= \left[\frac{(2-\lambda)}{\lambda\sigma^2} \right] \mathbf{Z}_t^T(\mathbf{X}) \mathbf{H} \mathbf{Z}_t^T(\mathbf{X}) \\ &= \left[\frac{(2-\lambda)}{\lambda\sigma^2} \right] \sum_{i=1}^c (Z_{ti} - \bar{Z}_t)(Z_{ti} - \bar{Z}_t)^T \end{aligned} \quad (2.26)$$

No artigo de Runger et al. (1996) há uma divergência em relação à equação acima, por causa de um erro na obtenção da inversa da matriz de covariâncias da estatística Z_{RAM_t} (definida no artigo por W_t). Os autores esquecem a inversão da constante $\lambda/(2-\lambda)$.

Esta tese traz a estatística calculada de forma correta e os projetos ótimos obtidos para o gráfico de controle de MEWMA de S^2 . Runger et al (1996) não obtiveram os projetos ótimos para o gráfico de controle multivariado proposto. Os valores apresentados no artigo foram obtidos diretamente de Lowry et al. (1992).

Outro erro encontrado no artigo de Runger et al, 1996, é que os valores de NMA_1 não são os mesmos obtidos por Lowry et al, 1996, para o caso de limites estabelecidos com a matriz de covariâncias assintóticas ($\Sigma_Z = [\lambda/(2-\lambda)]\Sigma$). Os valores mostrados no artigo coincidem com os valores de NMA_1 obtidos por Lowry et al. (1996) para o caso de limites estabelecidos com a matriz de covariâncias exatas.

Então, a estatística de controle definida em (2.26) pode ser reescrita por:

$$Z_{RAM_t} = \left[\frac{(2-\lambda)}{\lambda\sigma^2} \right] \sum_{i=1}^c (Z_{ti} - \bar{Z}_t)^2 \quad (2.27)$$

O desempenho do gráfico de controle é função unicamente de $\boldsymbol{\mu}$ (vetor de médias) pelo parâmetro de não-centralidade, determinado por:

$$\begin{aligned} \nu &= \sigma^{-2} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_2^T \boldsymbol{\mu} \\ &= \sigma^{-2} \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{I} - \mathbf{G}_1 \mathbf{G}_1^T) \boldsymbol{\mu} \\ &= \sigma^{-2} \sum_{i=1}^c (\mu_{ii} - \bar{\mu}_t) (\mu_{ii} - \bar{\mu}_t)^T \end{aligned} \quad (2.28)$$

Portanto,

$$\nu = \sigma^{-2} \sum_{i=1}^c (\mu_{ii} - \bar{\mu}_t)^2 \quad (2.29)$$

Para determinar o limite superior de controle que fornece o NMA_0 especificado, Runger et al. (1996) recomendam buscá-lo por simulação. No trabalho, eles não formulam o limite de controle.

Os gráficos de S^2 e de MEWMA de S^2 são mais eficazes, em termos da sinalização de alterações no processo, quando o número de canais afetados no sistema aumenta até um número de $c/2$ canais.

2.6

A proposta de Barbosa (2008)

Mortell e Runger (1995) sugeriram para pesquisas futuras um gráfico de controle de grupos (GCG) para as diferenças de cada canal em relação ao nível-base do processo como alternativa ao gráfico de controle de R_t para o controle das causas especiais que afetem os canais do processo individualmente. Embora a idéia estivesse clara sobre a nova estatística de controle que seria monitorada no gráfico, o projeto estatístico não foi desenvolvido.

Barbosa (2008) reescreve o modelo de Mortell e Runger (1995) para processos multicanal, denotando $\mu + A_t$ por b_t . Assim, cada observação em um canal (supondo o caso mais genérico de subgrupos de tamanho n em cada canal i no instante t) pode ser apresentada por:

$$x_{ij} = b_t + e_{ij} \quad (2.30)$$

onde

x_{ij} é a j -ésima medida obtida no canal i no instante t ;

b_t representa o valor do nível-base real (componente comum a todos os canais);

e_{ij} é o j -ésimo valor da componente individual do canal i no instante t (representa a diferença de cada canal em relação ao nível-base real), onde $e_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ i.i.d.

Supõe-se que as diferenças e_{ij} devem ser independentes (ruídos aleatórios). Dessa forma qualquer eventual autocorrelação existente numa série de valores sucessivos da característica de qualidade x em um mesmo canal será devida exclusivamente à presença de autocorrelação no nível-base. Ou seja, $COV(e_{ij}, e_{kl}) = 0, \forall t, i, j, k, l$, desde que $(i, j) \neq (k, l)$, inclusive para $j = l$, desde que $i \neq k$ e para $i = k$, desde que $j \neq l$.

Barbosa (2008) obteve analiticamente os limites de controle do gráfico projetado para o monitoramento do nível-base e do gráfico de controle de grupos das diferenças em relação ao nível-base, projetado para o monitoramento da componente individual, ambos na versão Shewhart.

O gráfico de controle do nível-base (b_t) é projetado para a detecção de causas especiais que afetem simultaneamente todos os canais (controle da componente comum a todos os canais do processo). Este esquema é similar aos gráficos de controle propostos por Mortell e Runger (1995) e por Runger et al. (1996) criados para o mesmo propósito.

O desempenho do gráfico para o controle do nível-base do processo não foi analisado por Barbosa (2008), por tratar-se de um gráfico já conhecido e largamente analisado na literatura, como um gráfico de \bar{X} ou de observações individuais (X), ou EWMA de \bar{X} ou de X, ou CUSUM de \bar{X} ou de X, ou um gráfico para o controle de resíduos de algum modelo de série temporal.

O GCG das diferenças em relação ao nível-base é projetado para o monitoramento da média das componentes individuais de variação (detecta causas especiais que afetam individualmente os canais). Barbosa (2008) obteve os limites de controle e analisou as medidas de desempenho do gráfico. Vale lembrar que, antes desse estudo, um esquema semelhante, usando um GCG de diferenças em relação ao nível-base (com os limites de controle calculados de forma diferente a desenvolvida por Barbosa, 2008) foi aplicado a um processo multicanal real por Passos (2005), sem a análise da eficiência contra alterações na média do processo.

O GCG proposto por Barbosa (2008) consiste basicamente da plotagem dos valores extremos da estatística de controle (dentre todos os canais) num esquema estatístico e comparação destes valores com os seus respectivos limites de controle. O conceito de sinal de descontrole é similar ao adotado para os GCGs de Boyd (1950): se o resíduo (ou diferença em relação ao nível-base) máximo obtido dentre todos os canais for maior que o limite superior de controle ou o resíduo mínimo obtido for menor que o limite inferior de controle, há evidência de descontrole nas componentes individuais dos canais do processo. Para obter analiticamente os limites de controle, algumas suposições devem ser feitas, como será descrito logo a seguir.

Considere um processo em controle, onde todos os e_{ij} são normalmente distribuídos com média igual a zero e desvio-padrão igual a σ . As diferenças (\hat{e}_{ij}) são obtidas simplesmente da diferença entre os valores observados nos canais (x_{ij}) e a estimativa do nível-base (\hat{b}_t), que é a média global do processo.

Para obter os limites de controle, é necessário o conhecimento da distribuição amostral das diferenças em relação ao nível-base. Para tal, algumas estimativas devem ser obtidas como segue:

a) Estimativas de e_{ij} e de $e_{i.}$

Reescrevendo a equação (2.30), as diferenças em relação ao nível-base teórico (b_t), i.e., as componentes individuais dos canais, podem ser escritas por:

$$e_{ij} = x_{ij} - b_t \quad (2.31)$$

O nível-base teórico não é conhecido no processo, por tanto os valores exatos das diferenças acima escritas não podem ser obtidas. Dessa forma, no lugar das componentes individuais dos canais, são monitorados os \hat{e}_{ij} escritos como as diferenças entre as observações de cada canal e o nível-base estimado. Ou seja,

$$\hat{e}_{ij} = x_{ij} - \hat{b}_t \quad (2.32)$$

A diferença do canal i (valor médio das diferenças) em relação ao nível-base estimado pode ser escrita por (2.32) na seguinte forma:

$$\hat{e}_{i.} = x_{i.} - \hat{b}_t \quad (2.33)$$

onde

$$x_{i.} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{ij} \quad (2.34)$$

Ou, ainda, utilizando (2.34) em (2.33), pode ser escrita como:

$$\hat{e}_{i.} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \hat{e}_{ij} \quad (2.35)$$

Desenvolvendo a equação (2.30), utilizando-se do resultado obtido em (2.35), o seguinte resultado é obtido:

$$\begin{aligned}
x_{ti} &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{tij} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (b_t + e_{tij}) \\
&= b_t + e_{ti}.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

b) Estimativas do nível-base teórico (b_t)

O valor do nível-base obtido no instante t de um processo multicanal pode ser estimado pela média aritmética de todos os canais nesse instante de tempo, ou seja, num processo composto por c canais pode se escrever o nível-base como:

$$\begin{aligned}
\hat{b}_t &= \bar{x}_t \\
&= \frac{1}{nc} \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^n x_{tij}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

A estimativa do nível-base obtida em (2.37) pode ser escrita por uma forma mais simplificada com o auxílio de (2.36), como segue:

$$\begin{aligned}
\hat{b}_t &= \bar{x}_t = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^c x_{ti}. \\
&= \frac{1}{c} \sum_{i=1}^c (b_t + e_{ti}) \\
&= b_t + e_{t..}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

onde:

$$e_{t..} = \frac{1}{c} \sum_{j=1}^c e_{tj}. \tag{2.39}$$

Desenvolvendo a equação (2.32), utilizando-se dos resultados obtidos em (2.36) e (2.38), as diferenças em cada canal (valor médio das diferenças; quando há mais de uma observação por canal) passam a ser escritas como:

$$\hat{e}_{ti} = e_{ti} - e_{t..} \tag{2.40}$$

onde:

e_{ti} é a diferença do canal i em relação ao nível-base (b_t);

$e_{t..}$ é a diferença de todos os canais em relação a b_t .

Para simplificar a notação, daqui em diante será empregado um ponto (“.”) na posição de um índice indicando a existência do valor médio dos valores da variável em questão.

Barbosa (2008) demonstra que as diferenças calculadas em (2.40) são normalmente distribuídas com média igual a zero e variância igual a $(c-1/c)\sigma^2/n$. Tal distribuição é utilizada para obter os limites de controle do GCG das diferenças.

Como os valores de e_{ij} não são diretamente observáveis, então, ao se calcular o desvio-padrão dos resíduos (diferenças em relação ao nível-base estimado) de dados históricos através de qualquer estimador que seja, estar-se-á estimando diretamente $\sqrt{\frac{c-1}{c}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ e não σ . O uso do fator $\sqrt{\frac{c-1}{c}}$ multiplicando σ para o cálculo dos limites de controle de qualquer gráfico que utilize as diferenças em relação ao nível-base se aplica ao caso aqui presente em que se geram valores simulados de e_{ij} com um desvio-padrão σ pré-especificado.

Por hipótese, as componentes individuais e_{ij} de cada canal (e suas médias $e_{i.}$, no caso de mais de uma observação por canal) são consideradas independentes do valor do nível-base (b_t) e também independentes umas das outras ($e_{i.}$ independente de $e_{k.}$ para $i \neq k$). Entretanto, as diferenças \hat{e}_{ti} são correlacionadas com o valor do nível-base estimado (\hat{b}_t).

De posse da distribuição amostral de \hat{e}_{ti} (ou de $\hat{e}_{ti.}$ no caso de $n > 1$ em cada canal), os limites de controle são estabelecidos. Ao considerar c canais, a probabilidade de alarmes falsos globais (α_{global}) pode ser muito maior que a probabilidade de alarmes falsos para cada canal individualmente ($\alpha_{individual}$); este fato deve ser considerado ao se obter os limites de controle para o gráfico.

Para fins de exposição, considere provisoriamente a hipótese de independência entre os diversos valores de $\hat{e}_{ti.}$ (isto é, $\hat{e}_{ti.}$ e $\hat{e}_{tj.}$ independentes se $i \neq j$). Sabe-se que \hat{e}_{ti} e \hat{e}_{tj} não são independentes, logo, $\hat{e}_{ti.}$ e $\hat{e}_{tj.}$ também não

serão independentes. Sejam $\alpha_{individual}$ e α_{global} as probabilidades de alarme falso individual e global, respectivamente.

Corrigindo o valor de α pela metodologia de Dunn-Sidak (Dunn, 1958; Sidak, 1967) para testes de hipóteses de comparações múltiplas, tem-se que a probabilidade de nenhum dos canais sinalizar na presença de uma causa especial é dada por:

$$(1 - \alpha_{global}) = (1 - \alpha_{individual})^c \quad (2.41)$$

Pela relação acima descrita, o valor de $\alpha_{individual}$ pode ser determinado em função de um valor α_{global} previamente especificado.

$$\alpha_{individual} = 1 - \sqrt[c]{1 - \alpha_{global}} \quad (2.42)$$

Portanto, o fator de abertura dos limites de controle pode ser determinado por:

$$K_{dnb} = -\Phi^{-1}(0,5 \alpha_{individual}) \quad (2.43)$$

Entretanto, como K_{dnb} foi obtido assumindo independência entre os valores de \hat{e}_{ti} , há uma falha na determinação desse parâmetro. Na verdade, os valores de \hat{e}_{ti} apresentam correlação entre si. Barbosa (2008) demonstra que a correlação ρ_{ij} entre duas diferenças calculadas quaisquer \hat{e}_{ti} e \hat{e}_{tj} (para $i \neq j$) é dada por:

$$\rho_{ij} = \frac{-1}{(c-1)} \quad \forall i, j, i \neq j \quad (2.44)$$

Se a correlação não for levada em consideração na determinação do parâmetro, o valor real (exato) de α_{global} pode ser menor que o valor obtido na equação (2.43). Em outras palavras, ao se supor independência entre os valores de \hat{e}_i , superestima-se a probabilidade de alarme falso global.

A Tabela 2.3 mostra as correlações entre duas diferenças quaisquer \hat{e}_{ti} e \hat{e}_{tj} (para $i \neq j$), em função do número de canais (denotado por c).

Tabela 2.3 – Correlação entre \hat{e}_{ti} e \hat{e}_{tj} (para $i \neq j$)

c	ρ_{ij}
2	-1,00
3	-0,50
4	-0,33
5	-0,25
6	-0,20
7	-0,17

A correlação entre os valores de diferentes \hat{e}_{ti} diminui (em módulo) com o aumento do número de canais. Dessa forma, aconselha-se usar (2.42) e (2.43) apenas nos casos em que $c \geq 4$ para estabelecer os limites de controle do gráfico.

Para os casos de processos compostos por dois ou três canais ($c=2$ ou $c=3$), a equação (2.43) não deve ser utilizada para determinação de K_{dnb} , para compensar o efeito de o processo ser constituído por mais de um canal. No caso de dois canais, $\alpha_{individual}$ deve ser igual ao α_{global} . No caso de processos compostos por três canais, a Tabela 2.4 mostra as diferenças percentuais (%) entre os valores de NMA_0 calculados pelos α_{global} especificados e os de NMA_0 calculados pelos α_{global} exatos (obtidos através da integração numérica de uma distribuição normal trivariada na região dentro dos limites de controle do GCG).

Tabela 2.4 – Diferenças (%) nos cálculo de NMA_0 e valores de K para os valores de NMA_0 especificados, considerando processos compostos por três canais ($c = 3$).

NMA_0		Diferenças (%)	Valores de K para o NMA_0 especificado
Especificado	Exato		
100,0	106,6	6,6	2,917
200,0	210,0	5,0	2,947
370,4	385,9	4,2	3,129

Fonte: Barbosa (2008)

Para os gráficos de Shewhart, o valor de NMA_0 é determinado por:

$$NMA_{0global} = \frac{1}{\alpha_{global}} \quad (2.45)$$

Se os limites de controle obtidos em (2.42) e (2.43) forem utilizados, para o controle de processos compostos por três canais, levam a uma frequência menor de alarmes falsos que os limites calculados com base no valor especificado: α é menor e NMA_0 é maior (limites mais conservadores). Contudo, ao se determinar os limites de controle com base em (2.42) e (2.43), o poder do gráfico será um pouco menor que o obtido com os limites que correspondam exatamente ao α_{global} especificado. Barbosa (2008) aconselha utilizar os valores de K_{dnb} para o NMA_0 especificado (tais valores foram obtidos por buscas iterativas e encontram-se na Tabela 2.4).

Os limites de controle do GCG das diferenças são expressos por:

$$LSC_{dnb} = K_{dnb} \sqrt{\frac{c-1}{c}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (2.46)$$

$$LIC_{dnb} = -K_{dnb} \sqrt{\frac{c-1}{c}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (2.47)$$

onde:

n é o tamanho da amostra (ou o número de diferentes medidas por canal em um mesmo instante);

σ é o desvio-padrão das diferenças reais em relação ao nível-base “teórico”.

Através de comparações de desempenho realizadas entre o gráfico de controle de R_t de Mortell e Runger (1995) e o GCG das diferenças, Barbosa (2008) concluiu que o GCG das diferenças em relação ao nível-base possui melhor desempenho, em termos de valores menores de NMA_1 , contra alterações na média.

Entretanto, pode ser observado que há pouca sensibilidade deste GCG contra alterações de magnitudes menores ou iguais a 2σ nas componentes individuais dos canais do processo. Um dos objetivos desta tese é o desenvolvimento de uma versão EWMA do GCG das diferenças em relação (e a obtenção dos seus projetos ótimos) para adquirir maior sensibilidade a alterações de magnitude pequena a moderada na média.