

## 6

# Controle da Erosão das Bacias de Atração

### 6.1.

#### Introdução

A aplicação da teoria clássica de sistemas dinâmicos consiste na identificação dos atratores, na sua evolução através das bifurcações locais e globais, e na construção dos diagramas de bifurcação e das bacias de atração, com o objetivo final de caracterizar a resposta (usualmente complexa) do sistema. Estes conceitos estão bem estabelecidos. Dentre os novos tópicos de pesquisa em dinâmica não-linear, pode-se destacar a investigação da integridade de sistemas dinâmicos. Neste contexto, destaca-se o fenômeno de erosão da bacia segura devido à penetração de atratores perigosos e bifurcações globais.

Partindo dos trabalhos de Thompson e colaboradores (Thompson, 1989; Soliman & Thompson, 1989), tem-se que os atratores devem estar imersos em uma bacia de atração compacta (sem a presença de erosão) para uma aplicação prática segura. De fato, a erosão da bacia segura constitui um estado crítico para a estrutura, podendo levá-la a uma falha inevitável. Estas situações exigem uma investigação detalhada da erosão das bacias de atração, assim como seu possível controle, o que constitui o objetivo deste capítulo.

#### 6.1.1.

##### Medidas de Integridade

O conjunto de condições iniciais que levam a uma resposta segura é a definição mais precisa da medida de integridade, uma questão que foi de certa forma subestimada no passado, e ainda está longe de ser trivial. Na verdade, vários pontos estão envolvidos na sua correta definição e devem ser cuidadosamente levados em consideração (Rega & Lenci, 2005).

Para um estudo coerente e preciso de uma medida de integridade é necessário ter em mente o conceito preciso de bacia segura. Dentre as principais definições de bacia segura, a mais intuitiva, e a que é utilizada neste trabalho, é:

“o conjunto de todas as condições iniciais no espaço de fase que são atraídas pelos pontos fixos pertencentes a um dado vale potencial quando  $t \rightarrow \infty$ ”, isto é, a união da bacia clássica de atração de todos os atratores de um dado vale potencial.

Esta definição proporciona diversas vantagens, as principais são: (a) as bacias de atração passam a ser delimitadas pelas variedades invariantes (fronteiras de estabilidade) e assim pode-se avaliar sua evolução através da teoria clássica de sistemas dinâmicos, e (b) as bacias de atração podem ser calculadas por meio de técnicas numéricas amplamente difundidas na literatura.

Neste contexto, Rega & Lenci (2005) destacam três medidas de integridade empregadas para avaliar a evolução da erosão das bacias seguras, a saber: a medida global de integridade (GIM), a medida local de integridade (LIM) e o fator de integridade (IF). A seguir são definidas as medidas GIM e IF. A medida LIM foi devidamente apresentada no capítulo 5.

A medida global de integridade (GIM) é definida como a magnitude normalizada do hipervolume (área em 2D) da bacia segura. Tal medida é uma propriedade do vale potencial e não dos atratores externos. O termo normalizada significa que a magnitude da bacia segura corresponde ao valor do hipervolume ocupado pela bacia dividido por um dado valor de referência.

O fator de integridade (IF), introduzido por Lenci & Rega (2003b), é definido como o raio normalizado da maior hiperesfera inscrita na bacia segura. As vantagens de se utilizar esta medida são: (a) é obtida sem grandes custos computacionais, (b) é uma propriedade do vale potencial e (c) elimina as regiões fractais da avaliação da integridade do sistema. Porém, em comparação com a medida LIM, o IF pode superestimar a integridade nos casos especiais em que o ponto atrator possui uma forte excentricidade em relação ao ponto central da bacia segura compacta.

### **6.1.2. Redução da Integridade**

As medidas de integridade são medidas quantitativas de segurança dos sistemas dinâmicos. São utilizadas para se investigar analiticamente, ou numericamente, a confiabilidade de uma dada estrutura perante a variação de seus parâmetros e na presença de perturbações. De um ponto de vista prático, um

importante parâmetro é a amplitude da excitação. Ao se analisar a variação de uma das medidas de integridade em função da amplitude de excitação, tem-se o denominado perfil de erosão, que é muito útil na avaliação do nível de segurança de uma dada estrutura.

A erosão pode ser estudada através da análise das variedades invariantes dos pontos de sela associados às fronteiras das bacias de atração e de sua evolução. Neste contexto destaca-se o estudo das bifurcações globais, pois esta é a chave dos mecanismos de erosão (Rega & Lenci, 2008).

As fronteiras de estabilidade obtidas pelas variedades invariantes dos pontos de sela podem fornecer dois tipos de órbitas. Quando uma variedade instável que parte de um ponto de sela coincide com a variedade estável neste ponto, formando uma órbita fechada, diz-se que a órbita é homoclínica. Um ponto é dito heteroclínico se ele está na variedade instável de um ponto de sela e essa variedade é tangente à variedade estável de outro ponto de sela. A órbita percorrida pelo ponto heteroclínico conecta dois pontos de sela e é denominada órbita heteroclínica.

Para sistemas perturbados, tem-se que, quando a excitação atinge uma amplitude crítica, as variedades estáveis e instáveis se interceptam. Esta interseção representa uma bifurcação, que pode ser homoclínica ou heteroclínica, dependendo da situação em análise. Este fenômeno é definido como uma bifurcação global.

Neste contexto, tem-se que a redução de integridade é geralmente controlada pelas bifurcações globais. Elas permitem que as bacias de outros atratores que circundam a bacia em estudo penetrem na bacia segura e reduzam a sua magnitude. Isto acontece através de diferentes mecanismos topológicos, que são extremamente complexos e podem envolver bifurcações globais secundárias. A erosão acaba com a completa destruição da bacia segura e com o aparecimento de outros regimes dinâmicos (Rega & Lenci, 2008).

Como se verifica nos comentários precedentes, a determinação da amplitude crítica da excitação associada à bifurcação global, homo- ou heteroclínica, é de suma importância no estudo da integridade, pois é neste ponto que se inicia uma série de fenômenos dinâmicos indesejados, em especial a erosão da bacia segura, o que leva o sistema a sua inevitável falha. As bifurcações homo/heteroclínicas podem ser determinadas através do critério de Melnikov. Este método permite

obter analiticamente a amplitude crítica da excitação associada à bifurcação global.

O método de Melnikov (Guckenheimer & Holmes, 1983; Wiggins, 1988; Wiggins, 1990) é adequado para estudar esta classe de problemas, pois se podem obter informações a respeito do sistema perturbado utilizando-se a informação contida nas soluções do sistema não perturbado (Alberto & Bretas, 2001).

### **6.1.3. Controle da Integridade**

A erosão da bacia segura é claramente um evento indesejado, e a possibilidade de seu controle, ou ao menos a sua redução, é de grande interesse teórico e prático. Vários métodos foram propostos nos últimos anos com esta finalidade, um resumo destes métodos é encontrando em Lenci & Rega (2003a, 2003b). Uma idéia comum em vários trabalhos é se controlar e/ou evitar a bifurcação global. Na verdade, a remoção da bifurcação global certamente acarretaria no fim do conjunto invariante caótico criado pelo mecanismo da ferradura de Smale, regularizando os limites da bacia e reduzindo o caos transiente e imprevisível. Além disso, eliminaria, diminuiria ou quebraria diretamente o atrator caótico, pelo deslocamento da colisão inevitável das variedades estáveis e instáveis, que é a responsável pelos diversos fenômenos indesejados. Finalmente, a remoção não só pode regularizar a dinâmica, mas também pode melhorar outras performances do sistema, tais como o escape do vale potencial, se este existir (Lenci & Rega, 2003a).

Dentre as diversas técnicas existentes, aquela que consiste em modificar a excitação do sistema através da adição de uma excitação super-harmônica apresenta-se como uma técnica de baixo custo computacional e bastante viável. Com o objetivo de eliminar o caos, esta técnica foi inicialmente proposta por Shaw (1990), que adicionou um super-harmônico à excitação. Posteriormente Lenci & Rega (1998a, 1998b) consideraram todos os super-harmônicos, de modo que a forma da excitação pudesse variar de maneira arbitrária. A forma da excitação, definida como excitação ótima por Lenci & Rega (1998a, 1998b), permite aumentar o valor da amplitude crítica da excitação referente à bifurcação global, tanto homoclínica quanto heteroclínica. Isto é obtido através da

formulação e resolução adequada de um problema de otimização. A teoria e a implementação do método de controle juntamente com os detalhes das simulações numéricas de vários sistemas dinâmicos não-lineares são apresentadas por Lenci & Rega em uma série de trabalhos (Lenci & Rega, 1998a, 1998b, 2000, 2003a, 2003b, 2003c, 2004a, 2004b, 2005).

O método proposto por Lenci & Rega consiste na identificação da forma da excitação periódica que permite evitar, de uma maneira ótima, a interseção das variedades estáveis e instáveis, e consiste nos seguintes passos:

1. determinação da bifurcação homo/heteroclínica (amplitude crítica da excitação) pelo método de Melnikov;
2. estudo da dependência da bifurcação homo/heteroclínica à forma da excitação;
3. formulação e resolução do problema matemático de otimização, que consiste na determinação da excitação teórica ótima que maximiza a distância entre as variedades estáveis e instáveis para uma amplitude fixa de excitação ou, equivalentemente, a amplitude crítica onde ocorre a bifurcação global;
4. implementação numérica da excitação ótima, necessária para confirmar as previsões teóricas e para verificar a viabilidade e performance da técnica de controle.

Basicamente, o método de controle proposto por Lenci & Rega pode ser compreendido observando-se a seqüência de ilustrações apresentadas na Figura 6.1. Adota-se, por exemplo, um oscilador com 1 grau de liberdade que apresenta uma órbita homoclínica, Figura 6.1(a), para o sistema conservativo, verifica-se que a variedade estável tangencia a variedade instável no mesmo ponto de sela. Quando se introduz uma perturbação, somente amortecimento, verifica-se pela Figura 6.1(b) que a variedade estável passa a delimitar a bacia de atração segura e a variedade instável converge para o ponto atrator. Contudo, quando se adiciona também uma excitação harmônica o sistema começa a oscilar e isso faz com que as variedades também oscilem, tanto a estável como a instável, Figura 6.1(c). À medida que se aumenta a amplitude da excitação tem-se por conseqüência que as amplitudes de oscilação aumentam e quando a amplitude da excitação chega a uma amplitude crítica acontece à indesejada interseção entre a variedade estável e

a instável como se verifica pela Figura 6.1(d), sendo que este é o que se deseja evitar. Adicionando super-harmônicos na excitação harmônica do sistema, como propõem o método de controle, tem-se que a frequência da excitação aumenta e a amplitude de excitação diminui, isso faz com que a variedade estável se distancie da variedade instável ou vice-versa, como se constata observando a Figura 6.1(e).

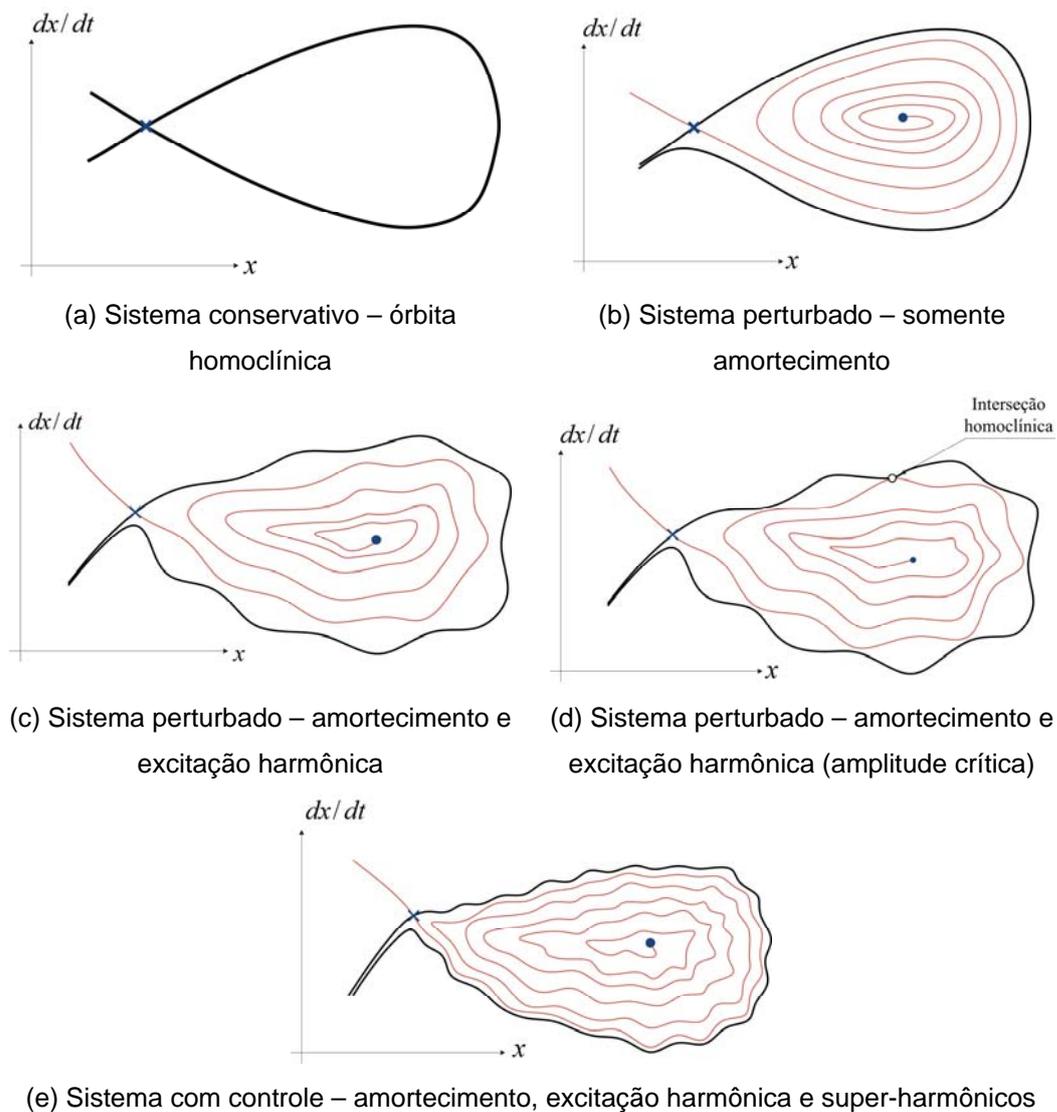


Figura 6.1: Ilustração de aplicação do método de controle proposto por Lenci & Rega.

Este método se apresenta como uma ferramenta interessante do ponto de vista prático, pois proporciona o controle de sistemas dinâmicos não-lineares baseando-se em uma formulação analítica através do método de Melnikov. Porém, o método de controle desenvolvido por Lenci & Rega somente é aplicável a

sistemas com um grau de liberdade, pois a teoria de Melnikov é limitada e não pode ser estendida a sistemas de  $n$  graus de liberdade.

Assim, este método de controle não pode ser aplicado aos modelos acoplados em estudo. Contudo, o método pode ser utilizado, sem restrições, para os modelos desacoplados, obtidos a partir dos modos não-lineares. Inicialmente, é apresentada a formulação das equações de movimento dos modelos desacoplados, seguindo os conceitos expostos nos capítulos anteriores. A seguir, mostra-se o desenvolvimento da formulação tanto para a obtenção da bifurcação global quanto para a determinação da excitação ótima. Por fim, apresenta-se a aplicação do método de controle aos modelos desacoplados.

## 6.2. Equações de Movimento Desacopladas

### 6.2.1. Modelo de Augusti

Como se constata nos capítulos anteriores o modelo de Augusti pode ser desacoplado quando excitado nas direções  $\varphi = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$ . Nestes casos tanto os modos não-lineares similares quanto as variedades dos pontos de sela estão contidas em um único plano. Porém, vale recordar, que os planos desacoplados não representam com fidelidade o modelo acoplado para todos os valores de frequência da excitação. Para este estudo considera-se  $\varphi = 45^\circ$ .

Partindo da parcela de energia cinética (2.9), da parcela da energia potencial total (2.12) e da parcela de amortecimento (2.13), obtêm-se as parcelas de energia do modelo desacoplado através da expressão (4.33), a saber:

$$\bar{T}_u = \frac{T_u}{ml^2\omega_e^2} = \frac{1}{2} \left( \dot{u} \cos\left(\frac{u\sqrt{2}}{2}\right) + F \cos(\tau) \right)^2 + \frac{\dot{u}^2 \text{sen}^2\left(\frac{u\sqrt{2}}{2}\right) \cos^2\left(\frac{u\sqrt{2}}{2}\right)}{-1 + 2\cos^2\left(\frac{u\sqrt{2}}{2}\right)} \quad (6.1a)$$

$$\bar{V}_u = \frac{V_u}{ml^2\omega_e^2} = \frac{(u - u_{10})^2}{2\lambda\Omega^2} - \frac{1}{\Omega^2} \left( \sqrt{1 - 2\text{sen}^2\left(\frac{u_{10}\sqrt{2}}{2}\right)} - \sqrt{1 - 2\text{sen}^2\left(\frac{u\sqrt{2}}{2}\right)} \right) \quad (6.1b)$$

$$\bar{E}_u = \frac{E_u}{ml^2 \omega_e^2} = \frac{\xi}{\Omega} \dot{u}^2 \quad (6.1c)$$

As parcelas de energia do modelo desacoplado são adimensionalizadas em função da carga crítica do sistema perfeito,  $Pcr = k/l$  ( $k = k_1 = k_2$ ). Nas equações (6.1) adotam-se as seguintes variáveis auxiliares:  $\lambda = P/Pcr$ ,  $P = mg$ ,  $k/ml^2 = \omega_p^2/\lambda$ ,  $C/ml^2 = 2\xi\omega_p$  ( $C_1 = C_2$ ),  $\omega_p^2 = g/l$ ,  $F = F_b/l$ ,  $\tau = \omega_e t$ ,  $\Omega = \omega_e/\omega_p$ ,  $\Omega_s = \omega_s/\omega_p$ . Nestas expressões  $F_b$  é a magnitude do deslocamento de base (as parcelas referentes à excitação de base são dadas por:  $u_b = F_b \frac{\sqrt{2}}{2} \text{sen}(\omega_e t)$  e  $v_b = F_b \frac{\sqrt{2}}{2} \text{sen}(\omega_e t)$ , pois  $\varphi = 45^\circ$ ),  $\omega_e$  é a frequência da excitação e  $\omega_s$  é a frequência natural do modelo desacoplado.

A equação de movimento do modelo desacoplado é obtida usando a equação de Lagrange em termos da coordenada generalizada  $u$ , sendo esta dada por:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial(\bar{T}_u)}{\partial \dot{u}} - \frac{\partial(\bar{T}_u)}{\partial u} + \frac{\partial(\bar{V}_u)}{\partial u} + \frac{\partial(\bar{E}_u)}{\partial \dot{u}} = 0 \quad (6.2)$$

Assim, a partir de (6.1) e (6.2), tem-se a seguinte equação de movimento desacoplada:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1 + \cos(u\sqrt{2})}{2 \cos(u\sqrt{2})} \right) \ddot{u} + \frac{\sqrt{2} \text{sen}(u\sqrt{2})}{2 + 2 \cos(2u\sqrt{2})} \dot{u}^2 + \frac{2\xi}{\Omega} \dot{u} + \frac{(u - u_{10})}{\lambda \Omega^2} - \\ & \frac{\sqrt{2}}{\Omega^2} \frac{\text{sen}\left(\frac{u\sqrt{2}}{2}\right) \cos\left(\frac{u\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{1 - 2\text{sen}^2\left(\frac{u\sqrt{2}}{2}\right)}} = F \text{sen}(\tau) \cos\left(\frac{u\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned} \quad (6.3)$$

Esta equação de movimento representa tanto o modelo perfeito desacoplado como o modelo com imperfeição geométrica com  $\psi = 45^\circ$ .

### 6.2.2. Modelo de Torre Estaiada

Os resultados apresentados nos capítulos anteriores mostram que esse modelo pode ser desacoplado quando a direção da excitação coincide com o plano de uma das molas. Assim, tem-se que tal modelo pode ser desacoplado nos planos  $\varphi = 30^\circ, 90^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 270^\circ, 230^\circ$ . Estes planos contêm as variedades dos pontos de sela e os modos não-lineares similares. Contudo, como no modelo anterior, vale lembrar que os planos desacoplados não representam com fidelidade o modelo acoplado para todos os valores de frequência da excitação. No presente estudo desacopla-se o sistema no plano  $\varphi = 30^\circ$ .

As parcelas de energia cinética (2.17), energia potencial total (2.21) e amortecimento (2.22) para o modelo desacoplado são dadas, com o auxílio da expressão (4.53b) e considerando  $\beta = 120^\circ$ , por:

$$\bar{T}_u = \frac{T_u}{ml^2\omega_e^2} = \frac{1}{2} \left( (\dot{u} + F \cos(\tau))^2 - \frac{u^2 \dot{u}^2}{-1+u^2} \right) \quad (6.4a)$$

$$\bar{V}_u = \frac{V_u}{ml^2\omega_e^2} = \frac{2}{\lambda\Omega^2} (\sqrt{2} - \sqrt{2-u})^2 + \frac{2}{3\lambda\Omega^2} \left( (\sqrt{2} - \sqrt{2+2u})^2 - (\sqrt{2} - \sqrt{2-u})^2 \right) - \frac{1}{\Omega^2} (1 - \sqrt{1-u^2}) \quad (6.4b)$$

$$\bar{E}_u = \frac{E_u}{ml^2\omega_e^2} = \frac{\xi}{\Omega} \dot{u}^2 \quad (6.4c)$$

Considera-se que  $k_2 = k_3$ ,  $k_2 = \nu K$  e  $k_1 = (1 - 2\nu)K$ . As parcelas de energia do modelo desacoplado são adimensionalizadas em função da carga crítica do sistema perfeito,  $P_{cr} = Kl/4$ . Além disso, definem-se as variáveis:  $\nu = \alpha/4\text{sen}^2\beta$ ,  $\lambda = P/P_{cr}$ ,  $mg = P$ ,  $Kl^2/ml^2 = 4\omega_p^2/\lambda$ ,  $C/ml^2 = 2\xi\omega_p$  ( $C_1 = C_2$ ),  $\omega_p^2 = g/l$ ,  $F = F_b/l$ ,  $\tau = \omega_e t$ ,  $\Omega = \omega_e/\omega_p$  e  $\Omega_s = \omega_s/\omega_p$ , onde  $F_b$  é a magnitude do deslocamento de base,  $\omega_e$  é a frequência da excitação e  $\omega_s$  é a frequência natural do modelo desacoplado. As parcelas referentes à excitação de base são dadas por:  $u_b = F_b \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen}(\omega_e t)$  e  $v_b = F_b \frac{1}{2} \text{sen}(\omega_e t)$ , pois  $\varphi = 30^\circ$ .

Assim, adotando como coordenada generalizada  $u$ , tem-se a seguinte equação de movimento desacoplada do modelo perfeito:

$$\begin{aligned} & \frac{\ddot{u}(1-u^2)+u\dot{u}^2}{(-1+u^2)^2} + \frac{2\xi}{\Omega}\dot{u} + \frac{2}{\lambda\Omega^2} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2-u}}{\sqrt{2-u}} + \\ & \frac{2}{3\lambda\Omega^2} \left( -\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2-u}}{\sqrt{2-u}} - \frac{2(\sqrt{2}-\sqrt{2+2u})}{\sqrt{2+2u}} \right) - \frac{1}{\Omega^2} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} = F\text{sen}(\tau) \end{aligned} \quad (6.5)$$

### 6.3. Formulação do Controle

As equações de movimento (6.3) e (6.5) podem ser reescritas, respectivamente, na forma:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1+\cos(u\sqrt{2})}{2\cos(u\sqrt{2})} \right) \ddot{u} + \frac{\sqrt{2}\text{sen}(u\sqrt{2})}{2+2\cos(2u\sqrt{2})} \dot{u}^2 + \frac{(u-u_{10})}{\lambda\Omega^2} - \\ & \frac{\sqrt{2}}{\Omega^2} \frac{\text{sen}\left(\frac{u\sqrt{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{u\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{1-2\text{sen}^2\left(\frac{u\sqrt{2}}{2}\right)}} + \varepsilon \frac{2\xi}{\Omega} \dot{u} - \varepsilon F\text{sen}(\tau)\cos\left(\frac{u\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \end{aligned} \quad (6.6a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\ddot{u}(1-u^2)+u\dot{u}^2}{(-1+u^2)^2} + \frac{2}{\lambda\Omega^2} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2-u}}{\sqrt{2-u}} + \\ & \frac{2}{3\lambda\Omega^2} \left( -\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2-u}}{\sqrt{2-u}} - \frac{2(\sqrt{2}-\sqrt{2+2u})}{\sqrt{2+2u}} \right) - \frac{1}{\Omega^2} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} + \\ & \varepsilon \frac{2\xi}{\Omega} \dot{u} - \varepsilon F\text{sen}(\tau) = 0 \end{aligned} \quad (6.6b)$$

onde  $\varepsilon$  é um parâmetro adimensional que mede a amplitude da perturbação.

Para os modelos em estudo, a introdução da perturbação se dá através do coeficiente de amortecimento e da amplitude da excitação.

A presença deste parâmetro  $\varepsilon$  nas equações de movimento permite a detecção do efeito das perturbações nas variedades invariantes. Isto é feito através do método clássico de Melnikov (Melnikov, 1963). Este é um método de perturbação que permite calcular, em uma primeira aproximação, a distância entre as variedades estáveis e instáveis.

A teoria e comprovação da eficiência do método de Melnikov não são tratadas no presente trabalho, contudo a teoria e as formulações necessárias para utilização do método são apresentadas nos trabalhos de Guckenheimer & Holmes (1983), Wiggins (1988) e Wiggins (1990).

Inicialmente deve-se definir a função de Melnikov que é dada por:

$$M(m) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{DH}(u_h) \cdot \mathbf{g}(u_h, \tau + m) d\tau \quad (6.7)$$

onde o vetor  $\mathbf{DH}$  representa a parte não perturbada do sistema, o vetor  $\mathbf{g}$  representa a parte perturbada do sistema e  $u_h$  representa a órbita do sistema (homoclínica -  $u_{\text{hom}}$  ou heteroclínica -  $u_{\text{het}}$ ). O argumento  $m$  da função de Melnikov é geralmente dado por  $m = \tau_0 + \nu_0$ , onde  $(\tau_0, \nu_0)$  é uma parametrização das variedades estáveis e instáveis em 2D. Em particular,  $\tau_0$  é um parâmetro do tempo ao longo da órbita em uma dada seção fixa de Poincaré e  $\nu_0$  é a fase entre duas seções de Poincaré consecutivas. Assim,  $\nu_0$  representa a medida da distância entre as variedades em uma dada seção fixa de Poincaré, enquanto  $\tau_0$  representa a medida da distância das variedades ao longo do tempo para um ponto fixo do espaço de fase não perturbado.

A seguir, obtém-se, para determinação das bifurcações globais, a função de Melnikov (6.7) para os modelos desacoplados e, posteriormente, a formulação para a determinação do controle ótimo.

### 6.3.1. Bifurcações Globais

Antes de calcular a função de Melnikov, é preciso determinar os vetores  $\mathbf{DH}$  e  $\mathbf{g}$ . Para isto, inicialmente, é determinada a órbita homo/heteroclínica do sistema conservativo.

Com o propósito de generalizar a formulação, define-se, no caso conservativo, que  $\bar{v}(u) = \bar{V}_u(u)$  (expressão 6.1b ou 6.4b) e  $\bar{t}(u)\dot{u}^2 = \bar{T}_u(u, \dot{u})$  (expressão 6.1a ou 6.4a), pois  $\varepsilon = 0$ ,  $F = 0$  e  $\xi = 0$ . Esta generalização permite

que a formulação possa ser empregada para ambos os modelos desacoplados. Assim, tem-se que a energia do sistema conservativo é dada por:

$$h = \bar{t}(u)\dot{u}^2 + \bar{v}(u) \quad (6.8)$$

Através da expressão (6.8) pode-se determinar a órbita homo/heteroclínica para o sistema não perturbado. Explicitando a velocidade em (6.8) e fazendo a separação de variáveis, tem-se que

$$\dot{u}_h = \sqrt{\frac{h - \bar{v}(u_h)}{\bar{t}(u_h)}} \rightarrow \frac{du_h}{d\tau} = \dot{u}_h \rightarrow \frac{du_h}{\dot{u}_h} = d\tau \quad (6.9)$$

Integrando-se (6.9), obtém-se o tempo em função da coordenada  $u_h$ , a saber:

$$\tau(u_h) = \int_{\lim 1}^{\lim 2} \frac{1}{\dot{u}_h} du_h \quad (6.10)$$

Na equação (6.10) os valores  $\lim 1$  e  $\lim 2$  dependem do fato da órbita ser homoclínica ou heteroclínica.

Para obter os vetores **DH** e **g** é necessário, primeiramente, determinar o Hamiltoniano do sistema conservativo. O Hamiltoniano dos modelos desacoplados pode ser obtido a partir do Lagrangiano, que é dado por:

$$L(u, \dot{u}) = \bar{T}_u(u, \dot{u}) - \bar{V}_u(u) \rightarrow L(u, \dot{u}) = \bar{t}(u)\dot{u}^2 - \bar{v}(u) \quad (6.11)$$

Por definição, a quantidade de movimento em termos do Lagrangiano é:

$$p^* = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = 2\bar{t}(u)\dot{u} \rightarrow \dot{u} = \frac{p^*}{2\bar{t}(u)} \quad (6.12)$$

Com base na dupla transformação de Legendre, tem-se que a função Hamiltoniana,  $H$ , pode ser escrita como:

$$H(u, p^*) = p^* \dot{u} - L(u, \dot{u}) \rightarrow H(u, p^*) = \frac{1}{4} \frac{p^{*2}}{\bar{t}(u)} + \bar{v}(u) \quad (6.13)$$

A equação de Lagrange, expressões (6.6), é equivalente ao sistema de  $2n$  equações de primeira ordem, conhecidas como equações de Hamilton, a saber:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p^*}{2\bar{t}(u)} = \dot{u} \end{array} \right. \quad (6.14a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial u} = -\left( -\frac{1}{4} \frac{\bar{t}'(u) p^{*2}}{\bar{t}(u)^2} + \bar{v}'(u) \right) = \bar{t}'(u) \dot{u}^2 - \bar{v}'(u) \end{array} \right. \quad (6.14b)$$

Ao se igualar a força generalizada em termos do Hamiltoniano,  $\dot{p}$ , à força generalizada em termos do Lagrangiano,  $\dot{p}^*$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{p} = \dot{p}^* \rightarrow \bar{t}'(u) \dot{u}^2 - \bar{v}'(u) &= 2\bar{t}'(u) \dot{u}^2 + 2\bar{t}(u) \ddot{u} \rightarrow \\ \ddot{u} + \frac{\bar{t}'(u) \dot{u}^2}{2\bar{t}(u)} + \frac{\bar{v}'(u)}{2\bar{t}(u)} &= 0 \end{aligned} \quad (6.15)$$

Ou seja, chega-se à equação de movimento (6.6), considerando  $\varepsilon = 0$ ,  $F = 0$  e  $\xi = 0$ .

Adicionando à expressão (6.15) os termos de amortecimento e força,  $\varepsilon \neq 0$ , a equação de movimento, válida para dois modelos desacoplados, toma a forma:

$$\ddot{u} + \frac{\bar{t}'(u) \dot{u}^2}{2\bar{t}(u)} + \frac{\bar{v}'(u)}{2\bar{t}(u)} + \frac{\varepsilon \bar{C}(\dot{u})}{2\bar{t}(u)} + \frac{\varepsilon \bar{F}(u, \tau)}{2\bar{t}(u)} = 0 \quad (6.16)$$

onde  $\bar{C}(\dot{u}) = 2\xi\dot{u}/\Omega$  (igual para os dois modelos desacoplados) e  $\bar{F}(u, \tau) = -F \text{var}_i \sin(\tau)$ , onde  $\text{var}_1 = \cos(u\sqrt{2}/2)$  para o modelo de Augusti e  $\text{var}_2 = 1$  para o modelo de torre estaiada.

Definida a equação de movimento que representa o comportamento dos modelos desacoplados, expressão (6.16), pode-se obter as equações de Hamilton tomando um caminho inverso ao anterior. Partindo da expressão (6.16),

lembrando que  $\dot{p} = \dot{p}^*$  e  $\dot{p}^* = 2\bar{t}'(u)\ddot{u} + 2\bar{t}'(u)\dot{u}^2$ , obtém-se a parcela da força generalizada em termos do Hamiltoniano, a saber:

$$2\bar{t}'(u)\ddot{u} + \bar{t}'(u)\dot{u}^2 + \bar{v}'(u) + \varepsilon\bar{C}'(\dot{u}) + \varepsilon\bar{F}'(u, \tau) = 0 \quad (6.17a)$$

$$\dot{p} = \bar{t}'(u)\dot{u}^2 - \bar{v}'(u) - \varepsilon\bar{C}'(\dot{u}) - \varepsilon\bar{F}'(u, \tau) \quad (6.17b)$$

Assim, tem-se que as equações de Hamilton para o sistema perturbado são:

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{\partial H}{\partial p} + \varepsilon g_1 = \underbrace{\dot{u}}_{\frac{\partial H}{\partial p}} + \underbrace{0}_{g_1} \end{cases} \quad (6.18a)$$

$$\begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial u} + \varepsilon g_2 = \underbrace{\bar{t}'(u)\dot{u}^2 - \bar{v}'(u)}_{\frac{\partial H}{\partial u}} - \underbrace{\varepsilon(\bar{C}'(\dot{u}) + \bar{F}'(u, \tau))}_{g_2} \end{cases} \quad (6.18b)$$

A partir destas equações pode-se obter o vetor não perturbado,  $\mathbf{DH}$ , e o vetor perturbado,  $\mathbf{g}$ , dos modelos desacoplados, a saber:

$$\mathbf{DH} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial u} & \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\bar{t}'(u)\dot{u}^2 + \bar{v}'(u) \\ \dot{u} \end{bmatrix} \quad (6.19a)$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ -\varepsilon(\bar{C}'(\dot{u}) + \bar{F}'(u, \tau)) \end{bmatrix} \quad (6.19b)$$

Definidos os vetores  $\mathbf{DH}$  e  $\mathbf{g}$ , obtém-se a função de Melnikov. A seguir, apresentam-se as passagens para se obter a função de Melnikov em sua forma final. Partindo da expressão (6.7), tem-se:

$$M(m) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial H}{\partial u} g_1 + \frac{\partial H}{\partial p} g_2 d\tau \quad (6.20)$$

Substituindo os termos dos vetores  $\mathbf{DH}$  e  $\mathbf{g}$ , obtém-se:

$$M(m) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}_h \left( -\varepsilon(\bar{C}'(\dot{u}_h) + \bar{F}'(u_h, \tau)) \right) d\tau \quad (6.21)$$

A seguir, utilizando as expressões  $\bar{C}(\dot{u}) = 2\xi\dot{u}/\Omega$  e  $\bar{F}(u, \tau) = -F \text{var}_i \sin(\tau)$ , tem-se:

$$M(m) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}_h \left( -\varepsilon \frac{2\xi}{\Omega} \dot{u}_h + \varepsilon F \text{var}_i \sin(\tau + m) \right) d\tau \quad (6.22)$$

Separando as parcelas da integral, chega-se a:

$$M(m) = -\varepsilon \frac{2\xi}{\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}_h^2 d\tau + \varepsilon F \int_{-\infty}^{\infty} \text{var}_i \dot{u}_h \sin(\tau + m) d\tau \quad (6.23)$$

Assumindo que  $\sin(\tau + m) = \sin(\tau) \cos(m) + \cos(\tau) \sin(m)$ , tem-se:

$$M(m) = -\varepsilon \frac{2\xi}{\Omega} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}_h^2 d\tau}_{\alpha_1} + \varepsilon F \cos(m) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \text{var}_i \dot{u}_h \sin(\tau) d\tau}_{\alpha_2} + \varepsilon F \sin(m) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \text{var}_i \dot{u}_h \cos(\tau) d\tau}_{\alpha_3} \quad (6.24)$$

Utilizando os termos  $\alpha_i$ , pode-se escrever que:

$$M(m) = -\varepsilon \frac{2\xi}{\Omega} \alpha_1 + \varepsilon F \cos(m) \alpha_2 + \varepsilon F \sin(m) \alpha_3 \quad (6.25)$$

A equação (6.25) pode ser reescrita, multiplicando e dividindo os dois últimos termos por  $\sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}$ , na forma:

$$M(m) = -\varepsilon \frac{2\xi}{\Omega} \alpha_1 + \varepsilon F \sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2} \left( \cos(m) \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}} + \sin(m) \frac{\alpha_3}{\sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}} \right) \quad (6.26)$$

Sabendo que  $\text{sen}(\eta)\cos(m) + \cos(\eta)\text{sen}(m) = \text{sen}(\eta + m)$ , e definindo  $\text{sen}(\eta) = \alpha_2 / \sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}$  e  $\cos(\eta) = \alpha_3 / \sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}$ , chega-se à expressão final da função de Melnikov, a saber:

$$M(m) = -\varepsilon \frac{2\xi}{\Omega} \alpha_1 + \varepsilon F \sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2} \text{sen}(\eta + m) \quad (6.27)$$

**Teorema:** se existe um “ $m$ ” para o qual a função de Melnikov é nula (isto é, se  $\exists \bar{m} \therefore M(\bar{m}) = 0$ ) então o sistema apresenta interseção homo/heteroclínica, ou seja, uma bifurcação global.

A partir do teorema, obtém-se:

$$\text{sen}(\eta + m) = \frac{2\xi\alpha_1/\Omega}{F\sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}} \quad (6.28)$$

ou seja:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{se } \frac{2\xi\alpha_1/\Omega}{F\sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}} < 1 \rightarrow \text{tem solução (interseção)} \end{array} \right. \quad (6.29a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{se } \frac{2\xi\alpha_1/\Omega}{F\sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}} > 1 \rightarrow \text{não tem solução} \end{array} \right. \quad (6.29b)$$

Por fim, tem-se o valor “teórico” da interseção homo/heteroclínica,  $Fcr^h$ , que representa a magnitude da carga,  $F$ , onde ocorre a primeira bifurcação global, a saber:

$$Fcr^h = \frac{2\xi\alpha_1/\Omega}{\sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}} \quad (6.30)$$

A determinação dos parâmetros  $\alpha_i$  é apresentada posteriormente na aplicação do método de controle, item 6.4, juntamente com a definição da órbita homo/heteroclínica.

### 6.3.2. Controle a partir da Adição de Super-Harmônicos

O método de controle proposto por Lenci & Rega tem por base a adição de super-harmônicos à excitação do sistema dinâmico, a fim de se obter uma excitação ótima que elimine, ou ao menos retarde, a primeira bifurcação global.

Com base neste procedimento, tem-se que a excitação toma a forma:

$$\bar{F}(u, \tau) = -F \left( \text{var}_i \text{sen}(\tau) + \sum_{j=2}^n j^2 \frac{F_j}{F} \text{var}_i \text{sen}(j\tau + \nu_j) \right) \quad (6.31)$$

onde o termo adicional define o somatório de super-harmônicos até a ordem  $n$ , e  $\nu_j$  define o ângulo de fase entre os super-harmônicos.

A seguir mostra-se a dedução da função de Melnikov considerando os super-harmônicos. Partindo-se da expressão

$$M(m) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}_h \left( -\varepsilon (\bar{C}(\dot{u}_h) + \bar{F}(u_h, \tau)) \right) d\tau \quad (6.32)$$

utilizando a expressão (6.31) e sabendo que  $\bar{C}(\dot{u}) = 2\xi\dot{u}/\Omega$ , obtém-se

$$M(m) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}_h \left( -\varepsilon \frac{2\xi}{\Omega} \dot{u}_h + \varepsilon F \left( \text{var}_i \text{sen}(\tau + m) + \sum_{j=2}^n j^2 \frac{F_j}{F} \text{var}_i \text{sen}(j\tau + jm + \nu_j) \right) \right) d\tau \quad (6.33)$$

Separando os termos da integral, tem-se:

$$M(m) = -\varepsilon \frac{2\xi}{\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}_h^2 d\tau + \varepsilon F \int_{-\infty}^{\infty} \text{var}_i \dot{u}_h \left( \text{sen}(\tau + m) + \sum_{j=2}^n j^2 \frac{F_j}{F} \text{sen}(j\tau + jm + \nu_j) \right) d\tau \quad (6.34)$$

Admitindo que  $\text{sen}(j\tau + jm + \nu_j) = \text{sen}(j\tau)\cos(jm + \nu_j) + \cos(j\tau)\text{sen}(jm + \nu_j)$ ,  
tem-se:

$$\begin{aligned}
 M(m) = & -\varepsilon \frac{2\xi}{\Omega} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}_h^2 d\tau}_{\alpha_1} + \varepsilon F \cos(m) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \text{var}_i \dot{u}_h \text{sen}(\tau) d\tau}_{\alpha_2} + \\
 & \varepsilon F \sum_{j=2}^n \left( j^2 \frac{F_j}{F} \right) \cos(jm + \nu_j) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \text{var}_i \dot{u}_h \text{sen}(j\tau) d\tau}_{\alpha_2(j)} + \\
 & \varepsilon F \text{sen}(m) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \text{var}_i \dot{u}_h \cos(\tau) d\tau}_{\alpha_3} + \\
 & \varepsilon F \sum_{j=2}^n \left( j^2 \frac{F_j}{F} \right) \text{sen}(jm + \nu_j) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \text{var}_i \dot{u}_h \cos(j\tau) d\tau}_{\alpha_3(j)}
 \end{aligned} \tag{6.35}$$

Utilizando os termos  $\alpha_i(j)$ , pode-se escrever que:

$$\begin{aligned}
 M(m) = & -\varepsilon \frac{2\xi}{\Omega} \alpha_1 + \varepsilon F \\
 & \left( \cos(m)\alpha_2 + \sum_{j=2}^n \left( j^2 \frac{F_j}{F} \right) \cos(jm + \nu_j)\alpha_2(j) + \right. \\
 & \left. \text{sen}(m)\alpha_3 + \sum_{j=2}^n \left( j^2 \frac{F_j}{F} \right) \text{sen}(jm + \nu_j)\alpha_3(j) \right)
 \end{aligned} \tag{6.36}$$

A equação (6.36) pode ser reescrita na forma:

$$\begin{aligned}
 M(m) = & -\varepsilon \frac{2\xi}{\Omega} \alpha_1 + \varepsilon F \sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2} \\
 & \left( \cos(m) \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}} + \sum_{j=2}^n \left( j^2 \frac{F_j}{F} \right) \cos(jm + \nu_j) \frac{\alpha_2(j)}{\sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}} + \right. \\
 & \left. \text{sen}(m) \frac{\alpha_3}{\sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}} + \sum_{j=2}^n \left( j^2 \frac{F_j}{F} \right) \text{sen}(jm + \nu_j) \frac{\alpha_3(j)}{\sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}} \right)
 \end{aligned} \tag{6.37}$$

Como  $\text{sen}(\eta) = \alpha_3 / \sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}$  e  $\cos(\eta) = \alpha_2 / \sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
 M(m) = & -\varepsilon \frac{2\xi}{\Omega} \alpha_1 + \varepsilon F \sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2} \left\{ \text{sen}(\eta + m) + \right. \\
 & \left. \sum_{j=2}^n \left( j^2 \frac{F_j}{F} \right) \frac{1}{\sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}} \right. \\
 & \left. \left( \cos(jm + \nu_j) \alpha_2(j) + \text{sen}(jm + \nu_j) \alpha_3(j) \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{6.38}$$

A Equação (6.38) pode ser reescrita na forma:

$$\begin{aligned}
 M(m) = & -\varepsilon \frac{2\xi}{\Omega} \alpha_1 + \varepsilon F \sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2} \left\{ \text{sen}(\eta + m) + \right. \\
 & \left. \sum_{j=2}^n \left( j^2 \frac{F_j}{F} \right) \frac{\sqrt{\alpha_2(j)^2 + \alpha_3(j)^2}}{\sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}} \right. \\
 & \left. \left( \frac{\cos(jm + \nu_j) \alpha_2(j)}{\sqrt{\alpha_2(j)^2 + \alpha_3(j)^2}} + \frac{\text{sen}(jm + \nu_j) \alpha_3(j)}{\sqrt{\alpha_2(j)^2 + \alpha_3(j)^2}} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{6.39}$$

Como  $\text{sen}(\bar{\eta}_j) \cos(jm + \nu_j) + \cos(\bar{\eta}_j) \text{sen}(jm + \nu_j) = \text{sen}(\bar{\eta}_j + jm + \nu_j)$ ,  
 $\text{sen}(\bar{\eta}_j) = \alpha_2(j) / \sqrt{\alpha_2(j)^2 + \alpha_3(j)^2}$  e  $\cos(\bar{\eta}_j) = \alpha_3(j) / \sqrt{\alpha_2(j)^2 + \alpha_3(j)^2}$ , tem-se  
 que:

$$\begin{aligned}
 M(m) = & -\varepsilon \frac{2\xi}{\Omega} \alpha_1 + \varepsilon F \sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2} \left\{ \text{sen}(\eta + m) + \right. \\
 & \left. \sum_{j=2}^n \left( j^2 \frac{F_j}{F} \right) \frac{\sqrt{\alpha_2(j)^2 + \alpha_3(j)^2}}{\sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}} \text{sen}(\bar{\eta}_j + jm + \nu_j) \right\}
 \end{aligned} \tag{6.40}$$

Definindo  $h_j = (j^2 F_j / F) \sqrt{\alpha_2(j)^2 + \alpha_3(j)^2} / \sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}$  e

$\gamma(m) = \text{sen}(\eta + m) + \sum_{j=2}^n h_j \text{sen}(\bar{\eta}_j + jm + \nu_j)$ , chega-se à expressão final da função

de Melnikov, considerando a introdução de super-harmônicos na excitação, a saber:

$$M(m) = -\varepsilon \frac{2\xi}{\Omega} \alpha_1 + \varepsilon \gamma(m) F \sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2} \quad (6.41)$$

Impondo que no caso crítico  $M(m) = 0$ , tem-se que:

$$\frac{2\xi\alpha_1/\Omega}{F\sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}} = \gamma(m) \quad (6.42)$$

Assim, não há interseção se:

$$\frac{2\xi\alpha_1/\Omega}{F\sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}} > \max_{m \in [0, 2\pi]} \{\gamma(m)\} = \bar{m} \quad (6.43)$$

ou seja,

$$F < \frac{2\xi\alpha_1/\Omega}{\sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}} \frac{1}{\bar{m}} = \frac{Fcr^h}{\bar{m}} = Fcr^{cont} \rightarrow \quad (6.44)$$

$$G = \frac{Fcr^{cont}}{Fcr^h} = \frac{1}{\bar{m}}$$

O objetivo do método de controle, como se observa na expressão (6.44), é obter um valor de  $\bar{m} < 1$ , sendo que o menor valor possível de  $\bar{m}$  fornece o valor ótimo ( $Fcr^{cont}$ ), ou seja, o controle ótimo.

Para uma órbita homoclínica a expressão (6.44) é suficiente para garantir que o sistema não apresente interseção, pois, como o sistema apresenta um único ponto de sela, é necessário somente evitar a interseção ou tangência entre a variedade estável e a instável do referido ponto de sela.

Para uma órbita heteroclínica a expressão (6.44) não é suficiente, pois o sistema apresenta dois pontos de sela. Ou seja, é necessário controlar a interseção do ramo superior e do ramo inferior, isto particularizado para o caso em estudo (um vale potencial delimitado por dois pontos de sela, Figura 6.1). A expressão (6.44) garante para uma órbita heteroclínica somente que a interseção do ramo

inferior não ocorrerá. Para se identificar a outra possível interseção, a expressão (6.44) pode ser reescrita como:

$$\bar{m}_{\text{inf}} = \max_{m \in [0, 2\pi]} \{\gamma(m)\} \rightarrow G_{\text{inf}} = \frac{Fcr_{\text{inf}}^{\text{cont}}}{Fcr_{\text{inf}}^h} = \frac{1}{\bar{m}_{\text{inf}}} \quad (6.45)$$

Por simetria, pode-se definir que o ramo superior é dado por:

$$\bar{m}_{\text{sup}} = -\min_{m \in [0, 2\pi]} \{\gamma(m)\} \rightarrow G_{\text{sup}} = \frac{Fcr_{\text{sup}}^{\text{cont}}}{Fcr_{\text{sup}}^h} = \frac{1}{\bar{m}_{\text{sup}}} \quad (6.46)$$

As expressões (6.45) e (6.46) garantem que a órbita heteroclínica não apresenta interseção tanto no ramo inferior como no superior. Perante estas particularidades tem-se que o método de controle deve levar em conta a natureza do sistema. Neste contexto, Lenci & Rega sugerem dois tipos de controle, a saber: controle unilateral (*one-side*) e controle global.

O controle *one-side* é indicado para órbitas homoclínicas, pois consegue apenas controlar um ramo da órbita. Quando aplicado a órbitas heteroclínicas verifica-se que, somente um ramo da órbita é controlado, sendo que o ramo não controlado apresenta a bifurcação global antes da bifurcação teórica associada. Assim, quando somente uma órbita homoclínica precisa ser controlada, o problema de otimização pode ser escrito na forma:

$$\max_{h_j, \nu_j} \{G^{\text{hom}}\} \text{ pela variação dos coeficientes de} \quad (6.47)$$

Fourier  $h_j$  e  $\nu_j$ , para  $j = 2, 3, \dots, n$

onde  $G^{\text{hom}} = G$ , expressão (6.44).

Já o controle global controla simultaneamente o ramo superior e inferior ( $G_{\text{inf}}$  e  $G_{\text{sup}}$ ) de uma órbita heteroclínica. Se a condição  $G^{\text{het}} = G_{\text{inf}} = G_{\text{sup}}$ , ou seja,  $\max_{m \in [0, 2\pi]} \{\gamma(m)\} = -\min_{m \in [0, 2\pi]} \{\gamma(m)\}$ , é satisfeita, o controle global pode ser escrito como o seguinte problema de otimização:

$$\max_{h_j, \nu_j} \{G^{\text{het}}\} \text{ pela variação dos coeficientes de} \quad (6.48)$$

$$\text{Fourier } h_j \text{ e } \nu_j, \text{ para } j = 2, 3, \dots, n$$

obedecendo a restrição  $\max_{m \in [0, 2\pi]} \{\gamma(m)\} = -\min_{m \in [0, 2\pi]} \{\gamma(m)\}$

A resolução dos problemas de otimização (6.47) e (6.48) fornece os valores ótimos de  $h_j$  e  $\nu_j$ . Uma vez determinados esses valores, que dependem do tipo da órbita e da quantidade de super-harmônicos, pode-se aplicar o método de controle aos modelos desacoplados, sendo que a magnitude da carga de cada super-harmônico é dada por:

$$\left( j^2 \frac{F_j}{F} \right) = h_j \frac{\sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}}{\sqrt{\alpha_2(j)^2 + \alpha_3(j)^2}} \quad (6.49)$$

### 6.3.3. Controle Ótimo

Os problemas (6.47) e (6.48) são independentes do sistema e da excitação (de fato, não dependem de  $F$ ,  $\Omega$  e  $\xi$ ) e, pelo menos em princípio, podem ser resolvidos sem nenhuma referência ao sistema mecânico considerado. Apesar desta simplificação, sua resolução não pode ser obtida analiticamente, e, assim, é necessária uma aproximação numérica. A resolução numérica dos problemas (6.47) e (6.48) já foi estudada e é apresentada por Lenci & Rega (2003a, 2003b, 2003c, 2005).

Os coeficientes ótimos de Fourier,  $h_j$  e  $\nu_j$ , para um número  $j$  crescente de super-harmônicos, são apresentados nas Tabelas 6.1 e 6.2, respectivamente, para o controle *one-side* e o controle global. Os valores aqui apresentados para os coeficientes  $h_j$  são os mesmos apresentados nos trabalhos de Lenci & Rega. Já os valores dos coeficientes  $\nu_j$  foram determinados a partir da resolução dos problemas de otimização, expressões (6.47) e (6.48), e são específicos para os casos aqui em estudo.

Tabela 6.1: Resultados numéricos dos problemas de otimização com o aumento do número de super-harmônicos no caso de controle *one-side*.

$j$	$G_j^{\text{hom}}$	$h_2, v_2$	$h_3, v_3$	$h_4, v_4$	$h_5, v_5$
2	1.4142	0.353553, $\pi$			
3	1.6180	0.552756, $\pi$	0.170789, 0		
4	1.7321	0.673525, $\pi$	0.333274, 0	0.096175, $\pi$	
5	1.8019	0.751654, $\pi$	0.462136, 0	0.215156, $\pi$	0.059632, 0
...	....	...	...	...	...
$\infty$	2	1, $\pi$	1, 0	1, $\pi$	1, 0

Como se observa na Tabela 6.2, as soluções globais ótimas não têm super-harmônicos pares. Assim, a solução do problema de otimização (6.48) é dada por

$$\gamma(m) = \sin(\eta + m) + \sum_{j=1}^{(n-1)/2} h_{2j+1} \sin(\bar{\eta}_{2j+1} + (2j+1)m + v_{2j+1}) \quad (6.50)$$

ou seja, pela subclasse de excitações simétricas, onde a condição  $\max_{m \in [0, 2\pi]} \{\gamma(m)\} = -\min_{m \in [0, 2\pi]} \{\gamma(m)\}$  é trivialmente satisfeita.

Tabela 6.2: Resultados numéricos dos problemas de otimização com o aumento do número de super-harmônicos no caso de controle global.

$j$	$G_j^{\text{het}}$	$h_3, v_3$	$h_5, v_5$	$h_7, v_7$	$h_9, v_9$
3	1.1547	-0.166667, $\pi$			
5	1.2071	-0.232259, $\pi$	0.060987, 0		
7	1.2310	-0.264943, $\pi$	0.100220, 0	-0.028897, $\pi$	
9	1.2440	-0.284314, $\pi$	0.125257, 0	-0.053460, $\pi$	0.016365, 0
...	....	...	...	...	...
$\infty$	1.2732	-0.333333, $\pi$	0.200000, 0	-0.142857, $\pi$	0.111111, 0

As colunas de ganhos  $G_j^h$  nas Tabelas 6.1 e 6.2 permitem observar que, em geral, os ganhos aumentam quando se aumenta o número de super-harmônicos. Entretanto, os ganhos do controle global são menores que aqueles do controle *one-side*, concordando com as expectativas teóricas (Lenci & Rega, 2005). A

diferença é quantitativamente significativa, de onde se pode concluir que os controles *one-side* são muito mais flexíveis do ponto de vista teórico. A contrapartida desta boa propriedade é que eles requerem maiores amplitudes para os super-harmônicos. Assim, o controle *one-side* exige mais dispêndio de energia. Na última linha de cada tabela, apresentam-se, para comparação, os valores dos coeficientes  $h_j$  considerando um número infinito de super-harmônicos. Estes valores representam os limites superiores das soluções ótimas.

## 6.4. Aplicação do Controle Ótimo

Com base na formulação desenvolvida anteriormente estuda-se, a seguir, o controle dos modelos desacoplados em estudo.

### 6.4.1. Modelo de Augusti

#### 6.4.1.1. Modelo Perfeito

Partindo da expressão (6.8) e considerando que  $u_{10} = 0$ , tem-se a expressão final do sistema conservativo do modelo perfeito desacoplado, a saber:

$$h(u, \dot{u}) = \frac{1}{2} \dot{u}^2 \cos^2\left(\frac{u\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\dot{u}^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{u\sqrt{2}}{2}\right) \cos^2\left(\frac{u\sqrt{2}}{2}\right)}{-1 + 2 \cos^2\left(\frac{u\sqrt{2}}{2}\right)} + \frac{u^2}{2\lambda\Omega^2} - \frac{1}{\Omega^2} \left(1 - \sqrt{1 - 2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{u\sqrt{2}}{2}\right)}\right) \quad (6.51)$$

Utilizando o princípio da conservação de energia, obtém-se a fronteira de estabilidade da posição de equilíbrio pré-crítica (bacia de atração conservativa), Figura 6.2(a). Já o comportamento da energia potencial ( $\bar{V}_u(u)$ , expressão (6.1b)) é mostrado na Figura 6.2(b).

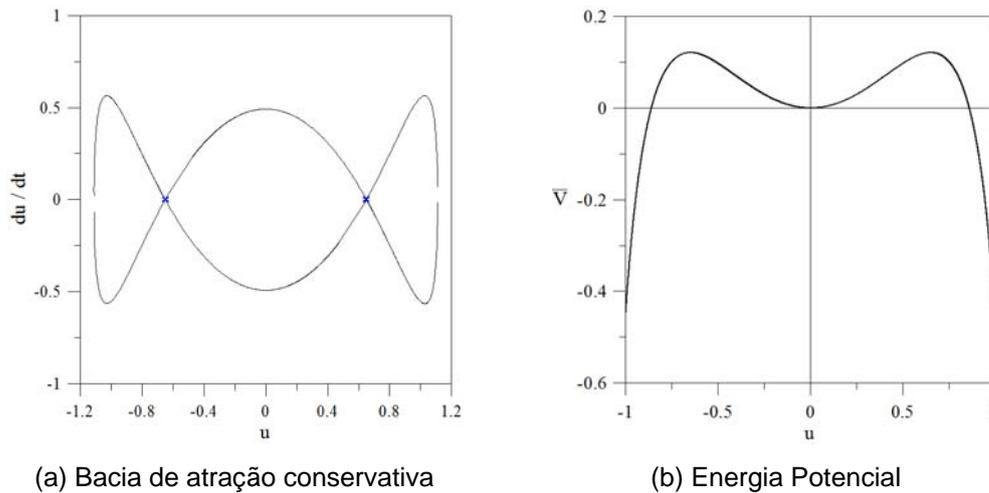


Figura 6.2: Variedades e perfil da energia potencial para  $\Omega = 1/3$  e  $\lambda = 0.9$ . Modelo perfeito desacoplado.

Verifica-se que a fronteira da bacia de atração conservativa é definida por dois pontos de sela, que estão localizados nos pontos de maior energia potencial e que limitam o vale potencial pré-crítico. Ou seja, a fronteira de estabilidade do modelo perfeito desacoplado é delimitada por duas órbitas heteroclínicas.

Para um vale potencial delimitado por duas selas, a expressão que representa a órbita heteroclínica em função do tempo deve tender para o infinito nos pontos sela e ser nula para  $\tau = 0$ , como ilustra a Figura 6.3.

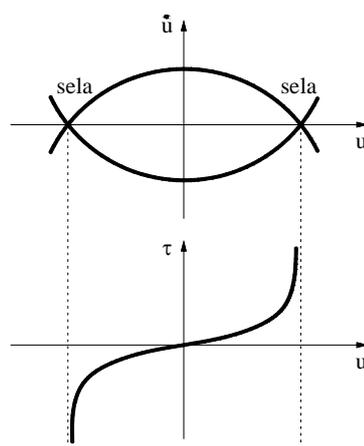


Figura 6.3: Ilustração de uma órbita heteroclínica.

Assim, a expressão (6.10), que representa agora a órbita heteroclínica, toma a forma:

$$\tau(u_{\text{het}}) = \int_{-u}^u \frac{1}{\dot{u}_{\text{het}}} du_{\text{het}} \quad (6.52)$$

Na Figura 6.4 tem-se a variação da coordenada  $u_{\text{het}}$  em função do tempo.

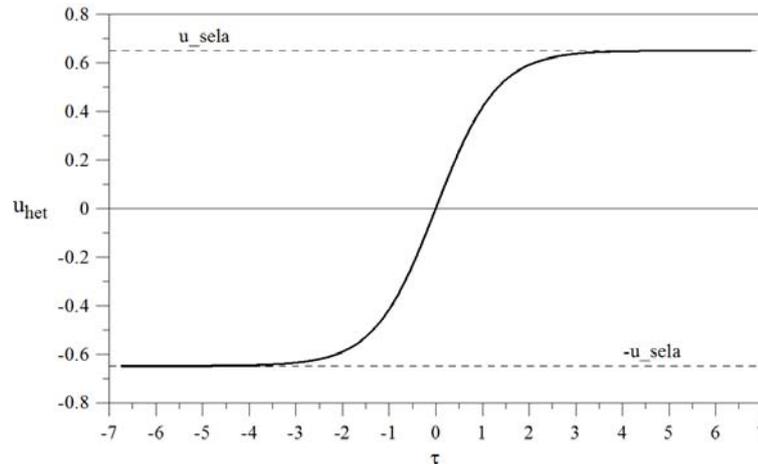


Figura 6.4: Órbita heteroclínica para  $\Omega = 1/3$  e  $\lambda = 0.9$ . Modelo perfeito desacoplado.

Em virtude de a função ser ímpar, para aplicar o método de controle, é necessário utilizar apenas metade da função (6.52), ou seja:

$$\tau(u_{\text{het}}) = \int_0^u \frac{1}{\dot{u}_{\text{het}}} du_{\text{het}} \quad (6.53)$$

Uma vez determinada a equação da órbita heteroclínica e lembrando que  $d\tau = du_{\text{het}}/\dot{u}_{\text{het}}$  e  $\text{var}_1 = \cos(u_{\text{het}}\sqrt{2}/2)$ , tem-se que as funções  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2(j)$  e  $\alpha_3(j)$  são dadas por:

$$\alpha_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}_{\text{het}}^2 d\tau = \int_{-u_{\text{sela}}}^{u_{\text{sela}}} \dot{u}_{\text{het}}^2 \frac{du_{\text{het}}}{\dot{u}_{\text{het}}} = \int_{-u_{\text{sela}}}^{u_{\text{sela}}} \dot{u}_{\text{het}} du_{\text{het}} \quad (6.54a)$$

$$\alpha_2(j) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{u_{\text{het}}\sqrt{2}}{2}\right) \dot{u}_{\text{het}} \text{sen}(j\tau) d\tau = \int_{-u_{\text{sela}}}^{u_{\text{sela}}} \cos\left(\frac{u_{\text{het}}\sqrt{2}}{2}\right) \text{sen}\left(j \int_0^u \frac{du_{\text{het}}}{\dot{u}_{\text{het}}}\right) du_{\text{het}} \quad (6.54b)$$

$$\alpha_3(j) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{u_{\text{het}}\sqrt{2}}{2}\right) \dot{u}_{\text{het}} \cos(j\tau) d\tau =$$

$$\int_{-u_{\text{sela}}}^{u_{\text{sela}}} \cos\left(\frac{u_{\text{het}}\sqrt{2}}{2}\right) \cos\left(j \int_0^u \frac{du_{\text{het}}}{\dot{u}_{\text{het}}}\right) du_{\text{het}}$$
(6.54c)

Para obter  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  tem-se que  $j = 1$  (parcela da excitação harmônica).

Com todos os parâmetros definidos, pode-se aplicar o método de controle. Porém, inicialmente, são determinados os valores das bifurcações globais heteroclínicas para a região de ressonância fundamental do sistema através da expressão (6.30), Figura 6.5. A expressão (6.30) é suficiente para determinar a bifurcação heteroclínica, pois é válida a restrição (6.48) relativa a uma órbita heteroclínica simétrica ( $Fcr^h = Fcr_{\text{inf}}^h = Fcr_{\text{sup}}^h$ ).

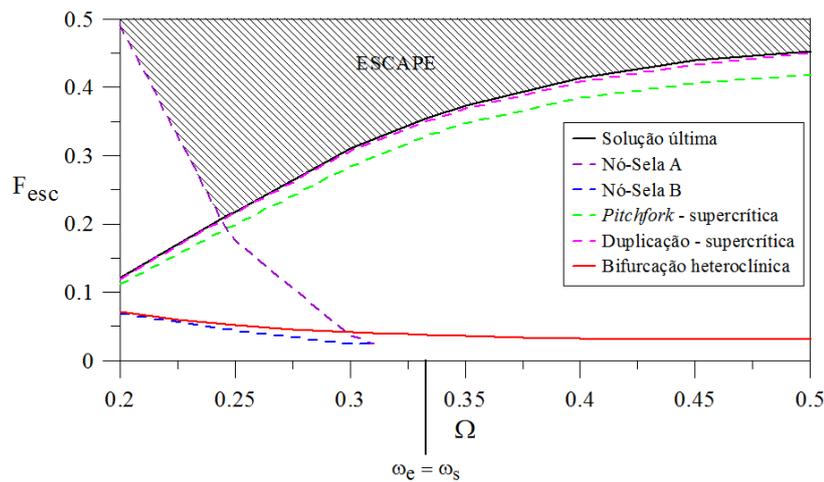


Figura 6.5: Mapeamento das bifurcações locais na região de ressonância fundamental para  $\lambda = 0.9$  e  $\zeta = 0.01$ . Modelo perfeito desacoplado.

Observa-se que a bifurcação heteroclínica acontece, como esperado, para um valor inferior ao valor de escape do sistema. Neste ponto se iniciam os fenômenos dinâmicos indesejados que levam a erosão da bacia.

Na estratégia de controle adota-se um super-harmônico de ordem três na excitação harmônica do modelo, com isso, a equação de movimento toma a forma:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1 + \cos(u\sqrt{2})}{2 \cos(u\sqrt{2})} \right) \ddot{u} + \frac{\sqrt{2} \operatorname{sen}(u\sqrt{2})}{2 + 2 \cos(2u\sqrt{2})} \dot{u}^2 + \frac{u}{\lambda \Omega^2} - \\
& \frac{\sqrt{2} \operatorname{sen}\left(\frac{u\sqrt{2}}{2}\right) \cos\left(\frac{u\sqrt{2}}{2}\right)}{\Omega^2 \sqrt{1 - 2 \sin^2\left(\frac{u\sqrt{2}}{2}\right)}} + \frac{2\xi}{\Omega} \dot{u} = \\
& F \left( \cos\left(\frac{u\sqrt{2}}{2}\right) \operatorname{sen}(\tau) + 9 \frac{F_3}{F} \cos\left(\frac{u\sqrt{2}}{2}\right) \operatorname{sen}(3\tau + \nu_3) \right)
\end{aligned} \tag{6.55}$$

Os valores ótimos referentes a esta situação são dados na Tabela 6.2, ou seja,  $h_{3otimo} = -0.166667$  e  $\nu_{3otimo} = \pi$ , que, pela expressão (6.49), fornece  $9F_3 / F = -1.1152799$ .

Para exemplificação, define-se  $\Omega = 0.2465$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi = 0.01$ , situação onde se observa o menor valor de escape (situação mais perigosa - ver Figura 6.5). Neste caso, constata-se, a partir da expressão (6.30), que a magnitude da carga onde ocorre a bifurcação heteroclínica é  $F = Fcr_{inf}^h = Fcr_{sup}^h = 0.0528979$ . Quando se considera o controle com os valores ótimos, verifica-se, através das expressões (6.45) ou (6.46), que a bifurcação passa a ocorrer para  $F = Fcr_{inf}^{cont} = Fcr_{sup}^{cont} = 0.0610813$ , ou seja, tem-se um ganho de aproximadamente 15.47%, como se mostra na Tabela 6.2.

A comprovação do ganho que proporciona o método de controle é apresentada a seguir através da análise dos diagramas de bifurcação, das fronteiras de estabilidade (variedades invariantes), das medidas de integridade e das bacias de atração.

Verifica-se nos diagramas de bifurcação em função do parâmetro da carga, Figura 6.6, que, inicialmente, ambos apresentam a solução de período um, P1, que desaparece através de uma bifurcação nó-sela. Após outra bifurcação nó-sela surge a solução estável P1' (para o sistema sem controle) e P1' e P1'' (para o sistema controlado), que se tornam instáveis após uma bifurcação *pitchfork* que dá origem a duas soluções estáveis que permanecem até o momento do escape. Neste caso o escape acontece primeiro para o modelo controlado.

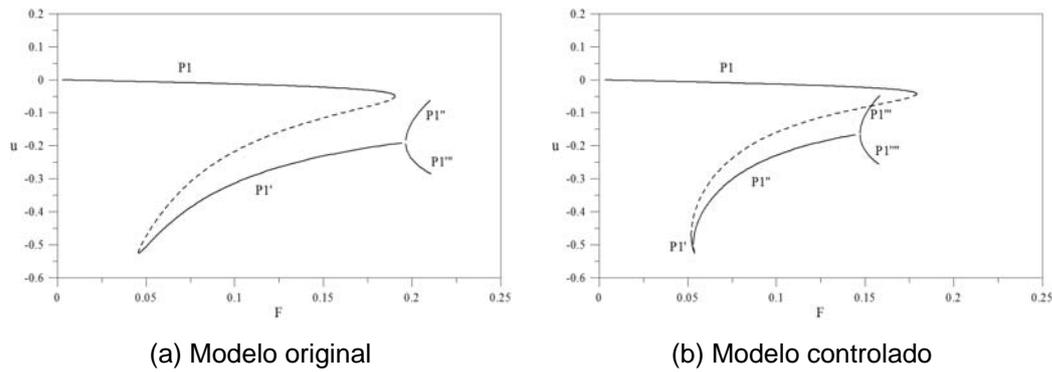


Figura 6.6: Diagramas de bifurcação para  $\Omega = 0.2465$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi = 0.01$ , modelo original e modelo controlado ( $9F_3/F = -1.115279$  e  $\nu_{3otimo} = \pi$ ). Modelo perfeito desacoplado.

Embora se constate que o valor final de escape seja menor para o modelo controlado, verifica-se através das variedades invariantes mostradas na Figura 6.7 que para a bifurcação teórica,  $F = 0.0528979$ , o modelo original apresenta a bifurcação heteroclínica, como esperado, mas o mesmo não acontece para o modelo controlado, ou seja, a estratégia de controle retardou a interseção entre as variedades estáveis e instáveis do sistema.

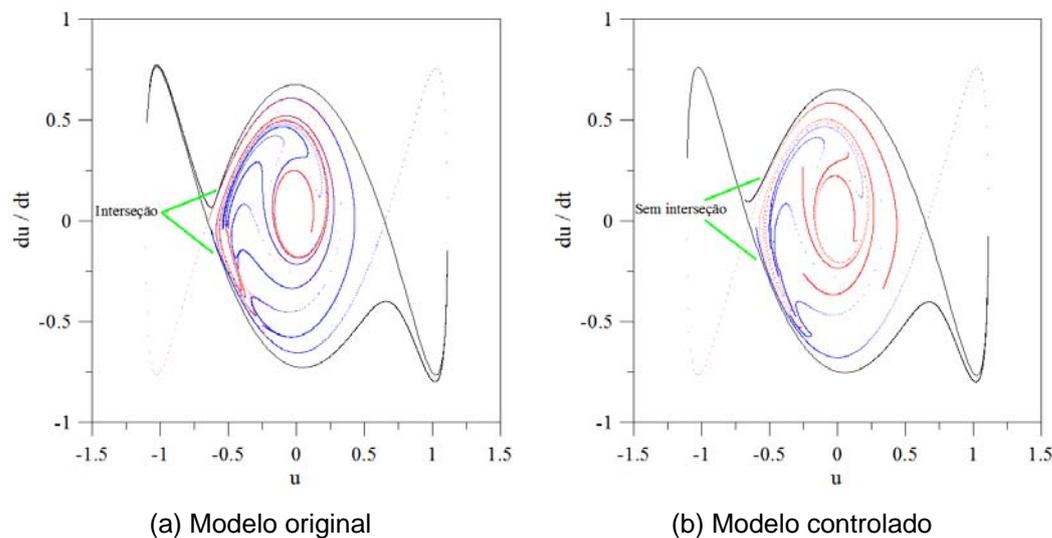
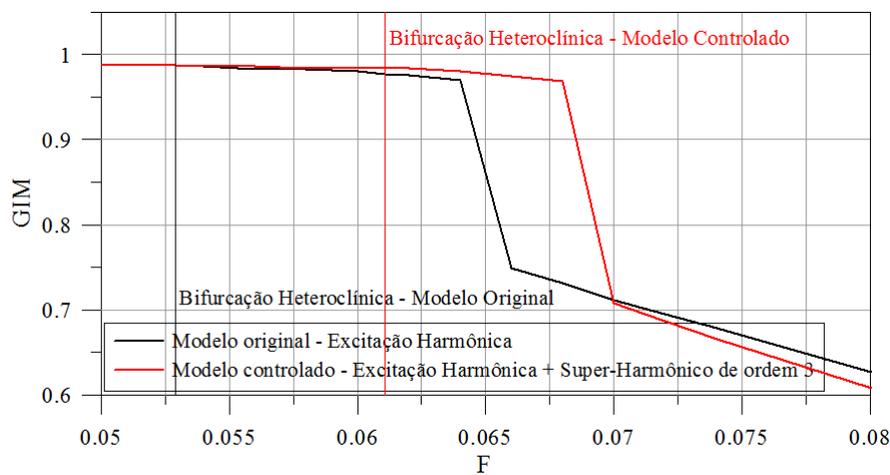


Figura 6.7: Variedades invariantes associadas às fronteiras de estabilidade para  $F = 0.0528979$ ,  $\Omega = 0.2465$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi = 0.01$ , modelo original e modelo controlado ( $9F_3/F = -1.115279$  e  $\nu_{3otimo} = \pi$ ). Modelo perfeito desacoplado.

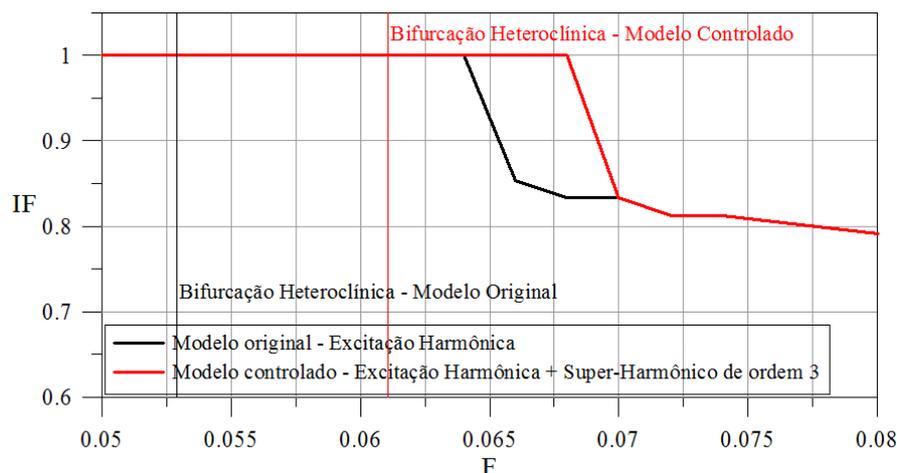
O ganho que a estratégia de controle proporciona, cerca de 15,47%, é observado de uma forma mais clara quando se confrontam as medidas de integridade GIM e IF do modelo original e o modelo controlado, mostradas na Figura 6.8.

Considera-se na medida de integridade GIM a soma de toda a área compacta em 2D, ou seja, toda a área compacta bacia da segura. Já a medida IF considera o raio do maior círculo inscrito dentro da mesma região segura.

Em ambas as medidas de integridade, GIM e IF (que foram normalizadas em função das magnitudes GIM e IF para  $F = 0$ ), verifica-se o indiscutível ganho que a adição do super-harmônico de ordem 3 provoca no modelo perfeito desacoplado, ou seja, constata-se que a erosão da bacia segura no modelo controlado inicia-se mais tarde. Isto aumenta a margem de segurança da estrutura, aumentando a magnitude das perturbações que pode sofrer a estrutura sem que perca sua estabilidade.



(a) Medida de integridade GIM



(b) Medida de integridade IF

Figura 6.8: Medidas de integridade GIM e IF para  $\Omega = 0.2465$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi = 0.01$ , modelo original e modelo controlado ( $9F_3/F = -1.115279$  e  $\nu_{3otimo} = \pi$ ). Modelo perfeito desacoplado.

Observando as bacias de atração mostradas na Figura 6.9, pode-se compreender melhor o efeito do controle. Verifica-se para  $F = 0.06$  que em ambas as situações não há erosão. Quando  $F = 0.066$  constata-se que começa a erosão da bacia do modelo original enquanto a bacia do modelo controlado está ainda intacta. Já para  $F = 0.07$  observa-se o início da erosão da bacia do modelo controlado, sendo que a erosão da bacia do modelo original já está bem acentuada.

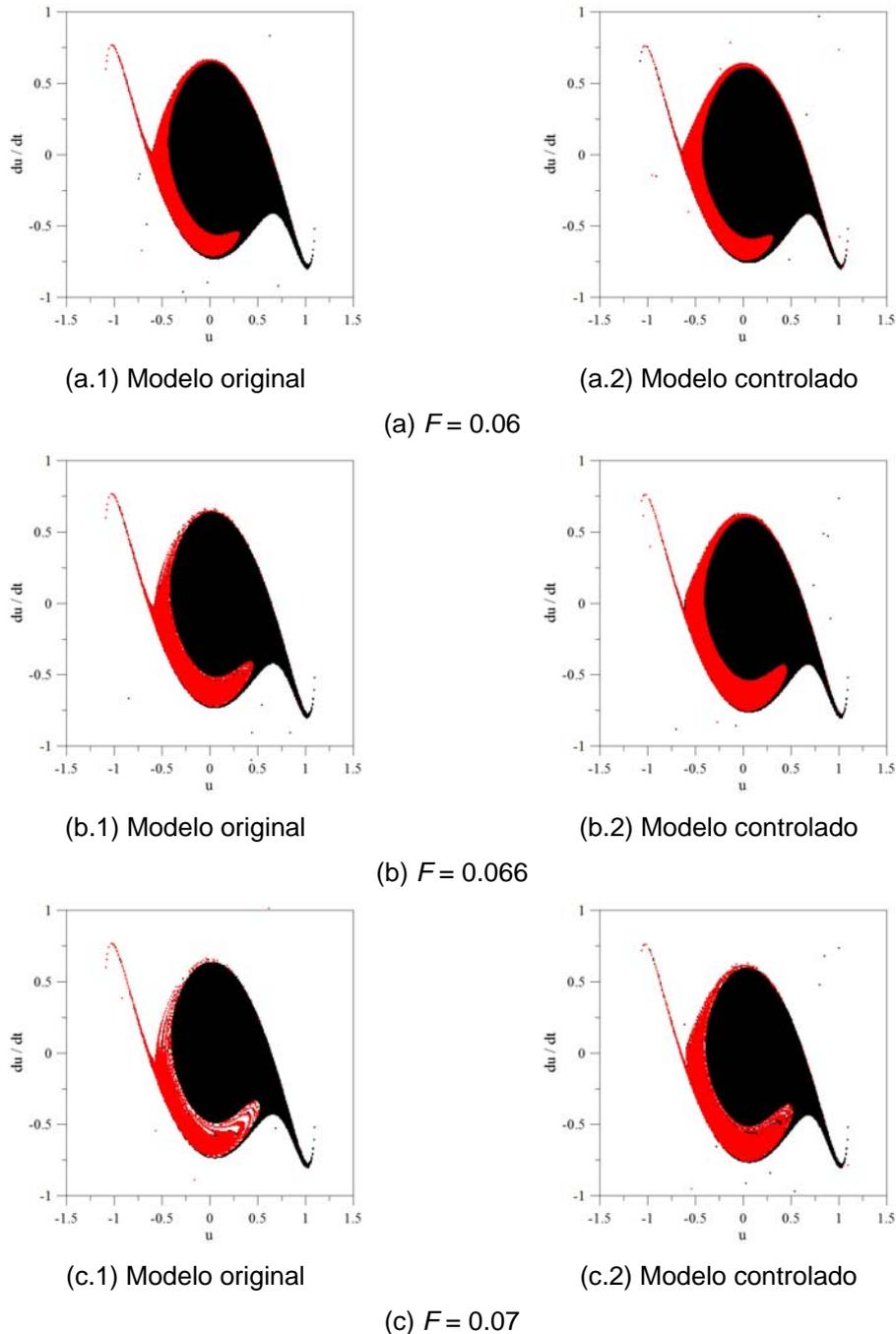


Figura 6.9: Bacias de atração para  $\Omega = 0.2465$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi = 0.01$ , modelo original e modelo controlado ( $9F_3 / F = -1.115279$  e  $\nu_{3otimo} = \pi$ ). Modelo perfeito desacoplado.

### 6.4.1.2. Modelo com Imperfeição Geométrica

A expressão final do sistema conservativo para o modelo desacoplado com imperfeição geométrica é dada pela expressão (6.8), a saber:

$$h(u, \dot{u}) = \frac{1}{2} \dot{u}^2 \cos^2\left(\frac{u\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\dot{u}^2 \sin^2\left(\frac{u\sqrt{2}}{2}\right) \cos^2\left(\frac{u\sqrt{2}}{2}\right)}{-1 + 2 \cos^2\left(\frac{u\sqrt{2}}{2}\right)} + \frac{(u - u_{10})^2}{2\lambda\Omega^2} - \frac{1}{\Omega^2} \left( \sqrt{1 - 2 \sin^2\left(\frac{u_{10}\sqrt{2}}{2}\right)} - \sqrt{1 - 2 \sin^2\left(\frac{u\sqrt{2}}{2}\right)} \right) \quad (6.56)$$

Usando o princípio da conservação de energia, determina-se a fronteira de estabilidade da posição de equilíbrio pré-crítica (bacia de atração conservativa), Figura 6.10(a), e da expressão (6.1b), obtém-se o perfil da energia potencial, Figura 6.10(b). Verifica-se que a bacia de atração conservativa é limitada pelas variedades de um ponto de sela, ou seja, tem-se que a fronteira de estabilidade do modelo desacoplado com imperfeição é delimitada por uma órbita homoclínica.

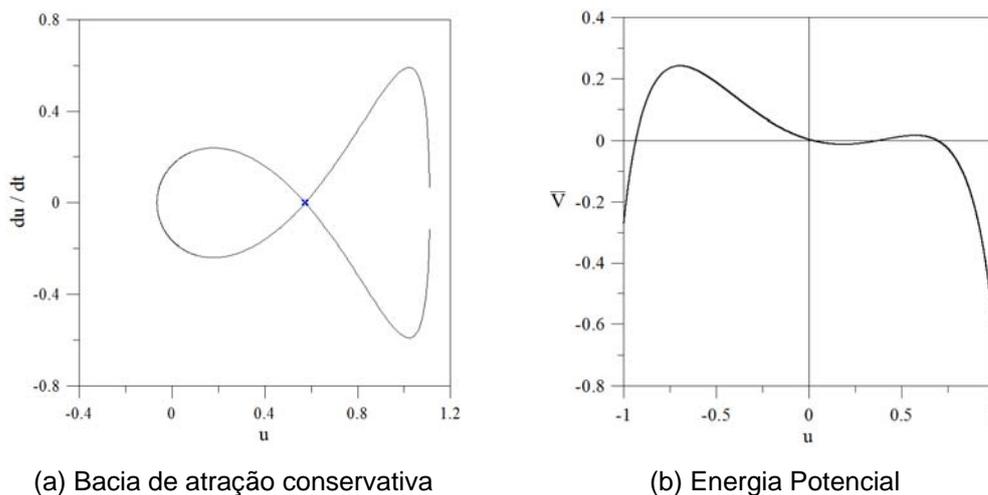


Figura 6.10: Variedades e perfil da energia potencial para  $u_{10} = 1^\circ$ ,  $\Omega = 1/3$  e  $\lambda = 0.9$ .  
Modelo desacoplado com imperfeição geométrica.

A função que descreve a variação da órbita homoclínica em função do tempo deve ser igual ao limite da órbita para  $\tau = 0$  e tender para  $-\infty$  ou  $+\infty$  quando o tempo cresce, como ilustrado na Figura 6.11.

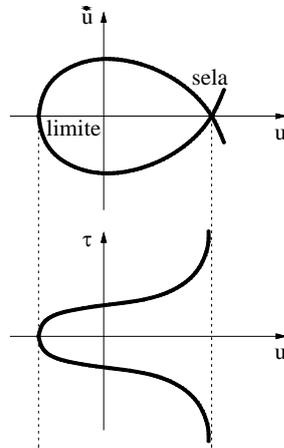


Figura 6.11: Ilustração de uma órbita homoclínica.

A partir da expressão (6.10) e da Figura 6.11, verifica-se que a função que representa uma órbita homoclínica deve ser dividida em duas partes, a saber:

$$\tau_1(u_{\text{hom}}) = -\int_{\text{limite}}^u \frac{1}{\dot{u}_{\text{hom}}} du_{\text{hom}}, \text{ para } -\infty < \tau \leq 0 \quad (6.57a)$$

$$\tau_2(u_{\text{hom}}) = \int_{\text{limite}}^u \frac{1}{\dot{u}_{\text{hom}}} du_{\text{hom}}, \text{ para } 0 < \tau < \infty \quad (6.57b)$$

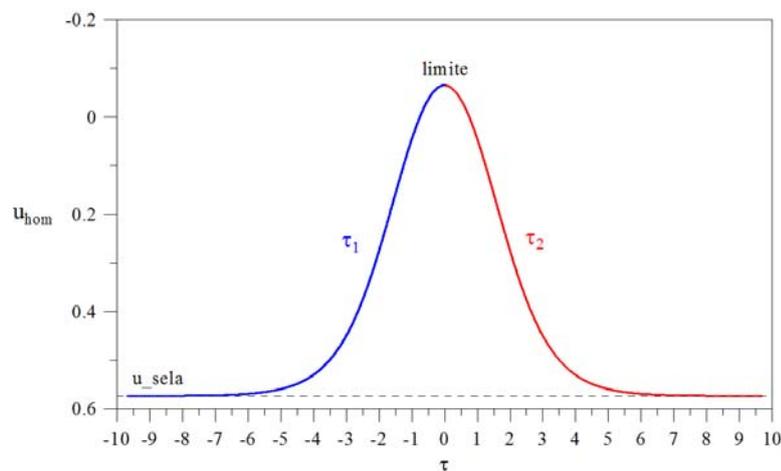


Figura 6.12: Órbita homoclínica para  $u_{10} = 1^\circ$ ,  $\Omega = 1/3$  e  $\lambda = 0.9$ . Modelo com imperfeição geométrica.

A Figura 6.12 mostra a variação da coordenada  $u_{\text{hom}}$  em função do tempo, obtida através das expressões (6.57).

Com a órbita homoclínica, expressões (6.57), e lembrando que  $d\tau_1 = -du_{\text{hom}}/\dot{u}_{\text{hom}}$ ,  $d\tau_2 = du_{\text{hom}}/\dot{u}_{\text{hom}}$  e  $\text{var}_1 = \cos(u_{\text{hom}}\sqrt{2}/2)$ , tem-se que as funções  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2(j)$  e  $\alpha_3(j)$  são dadas por:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}_{\text{hom}}^2 d\tau = \int_{-\infty}^0 \dot{u}_{\text{hom}}^2 d\tau_1 + \int_0^{\infty} \dot{u}_{\text{hom}}^2 d\tau_2 = \\ &= -\int_{u_{\text{sela}}}^{\text{limite}} \dot{u}_{\text{hom}} du_{\text{hom}} + \int_{\text{limite}}^{u_{\text{sela}}} \dot{u}_{\text{hom}} du_{\text{hom}} \end{aligned} \quad (6.58a)$$

$$\begin{aligned} \alpha_2(j) &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{var}_1 \dot{u}_{\text{hom}} \text{sen}(j\tau) d\tau = \\ &= -\int_{-\infty}^0 \text{var}_1 \dot{u}_{\text{hom}} \text{sen}(j\tau_1) d\tau_1 + \int_0^{\infty} \text{var}_1 \dot{u}_{\text{hom}} \text{sen}(j\tau_2) d\tau_2 = \\ &= \int_{u_{\text{sela}}}^{\text{limite}} \text{var}_1 \text{sen}\left(-j \int_{\text{limite}}^u \frac{du_{\text{hom}}}{\dot{u}_{\text{hom}}}\right) du_{\text{hom}} + \int_{\text{limite}}^{u_{\text{sela}}} \text{var}_1 \text{sen}\left(j \int_{\text{limite}}^u \frac{du_{\text{hom}}}{\dot{u}_{\text{hom}}}\right) du_{\text{hom}} \end{aligned} \quad (6.58b)$$

$$\begin{aligned} \alpha_3(j) &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{var}_1 \dot{u}_{\text{hom}} \cos(j\tau) d\tau = \\ &= -\int_{-\infty}^0 \text{var}_1 \dot{u}_{\text{hom}} \cos(j\tau_1) d\tau_1 + \int_0^{\infty} \text{var}_1 \dot{u}_{\text{hom}} \cos(j\tau_2) d\tau_2 = \\ &= \int_{u_{\text{sela}}}^{\text{limite}} \text{var}_1 \cos\left(-j \int_{\text{limite}}^u \frac{du_{\text{hom}}}{\dot{u}_{\text{hom}}}\right) du_{\text{hom}} + \int_{\text{limite}}^{u_{\text{sela}}} \text{var}_1 \cos\left(j \int_{\text{limite}}^u \frac{du_{\text{hom}}}{\dot{u}_{\text{hom}}}\right) du_{\text{hom}} \end{aligned} \quad (6.58c)$$

Para se entender o efeito do controle, compara-se na Figura 6.13 a carga associada à bifurcação homoclínica na região de ressonância fundamental, dada pela expressão (6.30), com as fronteiras de estabilidade. Como esperado, as bifurcações homoclínicas acontecem para valores inferiores aos valores de escape. Porém, comparando com modelo perfeito, Figura 6.5, observa-se que as cargas das bifurcações homoclínicas são substancialmente reduzidas e estão mais próximas das cargas de escape que no caso perfeito, ou seja, a presença da imperfeição geométrica torna naturalmente o modelo mais sensível, pois, logo após a bifurcação homoclínica, ocorre uma acentuada erosão seguida de escape.

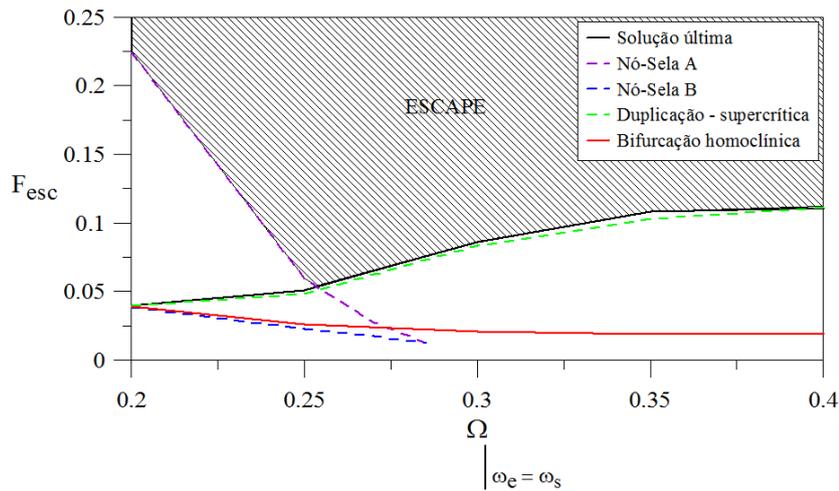


Figura 6.13: Mapeamento das bifurcações locais na região de ressonância fundamental para  $u_{10} = 1^\circ$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi = 0.01$ . Modelo com imperfeição geométrica desacoplado.

A estratégia de controle consiste na adição de um super-harmônico de ordem dois à excitação harmônica. Neste caso tem-se a equação de movimento:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1 + \cos(u\sqrt{2})}{2 \cos(u\sqrt{2})} \right) \ddot{u} + \frac{\sqrt{2} \operatorname{sen}(u\sqrt{2})}{2 + 2 \cos(2u\sqrt{2})} \dot{u}^2 + \frac{u - u_{10}}{\lambda \Omega^2} - \\ & \frac{\sqrt{2}}{\Omega^2} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{u\sqrt{2}}{2}\right) \cos\left(\frac{u\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{1 - 2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{u\sqrt{2}}{2}\right)}} + \frac{2\xi}{\Omega} \dot{u} = \\ & F \left( \cos\left(\frac{u\sqrt{2}}{2}\right) \operatorname{sen}(\tau) + 4 \frac{F_2}{F} \cos\left(\frac{u\sqrt{2}}{2}\right) \operatorname{sen}(2\tau + \nu_2) \right) \end{aligned} \quad (6.59)$$

Os valores ótimos nesta situação são dados na Tabela 6.1, ou seja,  $h_{2otimo} = 0.353553$  e  $\nu_{2otimo} = \pi$ . Assim, pela expressão (6.49), tem-se que  $4F_2 / F = 1.337189$ .

Para demonstrar a aplicação do controle, considera-se  $u_{10} = 1^\circ$ ,  $\Omega = 0.254$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi = 0.01$ . Nesta situação ocorre o menor valor de escape (situação mais perigosa), Figura 6.13. Usando a expressão (6.30), verifica-se que a bifurcação homoclínica acontece para  $F = F_{cr}^h = 0.02561$ . Com a adição do controle constata-se que a bifurcação passa a ocorrer para  $F = F_{cr}^{cont} = 0.03622$

(expressão (6.44)), ou seja, tem-se um ganho de aproximadamente 41.42%, como se constata na Tabela 6.1.

Através da análise numérica, pode-se constatar a eficiência do método de controle. Na Figura 6.14 apresentam-se os diagramas de bifurcação em função do parâmetro da carga. Pode-se observar que os diagramas possuem comportamentos similares àqueles do modelo perfeito, Figura 6.6. Nota-se, porém, uma redução nas cargas de bifurcação devido à introdução da imperfeição, e que o modelo controlado apresenta uma carga de escape ligeiramente inferior à do modelo original imperfeito.

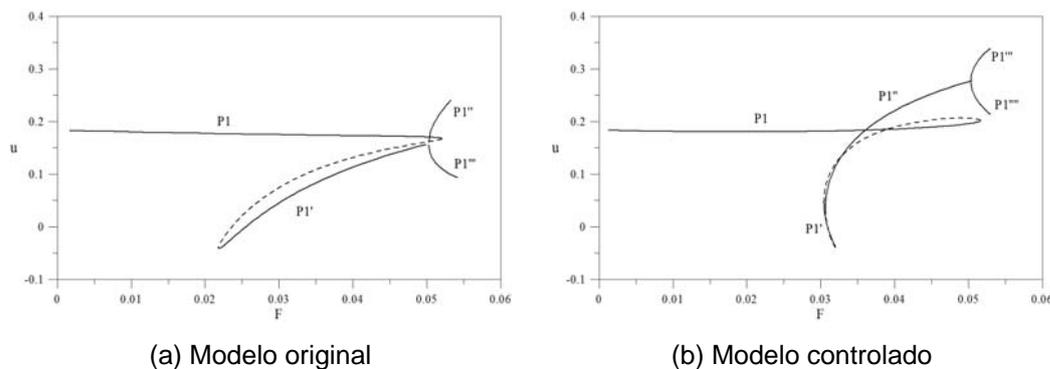


Figura 6.14: Diagramas de bifurcação para  $u_{10} = 1^\circ$ ,  $\Omega = 0.254$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi = 0.01$ , modelo original e modelo controlado ( $4F_2 / F = 1.337189$  e  $v_{2otimo} = \pi$ ). Modelo com imperfeição geométrica desacoplado.

Apesar deste fato negativo, o método de controle mostra ganhos indiscutíveis no comportamento do modelo imperfeito. Mostram-se na Figura 6.15 as variedades estáveis e instáveis do ponto de sela associado à fronteira de estabilidade. Verifica-se que no modelo original imperfeito a interseção das variedades ocorre para  $F = 0.02561$  (bifurcação homoclínica), Figura 6.15(a). Já o modelo controlado com a adição do super-harmônico não apresenta interseção para este nível de carregamento.

A Figura 6.16 mostra uma comparação entre as medidas de integridade GIM e IF do modelo original e do modelo controlado. Verifica-se um aumento de cerca de 41.42% na carga onde começa o processo de erosão, aumentando a margem de segurança da estrutura. Como no modelo perfeito, as medidas foram normalizadas em função das magnitudes GIM e IF para  $F = 0$  do modelo sem controle.

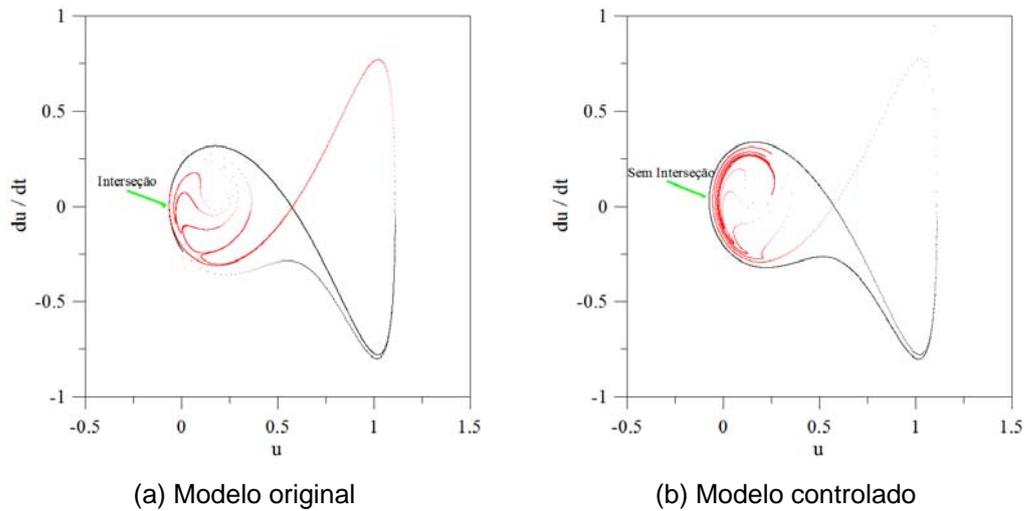


Figura 6.15: Fronteiras de estabilidade para  $F = 0.02561$ ,  $u_{10} = 1^\circ$ ,  $\Omega = 0.254$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi = 0.01$ , o modelo original e modelo controlado ( $4F_2/F = 1.337189$  e  $\nu_{2otimo} = \pi$ ). Modelo com imperfeição geométrica desacoplado.

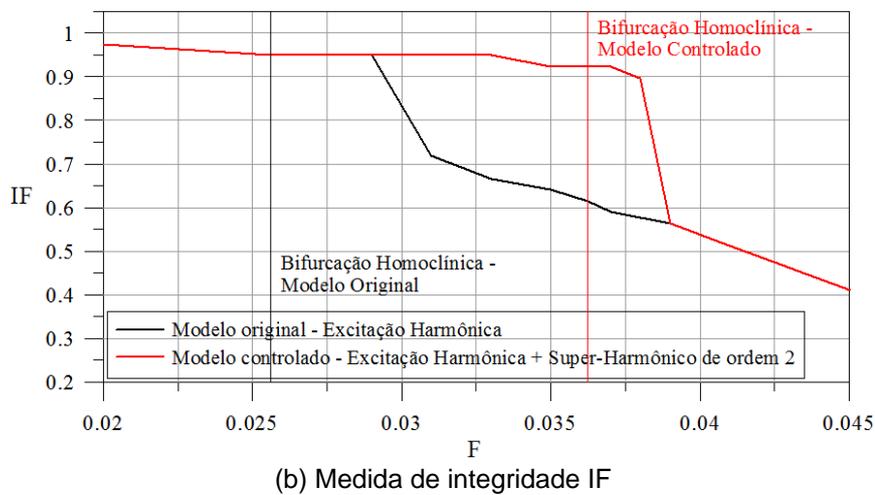
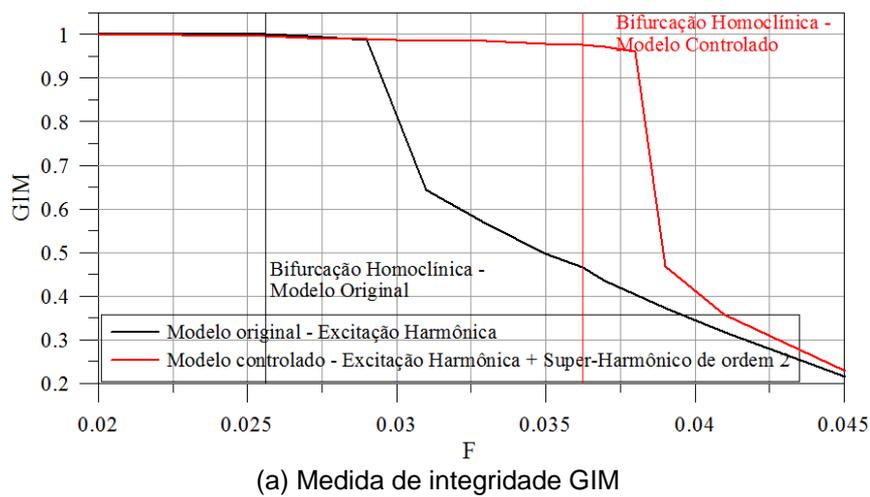


Figura 6.16: Medidas de integridade GIM e IF para  $u_{10} = 1^\circ$ ,  $\Omega = 0.254$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi = 0.01$ , modelo original e modelo controlado ( $4F_2/F = 1.337189$  e  $\nu_{2otimo} = \pi$ ). Modelo com imperfeição geométrica desacoplado.

Esse ganho pode ser verificado no comportamento das bacias de atração, Figura 6.17. A erosão do modelo original começa para  $F = 0.029$ , enquanto que a erosão do modelo controlado começa somente para  $F = 0.039$  quando a erosão do modelo original já está bastante acentuada.

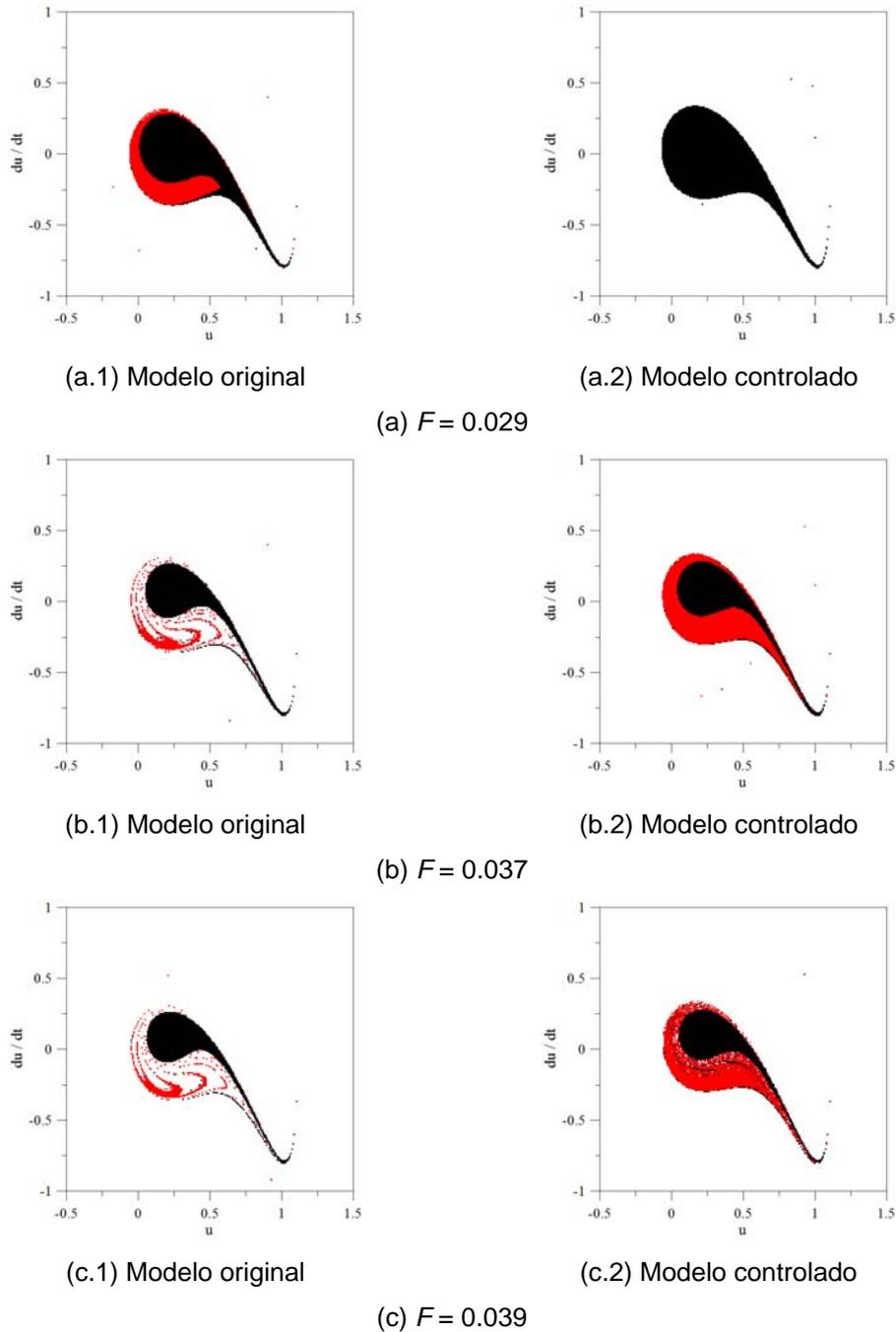
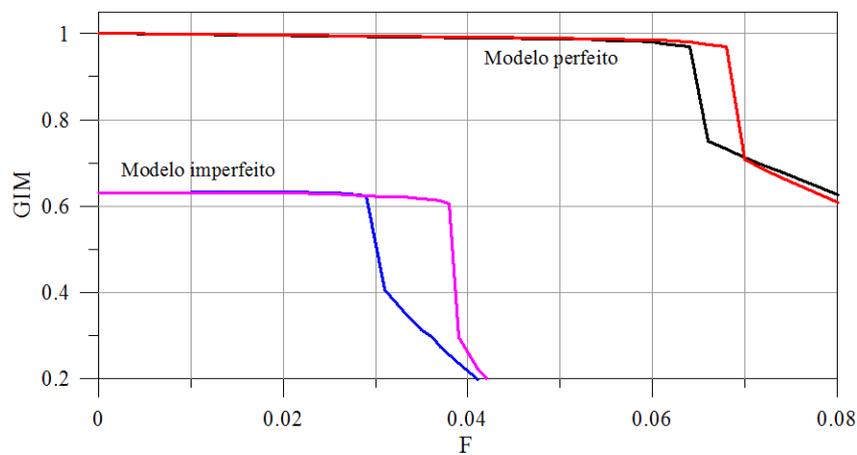
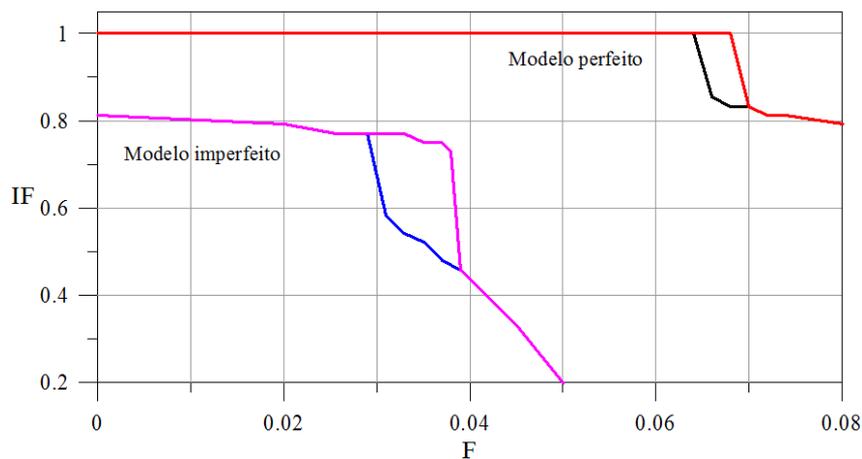


Figura 6.17: Bacias de atração para  $u_{10} = 1^\circ$ ,  $\Omega = 0.254$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi = 0.01$ , modelo original e modelo controlado ( $4F_2 / F = 1.337189$  e  $v_{2otimo} = \pi$ ). Modelo com imperfeição geométrica desacoplado.

Por fim, apresenta-se na Figura 6.18 uma comparação entre as medidas de integridade, GIM e IF, do modelo perfeito (original e controlado) e do modelo com imperfeição geométrica (original e controlado). No modelo perfeito considera-se  $\Omega = 0.2465$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi = 0.01$ , e para o controle  $9F_3/F = -1.1152799$  e  $v_{3otimo} = \pi$ . Já no modelo imperfeito considera-se  $u_{10} = 1^\circ$ ,  $\Omega = 0.254$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi = 0.01$ , e para o controle  $4F_2/F = 1.337189$  e  $v_{2otimo} = \pi$ . As medidas de integridade foram normalizadas em função das magnitudes GIM e IF para  $F = 0$  do modelo perfeito.



(a) Medida de integridade GIM



(b) Medida de integridade IF

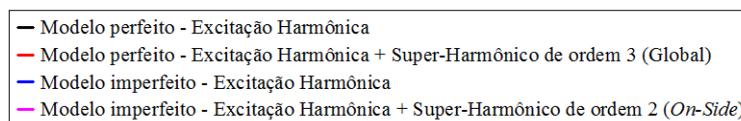


Figura 6.18: Comparação das medidas de integridade GIM e IF do modelo perfeito (original e controlado) com o modelo imperfeito (original e controlado).

Verifica-se pelas medidas GIM e IF a acentuada perda de integridade dinâmica que a imperfeição geométrica produz no sistema, deixando claro seu efeito negativo. Contudo, constata-se que, através das estratégias de controle, pode-se aumentar a segurança da estrutura através do aumento da região segura da bacia de atração. O maior ganho ocorre para o modelo imperfeito, situação esperada nas aplicações práticas. A imperfeição transforma a órbita heteroclínica em uma homoclínica e, conseqüentemente, o controle ótimo aplicável muda do global para o *one-side*, que é mais eficiente.

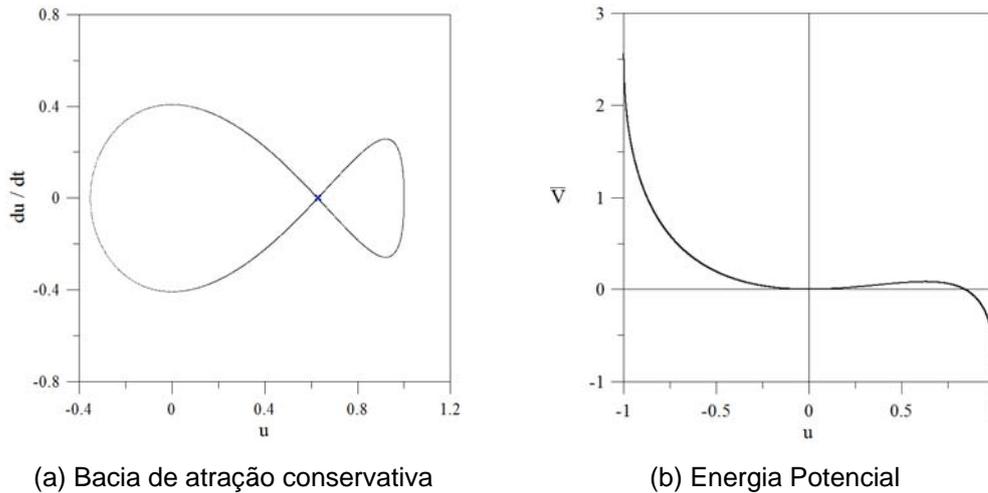
Quando se consideram mais super-harmônicos na estratégia de controle, verificam-se os ganhos mencionados nas Tabelas 6.1 e 6.2, até se alcançar os valores máximos para um número infinito de super-harmônicos. Porém, observa-se em algumas análises numéricas que a inclusão de super-harmônicos de ordem superior à terceira torna o controle instável.

#### 6.4.2. Modelo de Torre Estaiada

O Hamiltoniano para o modelo perfeito desacoplado, obtida da expressão (6.8), é:

$$h(u, \dot{u}) = \frac{1}{2} \left( \dot{u}^2 - \frac{u^2 \dot{u}^2}{-1+u^2} \right) + \frac{2}{\lambda \Omega^2} (\sqrt{2} - \sqrt{2-u})^2 + \frac{2}{3\lambda \Omega^2} \left( (\sqrt{2} - \sqrt{2+2u})^2 - (\sqrt{2} - \sqrt{2-u})^2 \right) - \frac{1}{\Omega^2} (1 - \sqrt{1-u^2}) \quad (6.60)$$

Através desta expressão e com o auxílio do princípio da conservação de energia, obtêm-se a bacia de atração conservativa e o perfil da energia potencial (expressão (6.4b)), mostrados na Figura 6.19.



(a) Bacia de atração conservativa

(b) Energia Potencial

Figura 6.19: Variedades e perfil da energia potencial para  $\Omega = 0.654653$  e  $\lambda = 0.7$ . Modelo perfeito desacoplado.

Verifica-se que a bacia de atração conservativa do modelo perfeito desacoplado é delimita por uma órbita homoclínica. Para está situação, a variação da órbita homoclínica em função do tempo é a mostrada na Figura 6.11.

A partir da expressão (6.10) e da Figura 6.11, verifica-se que a função que representa a órbita homoclínica é dada pelas expressões (6.57). A variação da coordenada  $u_{\text{hom}}$  com o tempo é mostrada na Figura 6.20.

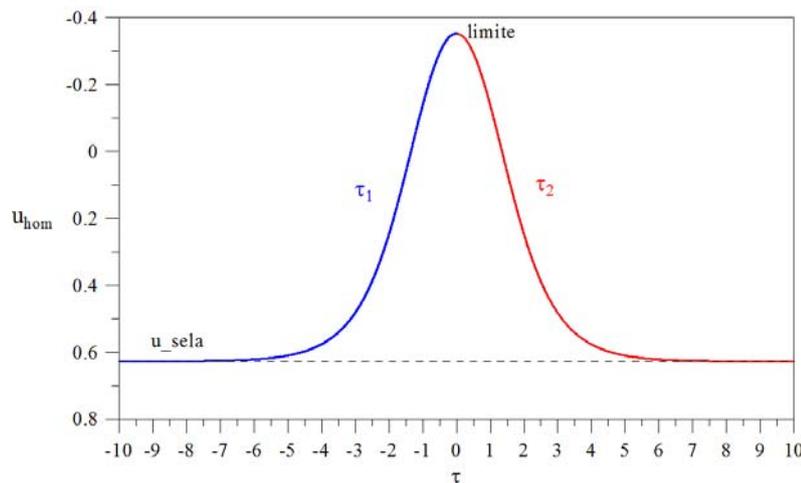


Figura 6.20: Órbita homoclínica para  $\Omega = 0.654653$  e  $\lambda = 0.7$ . Modelo perfeito desacoplado.

Lembrando que  $d\tau_1 = -du_{\text{hom}}/\dot{u}_{\text{hom}}$ ,  $d\tau_2 = du_{\text{hom}}/\dot{u}_{\text{hom}}$  e  $\text{var}_2 = 1$ , tem-se que as funções  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2(j)$  e  $\alpha_3(j)$  para o modelo são dadas por:

$$\alpha_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}_{\text{hom}}^2 d\tau = \int_{-\infty}^0 \dot{u}_{\text{hom}}^2 d\tau_1 + \int_0^{\infty} \dot{u}_{\text{hom}}^2 d\tau_2 =$$

$$- \int_{u_{\text{sela}}}^{\text{limite}} \dot{u}_{\text{hom}} du_{\text{hom}} + \int_{\text{limite}}^{u_{\text{sela}}} \dot{u}_{\text{hom}} du_{\text{hom}} \quad (6.61a)$$

$$\alpha_2(j) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}_{\text{hom}} \text{sen}(j\tau) d\tau =$$

$$- \int_{-\infty}^0 \dot{u}_{\text{hom}} \text{sen}(j\tau_1) d\tau_1 + \int_0^{\infty} \dot{u}_{\text{hom}} \text{sen}(j\tau_2) d\tau_2 =$$

$$\int_{u_{\text{sela}}}^{\text{limite}} \text{sen}\left(-j \int_{\text{limite}}^u \frac{du_{\text{hom}}}{\dot{u}_{\text{hom}}}\right) du_{\text{hom}} + \int_{\text{limite}}^{u_{\text{sela}}} \text{sen}\left(j \int_{\text{limite}}^u \frac{du_{\text{hom}}}{\dot{u}_{\text{hom}}}\right) du_{\text{hom}} \quad (6.61b)$$

$$\alpha_3(j) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}_{\text{hom}} \cos(j\tau) d\tau =$$

$$- \int_{-\infty}^0 \dot{u}_{\text{hom}} \cos(j\tau_1) d\tau_1 + \int_0^{\infty} \dot{u}_{\text{hom}} \cos(j\tau_2) d\tau_2 =$$

$$\int_{u_{\text{sela}}}^{\text{limite}} \cos\left(-j \int_{\text{limite}}^u \frac{du_{\text{hom}}}{\dot{u}_{\text{hom}}}\right) du_{\text{hom}} + \int_{\text{limite}}^{u_{\text{sela}}} \cos\left(j \int_{\text{limite}}^u \frac{du_{\text{hom}}}{\dot{u}_{\text{hom}}}\right) du_{\text{hom}} \quad (6.61c)$$

A Figura 6.21 compara a carga associada à bifurcação homoclínica, expressão (6.30), com as fronteiras de estabilidade. É interessante observar que a carga de bifurcação heteroclinica praticamente coincide, na região de ressonância, com a sela B.

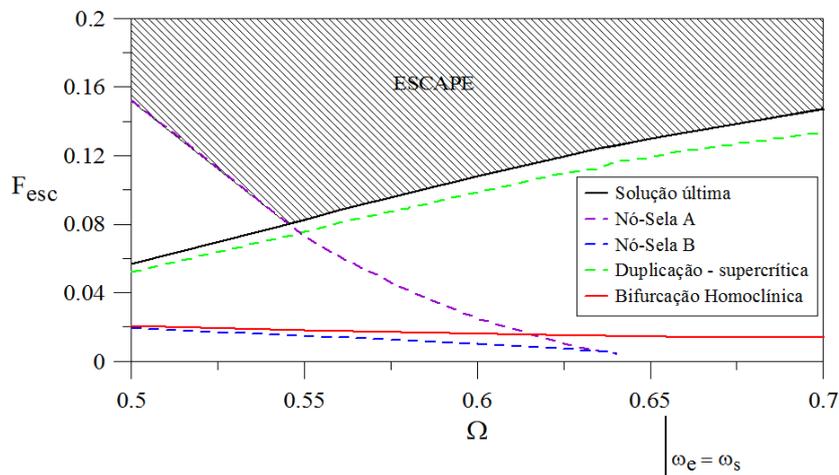


Figura 6.21: Mapeamento das bifurcações locais na região de ressonância fundamental para  $\lambda = 0.7$  e  $\zeta = 0.01$ . Modelo perfeito desacoplado.

Adota-se o controle *one-side* para o modelo, tendo como estratégia de controle a introdução de um super-harmônico de ordem dois na excitação harmônica. Neste caso a equação de movimento toma a forma:

$$\frac{\ddot{u}(1-u^2)+u\dot{u}^2}{(-1+u^2)^2} + \frac{2}{\lambda\Omega^2} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2-u}}{\sqrt{2-u}} + \frac{2\xi}{\Omega} \dot{u} + \frac{2\alpha}{3\lambda\Omega^2} \left( -\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2-u}}{\sqrt{2-u}} - \frac{2(\sqrt{2}-\sqrt{2+2u})}{\sqrt{2+2u}} \right) - \frac{1}{\Omega^2} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} = F \left( \sin(\tau) + 4 \frac{F_2}{F} \sin(2\tau + \nu_2) \right) \quad (6.62)$$

Os valores ótimos são  $h_{2otimo} = 0.353553$  e  $\nu_{2otimo} = \pi$  (Tabela 6.1), que fornecem, através da expressão (6.49),  $4F_2/F = 1.160502$ . Considera-se neste exemplo  $\Omega = 0.5456$ ,  $\lambda = 0.7$  e  $\xi = 0.01$ . Neste caso a bifurcação homoclínica para o modelo original acontece para  $F = Fcr^h = 0.018273$ . Para o modelo controlado, esta acontece para  $F = Fcr^{cont} = 0.025842$ , ou seja, tem-se um ganho de 41.42%. Na Figura 6.22 são apresentados os diagramas de bifurcação em função do parâmetro da carga. Como no modelo de Augusti, os diagramas mostram que o controle diminuiu o valor de escape. Porém, o efeito benéfico do controle é sentido nas medidas de integridade GIM e IF, mostradas na Figura 6.23. As medidas são normalizadas pelas magnitudes GIM e IF para  $F = 0$ .

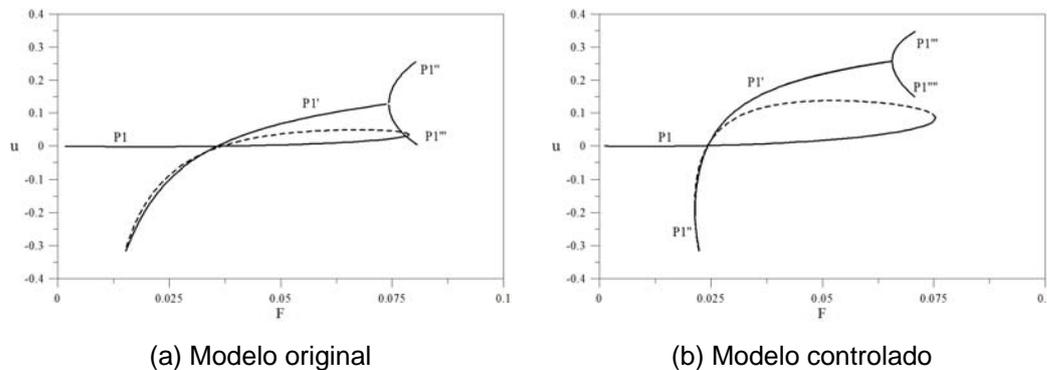
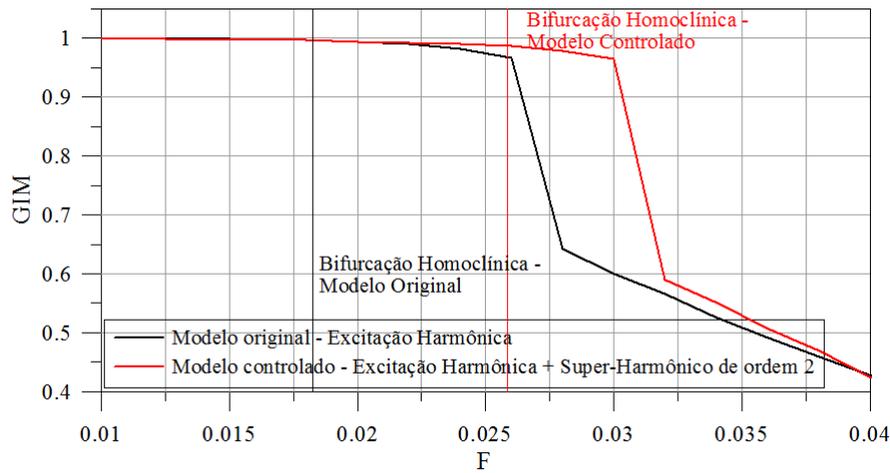
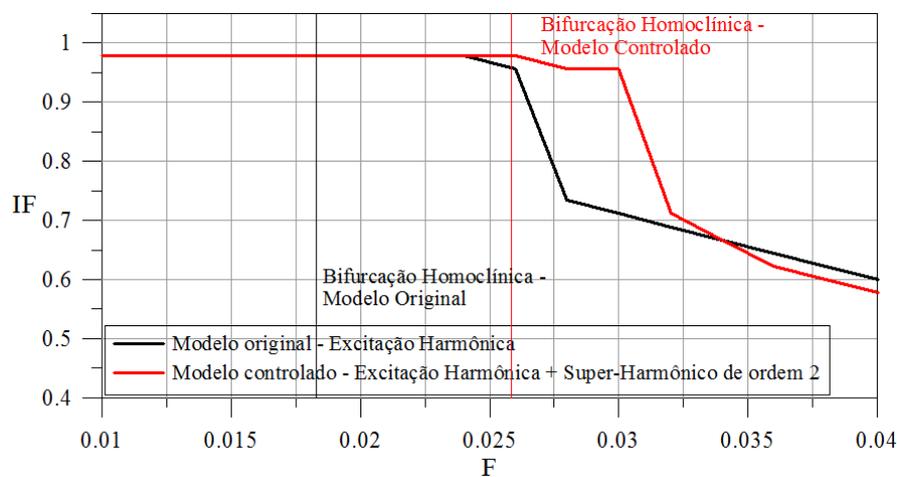


Figura 6.22: Diagramas de bifurcação para  $\Omega = 0.5456$ ,  $\lambda = 0.7$  e  $\xi = 0.01$ , modelo original e modelo controlado ( $4F_2/F = 1.160502$  e  $\nu_{2otimo} = \pi$ ). Modelo perfeito desacoplado.



(a) Medida de integridade GIM



(b) Medida de integridade IF

Figura 6.23: Medidas de integridade GIM e IF para  $\Omega = 0.5456$ ,  $\lambda = 0.7$  e  $\xi = 0.01$ , modelo original e modelo controlado ( $4F_2 / F = 1.160502$  e  $\nu_{2otimo} = \pi$ ). Modelo perfeito desacoplado.

O ganho é ilustrado nas bacias de atração mostradas na Figura 6.24. A erosão do modelo original se inicia em  $F = 0.022$ , já a erosão do modelo controlado começa em  $F = 0.03$ , quando a erosão do modelo original já está bastante acentuada.

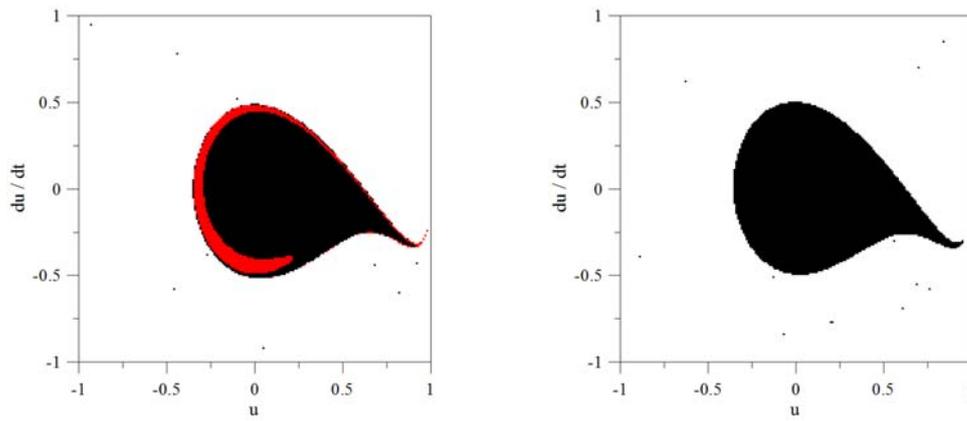
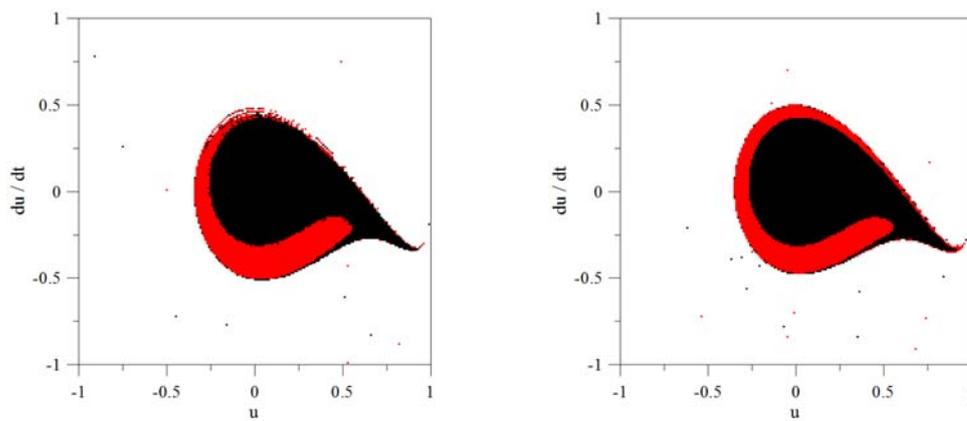
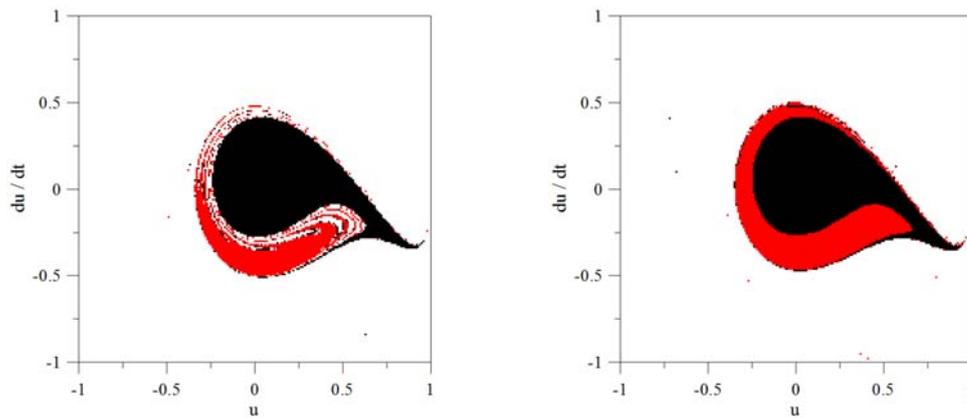
(a)  $F = 0.018$ (b)  $F = 0.026$ (c)  $F = 0.03$ 

Figura 6.24: Bacias de atração para  $\Omega = 0.5456$ ,  $\lambda = 0.7$  e  $\xi = 0.01$ , modelo original e para o modelo controlado ( $4F_2/F = 1.160502$  e  $\nu_{2otimo} = \pi$ ). Modelo perfeito desacoplado.