

## 5 Análise Dinâmica – Vibração Forçada

### 5.1. Introdução

O presente capítulo apresenta um estudo detalhado dos dois modelos sob vibração forçada, no caso, uma excitação harmônica de base. Para isso, obtêm-se as fronteiras de estabilidade, identificando assim as principais regiões de ressonância dos modelos, os diagramas de bifurcações pelos métodos da continuação e da força bruta, as bacias de atrações e as medidas de integridade, o que permite, juntamente com os resultados dos capítulos 3 e 4, uma compreensão do comportamento dinâmico dos modelos.

#### 5.1.1. Fronteiras de Escape

Com o intuito de compreender o comportamento e a segurança dos modelos sob vibração forçada, obtêm-se inicialmente as fronteiras de estabilidade no espaço dos parâmetros de controle da excitação harmônica, que são a frequência da excitação,  $\omega_e$ , a amplitude da excitação,  $F$ , e a direção da excitação,  $\varphi$ . Para uma dada frequência e direção da excitação, obtém-se, com base no método da força bruta e considerando como parâmetro de controle a magnitude da força, o diagrama de bifurcação até se atingir o valor de escape ( $F_{esc}$ ), que representa a maior magnitude de força com solução estável em uma estrutura carregada de forma quase estática. O tempo de integração para cada situação é variável, ou seja, depende do tempo que o sistema leva para atingir a fase permanente da resposta após cada incremento de  $F$ . Ao se variar a frequência de excitação num dado intervalo, que inclui necessariamente as frequências naturais do sistema e seus primeiros múltiplos e submúltiplos, obtém-se para cada valor de  $\varphi$  uma curva no espaço  $F$  versus  $\omega_e$ , denominada fronteira de escape. Abaixo de tais curvas têm-se as condições que garantem uma resposta estável quando o carregamento varia

de uma maneira quase estacionária e acima, as condições que levam o sistema a divergir (escape). Este procedimento permite identificar as regiões principais de ressonância.

### 5.1.2. Diagramas de Bifurcação

Um diagrama de bifurcação é a representação gráfica do comportamento qualitativo das órbitas em função de um parâmetro de controle. Através de um diagrama de bifurcação podem-se identificar as soluções de equilíbrio, as órbitas periódicas, quase-periódicas e caóticas de um dado sistema, bem como os valores do parâmetro de controle onde ocorrem mudanças qualitativas no comportamento do sistema, pontos de bifurcação. Ao se variar um dos parâmetros de controle do sistema, a solução periódica pode perder sua estabilidade, sendo que o tipo de bifurcação associada à perda de estabilidade depende da maneira pela qual os multiplicadores de Floquet associados aos pontos fixos do mapa de Poincaré da órbita deixam o círculo de raio unitário. A teoria dos multiplicadores de Floquet não é aqui apresentada. Em Thompson & Stewart (1993) encontra-se um estudo abrangente e detalhado não somente da teoria, mas também da natureza dos multiplicados de Floquet e das bifurcações.

As bifurcações aqui analisadas são locais, devido à natureza dos multiplicadores de Floquet, sendo que tais se caracterizam por serem contínuas ou descontínuas (catastróficas). No caso das contínuas, o movimento do sistema evolui para outro movimento enquanto o parâmetro de controle varia de uma maneira quase estacionária. As bifurcações descontínuas podem ser perigosas, pois o sistema salta para outro atrator, que pode estar no infinito, enquanto o parâmetro de controle varia de uma maneira quase estacionária. As soluções periódicas podem exibir, considerando apenas os casos encontrados no presente trabalho, os seguintes tipos de bifurcação:

- Bifurcação por quebra de simetria (*pitchfork*);
- Bifurcação por dobra cíclica (nó-sela);
- Bifurcação por duplicação de período (*Flip*);
- Bifurcação de Hopf secundária ou de Neimark (Hopf).

As bifurcações do tipo *pitchfork* e nó-sela ocorrem quando um autovalor real deixa o círculo unitário através do ponto  $+1$ , como ilustrado na Figura 5.1(a). A bifurcação por duplicação de período ocorre quando o autovalor real deixa o círculo unitário através do ponto  $-1$ , como indicado na Figura 5.1(b). Por fim, a bifurcação do tipo Hopf ocorre quando um par de autovalores complexos ultrapassa o círculo de raio unitário, vide Figura 5.1(c).

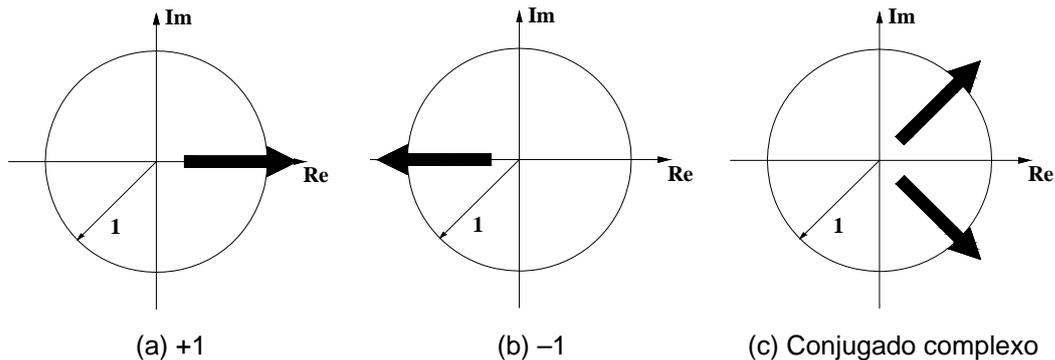


Figura 5.1: Forma como os multiplicadores de Floquet podem ultrapassar o círculo de raio unitário (região de estabilidade).

A bifurcação do tipo *pitchfork* pode ser dividida em duas categorias: supercrítica e subcrítica. No caso de uma bifurcação supercrítica, tem-se localmente, de um lado do ponto de bifurcação, um ramo de pontos fixos estáveis e do outro lado, dois ramos de pontos fixos estáveis e um ramo de pontos fixos instáveis, Figura 5.2(a). Em uma bifurcação subcrítica, localmente tem-se, de um lado do ponto de bifurcação, dois ramos de pontos fixos instáveis mais um ramo de pontos fixos estáveis e, do outro lado, um ramo de pontos fixos instáveis, Figura 5.2(b). A bifurcação supercrítica é caracterizada por ser contínua, enquanto a subcrítica, por ser descontínua ou catastrófica. A bifurcação *pitchfork* dá origem a duas soluções distintas e implica em uma quebra de simetria da resposta.

Quando a bifurcação é do tipo nó-sela, o ramo de soluções periódicas estáveis e o ramo das soluções periódicas instáveis são criados ou destruídos mutuamente no ponto de bifurcação, Figura 5.3. Esta situação é basicamente descontínua ou catastrófica.



Finalmente a bifurcação do tipo Hopf de uma solução periódica é caracterizada por introduzir uma nova frequência a partir do ponto de bifurcação. A nova solução pode ser periódica ou quase-periódica, dependendo da relação entre a nova frequência e a frequência da solução que existia antes da bifurcação. Novamente, esta bifurcação pode ser supercrítica ou subcrítica. Em ambas as bifurcações o ramo das soluções estáveis periódicas que existia antes da bifurcação (Hopf) continua como um ramo de soluções instáveis periódicas após a bifurcação. Se a bifurcação for supercrítica, um ramo de soluções periódicas ou quase-periódicas estáveis é criado, Figura 5.5(a), mas, se a bifurcação for subcrítica, um ramo de soluções instáveis é destruído, Figura 5.5(b), o que representa uma bifurcação descontínua.

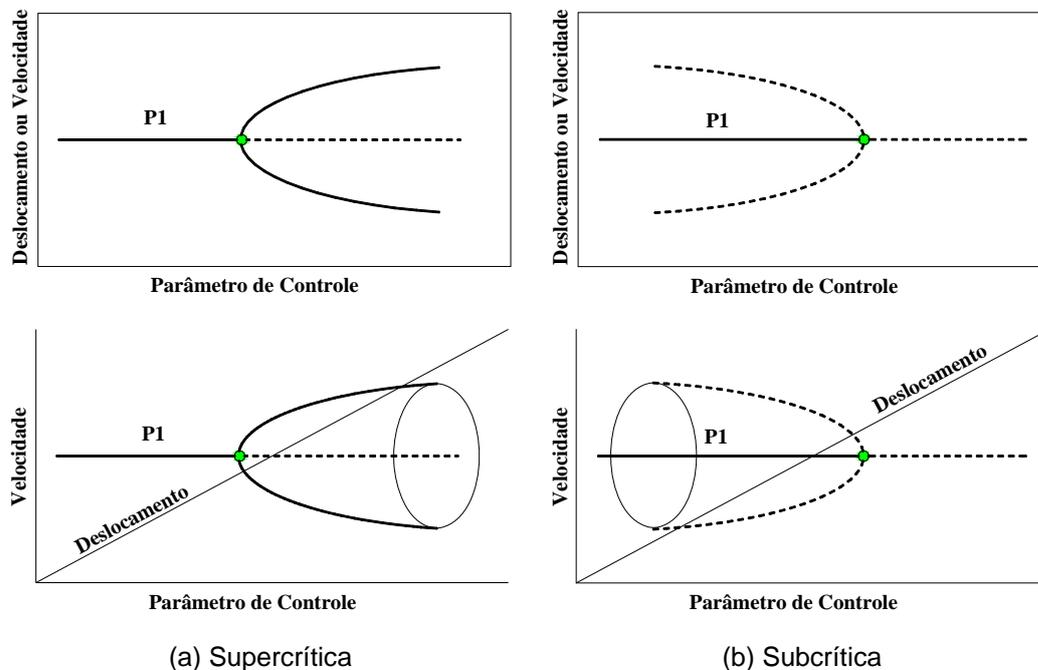


Figura 5.5: Bifurcação do tipo Hopf, supercrítica e subcrítica.

No que diz respeito aos diagramas de bifurcação, tem-se que as linhas contínuas representam as soluções estáveis e as linhas tracejadas representam as soluções instáveis. O escape representa a maior magnitude do parâmetro de controle que possui solução periódica estável, ou seja, o último ponto periódico estável antes da completa erosão de todas as bacias de atração e a solução última corresponde à última solução estável com a variação do parâmetro de controle (não necessariamente igual ao valor de escape). A Figura 5.6 mostra um típico

diagrama de bifurcação dos sistemas aqui analisados onde são identificados os diversos tipos de bifurcação.

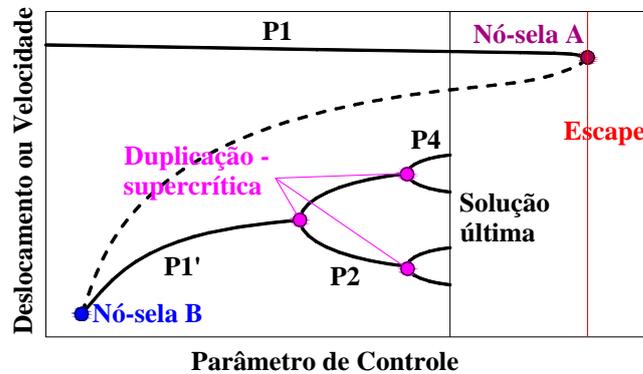


Figura 5.6: Exemplo de diagrama de bifurcação.

### 5.1.3. Bacias de Atração e Integridade Dinâmica

Em termos práticos, as informações sobre os limites de estabilidade e os diagramas de bifurcação não são suficientes para avaliar a segurança de uma dada estrutura. Assim, a fim de avaliar a segurança dos modelos, se analisa a evolução e a erosão das bacias de atração em função da variação da amplitude da força. A definição para a bacia de atração aqui empregada é: “o conjunto de todas as condições iniciais no espaço de fase que são atraídas pelos pontos fixos estáveis do vale potencial pré-crítico quando  $t \rightarrow \infty$ ”. A instabilidade é considerada como o escape do vale potencial pré-crítico.

Na impossibilidade de mostrar as bacias de atração dos modelos acoplados no espaço de fase, pois tais pertencem a um espaço de fase de quatro dimensões (os modelos acoplados possuem 2GL), todas as bacias de atração dos modelos acoplados são mostradas através de seções transversais de duas dimensões. Por exemplo, uma bacia de atração no plano  $\theta_1 \times d\theta_1/dt$  é uma seção transversal obtida considerando  $\theta_2 = \dot{\theta}_2 = 0.0$ .

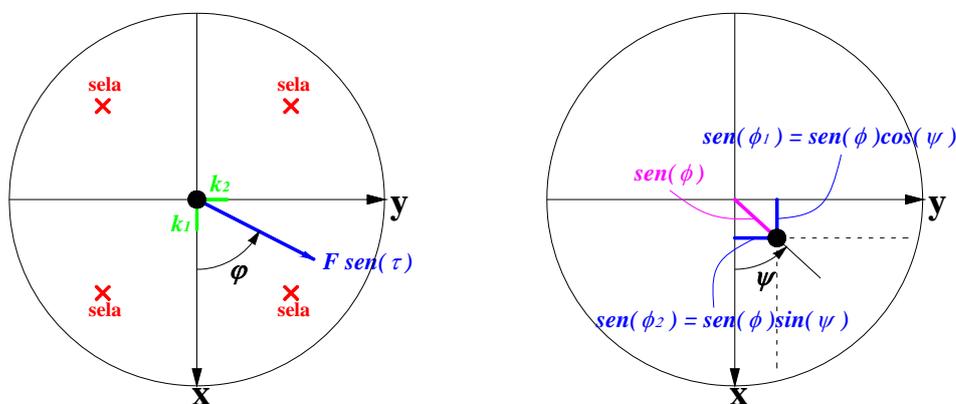
A avaliação da segurança e integridade de um sistema dinâmico não-linear é um assunto de grande importância teórica e prática na engenharia. Uma forma de investigar a integridade dinâmica é através da análise da evolução das bacias de atração das diferentes soluções. Assim, tem-se que a segurança de um sistema não-linear mecânico ou estrutural depende não só da estabilidade de suas

soluções, mas também da integridade da bacia no entorno de cada solução, sendo que a erosão total de uma dada bacia corresponde à falha do sistema.

Dentre as formas propostas na literatura para medir a integridade das bacias seguras, a medida de integridade local (LIM) proposta por Soliman & Thompson (1989) mostra-se como uma medida adequada para sistemas com vários graus de liberdade, pois pode ser facilmente obtida através da integração numérica do espaço de fase de  $n$  dimensões usando-se um sistema de coordenadas esféricas. A medida de integridade local representa a distância mínima, na seção de Poincaré, do ponto atrator até o limite da bacia de atração. Segundo Rega & Lenci (2005), esta definição tem a vantagem de não incluir qualquer região fractal e concentrar o estudo na parte compacta da bacia segura.

## 5.2. Modelo de Augusti

Com o intuito de explicitar os principais parâmetros do modelo de Augusti sob vibração forçada, se apresenta na Figura 5.7(a) uma vista superior do modelo com a direção da força ( $F \sin(\tau)$ ) definida pelo ângulo  $\phi$ , juntamente com a representação das molas rotacionais  $k_1$  e  $k_2$ . Já a Figura 5.7(b) apresenta uma vista superior do modelo quando se considera uma imperfeição geométrica inicial, sendo esta identificada pelo ângulo  $\phi$ , que mede a inclinação inicial da coluna com relação à posição vertical, e o ângulo  $\psi$ , que define a posição da projeção da coluna no plano  $x \times y$ .



(a) Direção da força e posição das molas.  
Modelo perfeito.

(b) Posição da extremidade superior.  
Modelo com imperfeição geométrica.

Figura 5.7: Vista superior ilustrativa do Modelo de Augusti.

Partindo das expressões (2.15), em termos das coordenadas generalizadas  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , tem-se que as equações de movimento que regem o comportamento do modelo de Augusti em vibração forçada são:

$$\begin{aligned}
 & \left( \ddot{\theta}_1 (-\cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 + \cos^4 \theta_1 \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_1 \cos^4 \theta_2) \right. \\
 & + \ddot{\theta}_2 (-\cos \theta_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2 + \cos^3 \theta_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2 \\
 & + \cos \theta_1 \sin \theta_1 \cos^3 \theta_2 \sin \theta_2) + \dot{\theta}_1^2 (-\cos \theta_1 \sin \theta_1 \cos^4 \theta_2 \\
 & + \cos \theta_1 \sin \theta_1 \cos^2 \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 (\cos \theta_1 \sin \theta_1 - 2 \cos \theta_1 \sin \theta_1 \cos^2 \theta_2 \\
 & - \cos^3 \theta_1 \sin \theta_1 + 2 \cos^3 \theta_1 \cos^2 \theta_2 \sin \theta_1 + \cos \theta_1 \cos^4 \theta_2 \sin \theta_1) \\
 & \left. + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (2 \cos^2 \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2 - 2 \cos^4 \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2) \right) \\
 & + \left( \frac{2\xi_1}{\Omega} \dot{\theta}_1 + \frac{\alpha}{\lambda \Omega^2} (\theta_1 - \phi_1) - \frac{1}{\Omega^2} \frac{\cos \theta_1 \sin \theta_1}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_2}} \right) (1 - 2 \cos^2 \theta_1 \\
 & - 2 \cos^2 \theta_2 + \cos^4 \theta_1 + \cos^4 \theta_2 + 2 \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2) = \\
 & F \cos \varphi \sin \tau \cos \theta_1 (1 - 2 \cos^2 \theta_1 - 2 \cos^2 \theta_2 + \cos^4 \theta_1 \\
 & + \cos^4 \theta_2 + 2 \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2)
 \end{aligned} \tag{5.1a}$$

$$\begin{aligned}
 & \left( \ddot{\theta}_2 (-\cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 + \cos^4 \theta_1 \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_1 \cos^4 \theta_2) \right. \\
 & + \ddot{\theta}_1 (-\cos \theta_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2 + \cos^3 \theta_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2 \\
 & + \cos \theta_1 \sin \theta_1 \cos^3 \theta_2 \sin \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 (-\cos^4 \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2 \\
 & + \cos^2 \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2) + \dot{\theta}_1^2 (\cos \theta_2 \sin \theta_2 - 2 \cos^2 \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2 \\
 & - \cos^3 \theta_2 \sin \theta_2 + 2 \cos^2 \theta_1 \cos^3 \theta_2 \sin \theta_2 + \cos^4 \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2) \\
 & \left. + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (2 \cos \theta_1 \sin \theta_1 \cos^2 \theta_2 - 2 \cos \theta_1 \sin \theta_1 \cos^4 \theta_2) \right) \\
 & + \left( \frac{2\xi_2}{\Omega} \dot{\theta}_2 + \frac{1}{\lambda \Omega^2} (\theta_2 - \phi_2) - \frac{1}{\Omega^2} \frac{\cos \theta_2 \sin \theta_2}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_2}} \right) (1 - 2 \cos^2 \theta_1 \\
 & - 2 \cos^2 \theta_2 + \cos^4 \theta_1 + \cos^4 \theta_2 + 2 \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2) = \\
 & F \sin \varphi \sin \tau \cos \theta_1 (1 - 2 \cos^2 \theta_1 - 2 \cos^2 \theta_2 + \cos^4 \theta_1 \\
 & + \cos^4 \theta_2 + 2 \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2)
 \end{aligned} \tag{5.1b}$$

As equações de movimento (5.1) são adimensionalizadas em função de  $Pcr_2 = k_2/l$ . Nessas equações adotam-se as seguintes variáveis auxiliares:

$$\lambda = P/Pcr_2, \quad P = mg, \quad \alpha = k_1/k_2, \quad k_1/ml^2 = \alpha(\omega_p^2/\lambda), \quad k_2/ml^2 = \omega_p^2/\lambda,$$

$C_i/ml^2 = 2\xi_i\omega_p$ ,  $\omega_p^2 = g/l$ ,  $F = F_b/l$ ,  $\tau = \omega_e t$ ,  $\Omega = \omega_e/\omega_p$ ,  $\Omega_1 = \omega_1/\omega_p$  e  $\Omega_2 = \omega_2/\omega_p$ . As parcelas referentes à excitação de base são dadas por:  $u_b = F_b \cos\varphi \text{sen}(\omega_e t)$  e  $v_b = F_b \text{sen}\varphi \text{sen}(\omega_e t)$ , onde  $\omega_e$  é a frequência da excitação. Nessas expressões  $F_b$  é a magnitude do deslocamento de base.

Para a análise dinâmica em vibração forçada do modelo de Augusti considera-se, sem perda de generalidade, que  $\lambda = 0.9$ ,  $\omega_p = 1.0$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ .

### 5.2.1. Modelo Perfeito

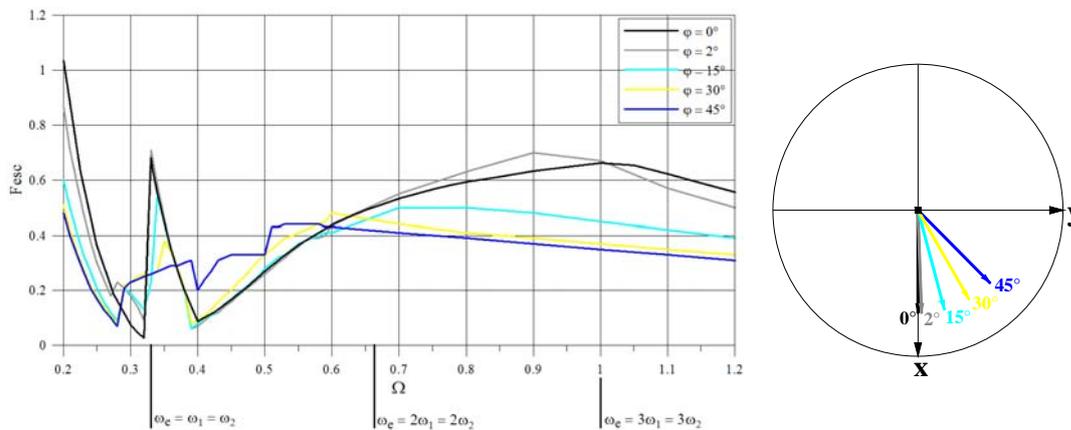
As duas frequências naturais do modelo de Augusti perfeito são mostradas na Tabela 5.1 (vide Tabela 4.1). Tem-se, portanto, uma ressonância interna 1:1.

Tabela 5.1: Frequências naturais para  $\lambda = 0.9$ . Modelo de Augusti perfeito.

Caso	Primeira Frequência - $\Omega_1$	Segunda Frequência - $\Omega_2$
Perfeito	1/3	1/3

A Figura 5.8 mostra, para diferentes valores da direção da excitação de base,  $\varphi$ , as fronteiras de estabilidade (escape). Para cada valor da frequência de excitação,  $\Omega = \omega_e/\omega_p$ , obtém-se a carga máxima que a estrutura pode suportar quando a força cresce quase estaticamente,  $F_{esc}$ . Cabe ressaltar que, após cada incremento de carga, se dá uma pequena perturbação em todas as coordenadas a fim de ativar possíveis acoplamentos modais. Nota-se que todas as curvas apresentam um comportamento semelhante, com a presença de duas regiões críticas onde a carga de escape atinge mínimos locais. Estas regiões encontram-se à direita e à esquerda da frequência natural ( $\omega_e = \omega_1 = \omega_2$ ), região da ressonância fundamental. Não são observadas ressonâncias sub- ou super-harmônicas relevantes. O valor da carga de escape mínima depende sensivelmente do valor de  $\varphi$ , como mostra a Figura 5.9, onde se apresenta a variação da carga de escape em função de  $\varphi$  para três valores da frequência de excitação  $\Omega$ . Este procedimento numérico não garante que a carga obtida corresponda à carga onde ocorre a completa erosão da bacia de atração. Isto só é verdadeiro quando o escape é

determinado, isto é, se não mais existem outras soluções estáveis no vale potencial para o nível de carregamento considerado. Como mostrado por Soliman & Thompson (1989, 1992), se no primeiro ponto de bifurcação catastrófica (nó-sela ou subcrítica) existem outras soluções no interior do vale potencial, o escape se torna indeterminado. Dependendo das condições iniciais, se podem obter diferentes soluções. Portanto, no presente procedimento numérico, dependendo do valor do incremento da carga e da perturbação nas condições iniciais, pode-se ter ou não escape em certas regiões.



(a) Curvas de escape (Valores mínimos (2 vales) –

$$F_{esc} = 0.0267 (\varphi = 0^\circ) \text{ e } F_{esc} = 0.0600 (\varphi = 15^\circ)$$

(b) Direção da excitação

Figura 5.8: Fronteiras de estabilidade (escape) para  $\lambda = 0.9$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de Augusti perfeito.

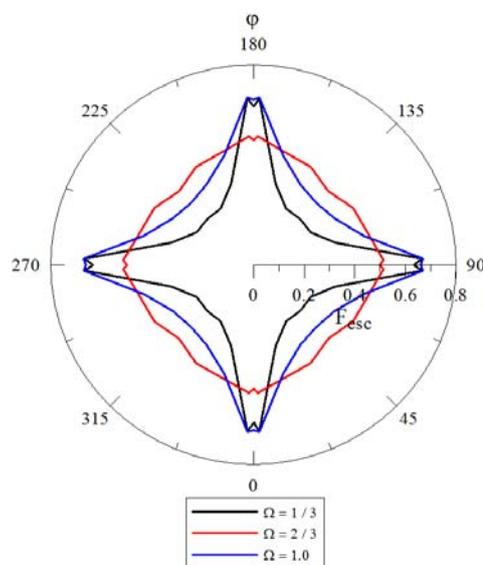


Figura 5.9: Variação da carga de escape,  $F_{esc}$ , com a direção da excitação,  $\varphi$ , (gráfico em coordenadas polares) para  $\lambda = 0.9$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de Augusti perfeito.

O comportamento do modelo na região da ressonância fundamental é decorrente da interação entre os modos não-lineares de vibração ilustrados na Figura 4.17. Isto pode ser compreendido através das curvas de ressonância mostradas na Figura 5.10 para  $F = 0.02$  e diversos valores de  $\varphi$ . Quando  $\varphi = 0^\circ$  tem-se um comportamento típico de um sistema com ganho de rigidez (*hardening*). Neste caso o comportamento dinâmico é controlado pelo modo não-linear desacoplado que surge naturalmente do modo linear no plano  $\theta_1 \times d\theta_1/dt$ , Figura 4.17(a), independente da perturbação inicial,  $\theta_2 = \dot{\theta}_2 = 0.0$ . Para  $\varphi = 2^\circ$  já se observa uma pequena participação da coordenada  $\theta_2$ , em particular em uma pequena região em torno de  $\Omega = 1/3$ . Para  $\varphi = 30^\circ$  se observa a presença de um segundo pico de ressonância que exibe um comportamento com perda de rigidez (*softening*). Este comportamento se torna dominante à medida que  $\varphi$  cresce, como se observa nos resultados obtidos para  $\varphi = 43^\circ$  e  $\varphi = 45^\circ$ . Este comportamento é ditado pelo modo não-linear similar ilustrado na Figura 4.17(b), que apresenta um forte comportamento *softening*. A influência dos modos não-lineares na resposta do sistema sob vibração forçada na região de ressonância fundamental fica mais clara observando a Figura 5.11, que apresenta uma superposição das curvas de ressonância juntamente com as relações frequência-amplitude obtidas para os modos não-lineares, Figura 4.17. A interação de dois modos não-lineares com comportamento distintos (um *hardening* outro *softening*) explica a existência das duas regiões críticas observadas na Figura 5.8, bem como a variação da carga de escape com  $\varphi$ . Nota-se neste exemplo que, sem a identificação dos modos puramente não-lineares, impossíveis de se obter em uma análise linear clássica, seria difícil compreender e explicar o comportamento do sistema na região de ressonância fundamental.

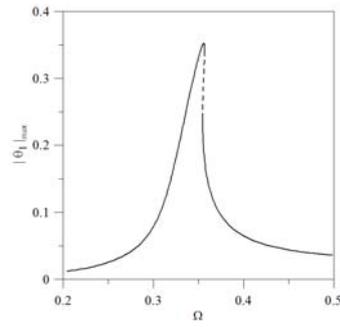
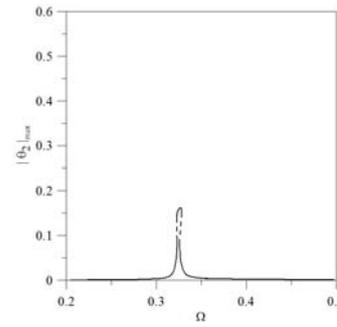
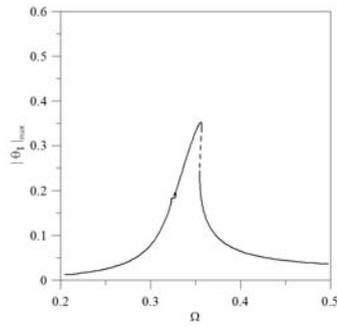
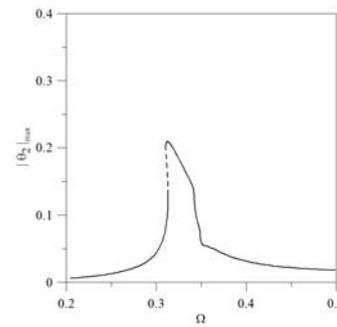
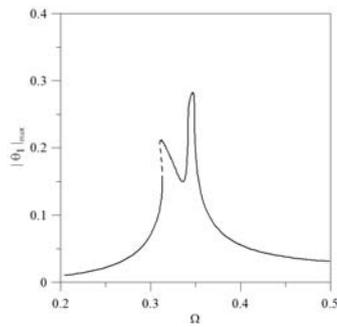
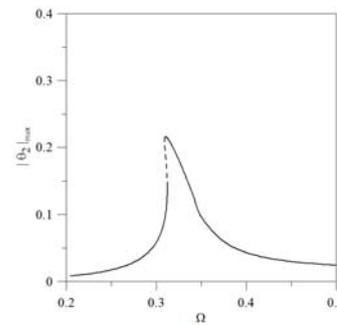
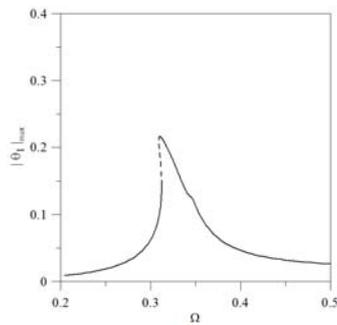
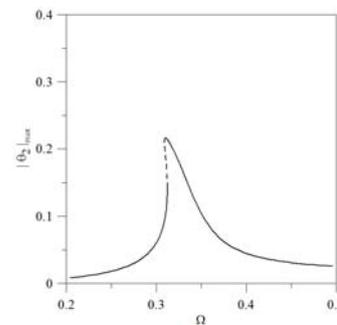
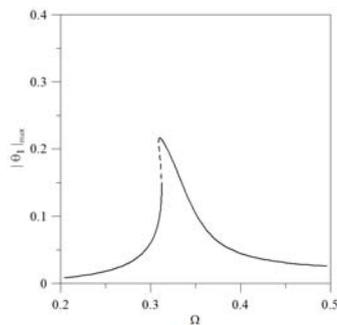
(a)  $\varphi = 0^\circ$ (b)  $\varphi = 2^\circ$ (c)  $\varphi = 30^\circ$ (d)  $\varphi = 43^\circ$ (e)  $\varphi = 45^\circ$ 

Figura 5.10: Curvas de ressonância para  $F = 0.02$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de Augusti perfeito.

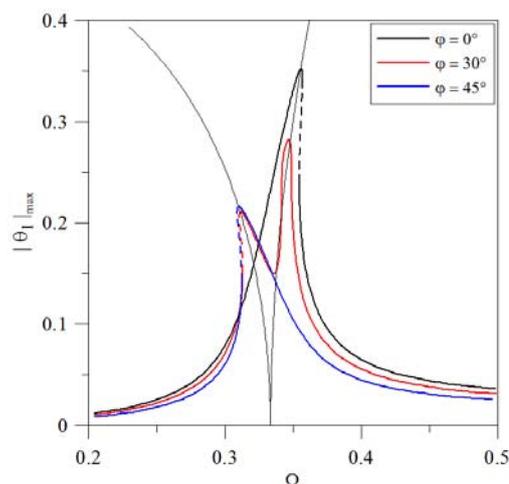


Figura 5.11: Curvas de ressonância e as relações frequência-amplitude dos modos não-lineares, para  $F = 0.02$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de Augusti perfeito.

Uma das aplicações dos modos não-lineares é a dedução de modelos de ordem reduzida. Para cada modo não-linear, assim como na análise modal clássica, pode-se deduzir um oscilador não-linear com um grau de liberdade cujo movimento está contido em uma variedade bidimensional invariante no espaço de fase do sistema. Como visto no capítulo 4 (item 4.1.4.1), tem-se que, para o modelo de Augusti perfeito, as variedades bidimensionais invariantes no espaço de fase do sistema são superfícies que contêm um dos modos de vibração, ou seja, o plano  $\theta_1 \times d\theta_1/dt$  ( $\varphi = 0^\circ$  ou  $\varphi = 180^\circ$ ) e o plano  $\theta_2 \times d\theta_2/dt$  ( $\varphi = 90^\circ$  ou  $\varphi = 270^\circ$ ) para os modos não-lineares desacoplados, e o plano auxiliar  $u \times du/dt$  ( $\varphi = 45^\circ$  ou  $\varphi = 225^\circ$ ) ou  $v \times dv/dt$  ( $\varphi = 135^\circ$  ou  $\varphi = 315^\circ$ ) para os modos não-lineares similares acoplados.

Inicialmente, estuda-se o comportamento acoplado e desacoplado do modelo de Augusti perfeito considerando  $\varphi = 0^\circ$ , ou seja, para a direção de excitação coincidente com o modo não-linear desacoplado no plano  $\theta_1 \times d\theta_1/dt$ . Para o caso acoplado, admite-se que o sistema pode ser perturbado nas coordenadas  $\theta_2$  e  $\dot{\theta}_2$  (perturbação transversal à variedade invariante do modo). Para o caso desacoplado, impõe-se que o sistema não pode ser perturbado em tais direções, ou seja,  $\theta_2 = \dot{\theta}_2 = 0.0$ . A Figura 5.12 mostra as fronteiras de estabilidade para as duas situações. Verifica-se que há uma grande diferença entre

as magnitudes de  $F_{esc}$  nos dois casos e que o acoplamento modal reduz drasticamente a magnitude da carga de escape.

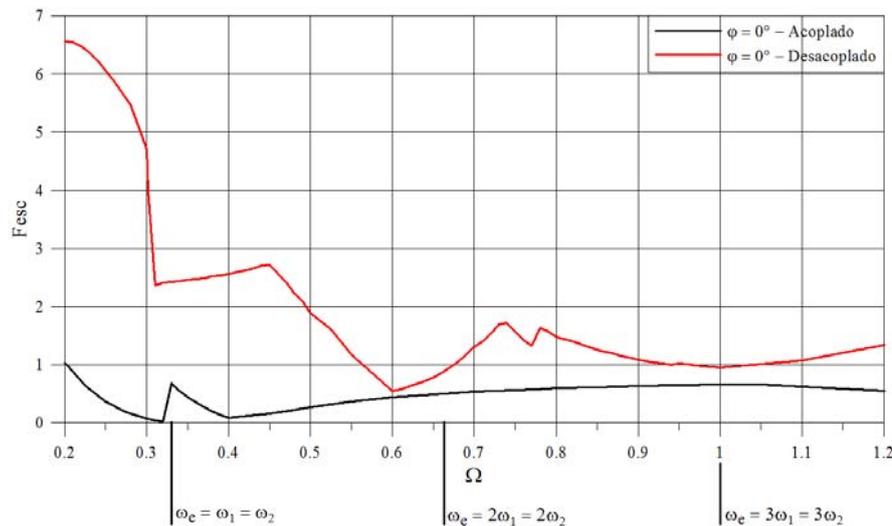


Figura 5.12: Fronteiras de estabilidade (escape), modelo acoplado e desacoplado, para  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de Augusti perfeito (valores mínimos –  $F_{esc} = 0.0267$  (acoplado) e  $F_{esc} = 0.5800$  (desacoplado)).

Este fenômeno pode ser mais bem observado através do comportamento das curvas de ressonância à medida que a magnitude da força aumenta. Verifica-se na Figura 5.13 que, para pequenas magnitudes de  $F$  ( $F = 0.02$ ), a resposta acoplada e desacoplada apresentam o mesmo comportamento, pois na situação acoplada as coordenadas  $\theta_2$  e  $\dot{\theta}_2$  permanecem nulas, não sendo ativada a interação modal. Ou seja, qualquer perturbação em  $\theta_2$  ou  $\dot{\theta}_2$  tende a zero. Já para um carregamento ligeiramente superior ( $F = 0.03$ ), como mostra a Figura 5.14, o efeito do acoplamento modal já começa a aparecer para um pequeno trecho de frequências de excitação. Como se observa na Figura 5.14(a.1), surgem dois pontos de bifurcação no ramo ressonante da resposta e, entre estes pontos, as coordenadas  $\theta_2$  e  $\dot{\theta}_2$ , que eram nulas, são ativadas pelo acoplamento modal, como se observa na Figura 5.14(a.2), tornando-se instável a solução desacoplada. Verifica-se que, quando maior é a magnitude da carga, maior é o trecho de frequências de excitação com a presença de acoplamento modal.

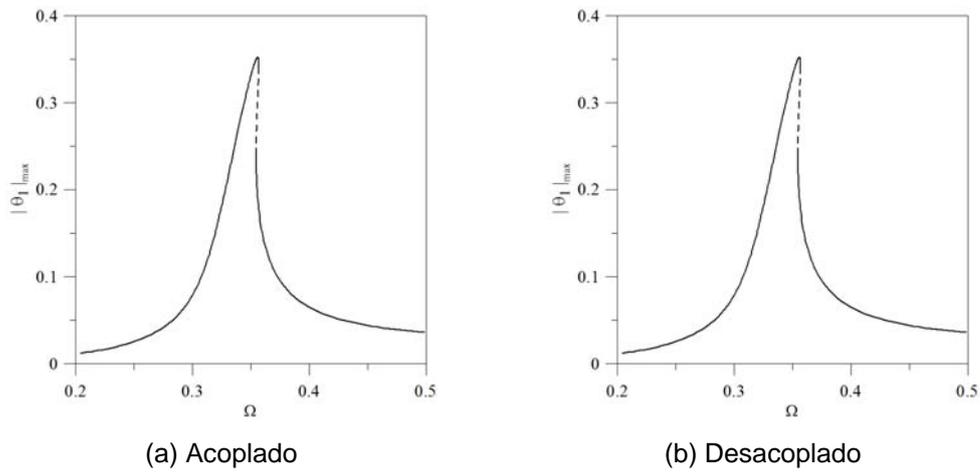


Figura 5.13: Curvas de ressonância, modelo acoplado e desacoplado, para  $F = 0.02$ ,  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de Augusti perfeito.

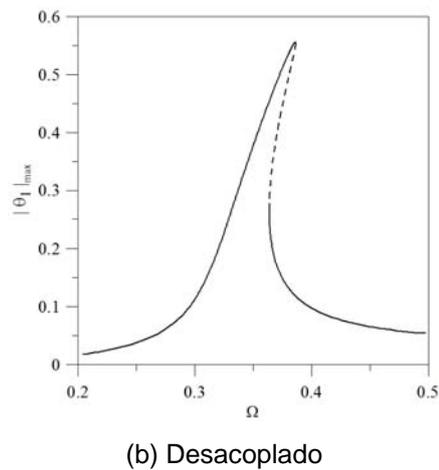
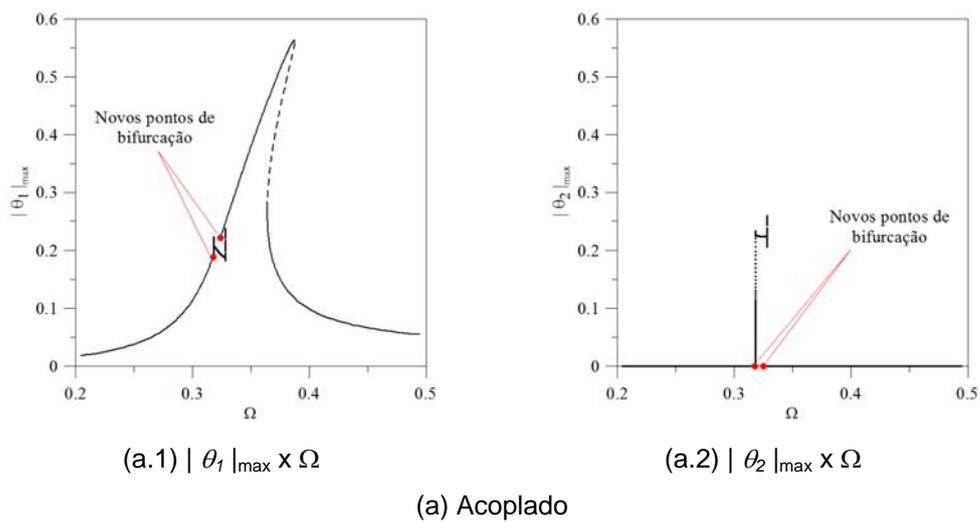
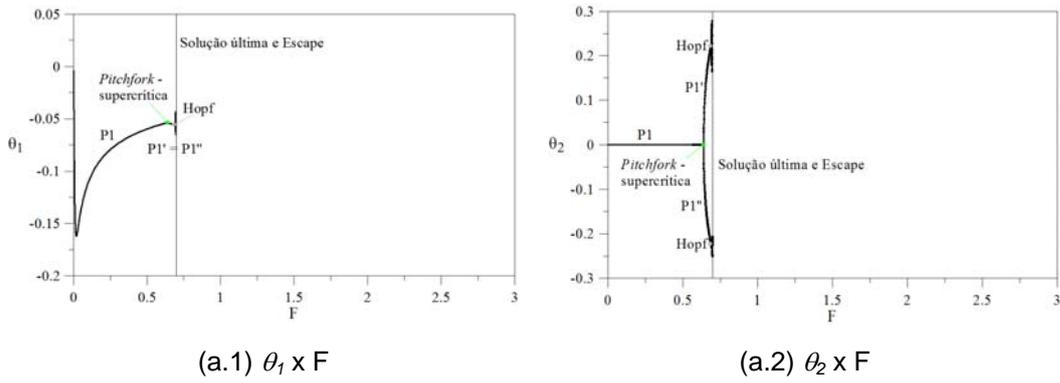


Figura 5.14: Curvas de ressonância, modelo acoplado e desacoplado, para  $F = 0.03$ ,  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de Augusti perfeito.

A grande diferença entre as magnitudes de  $F_{esc}$  do sistema acoplado e do desacoplado, Figura 5.12, pode ser entendida, também, através dos diagramas de bifurcação em função do parâmetro da carga  $F$ , para diferentes valores de  $\Omega$ . Nestes, verifica-se que, tanto para o modelo acoplado quanto para o modelo desacoplado, há uma mudança significativa no comportamento do sistema quando se consideram perturbações em  $\theta_2$  ou  $\dot{\theta}_2$ , sendo que tais mudanças explicam os diversos vales obtidos nas Figuras 5.8 e 5.12.

Na Figura 5.15 apresentam-se os diagramas de bifurcação considerando o sistema em ressonância fundamental, ou seja,  $\Omega = 1/3$ . Tanto para o caso acoplado como para o desacoplado verifica-se a presença inicial de uma solução de período um, P1, que se torna instável através de uma bifurcação do tipo *pitchfork* supercrítica, dando origem a duas novas soluções de período um, P1' e P1''. Logo após esta bifurcação, ocorre um aumento acentuado das amplitudes de vibração, o que leva ao escape. Embora os diagramas apresentem a mesma seqüência de bifurcações, verifica-se que a bifurcação no caso acoplado acontece para um valor bem inferior àquele do caso desacoplado, o que explica a diminuição da carga de escape. Este fenômeno ocorre devido à ativação do acoplamento modal, ou seja, as coordenadas  $\theta_2$  e  $\dot{\theta}_2$  deixam de ser nulas a partir do ponto de bifurcação, Figura 5.15(a.2), e crescem rapidamente, levando o sistema ao escape. Este comportamento é ilustrado na Figura 5.16, onde se apresenta a resposta no tempo para magnitudes de carga ligeiramente inferior e superior à carga de bifurcação do modelo acoplado. Por exemplo, assumindo como condições iniciais do sistema acoplado as coordenadas perturbadas de um ponto fixo referente a um carregamento antes da bifurcação *pitchfork*,  $F = 0.618$ , Figura 5.16(a), ao se perturbar a coordenada  $\theta_2$  ( $\theta_2 = 0.01$ ) sua amplitude converge para zero. Para uma força ligeiramente superior à carga de bifurcação,  $F = 0.652$ , após uma pequena perturbação em  $\theta_2$ , esta coordenada cresce exponencialmente (divergência) e converge para uma solução estável, onde se observa uma quebra de simetria, Figura 5.16(b).



(a) Acoplado ( $F_{esc} = 0.6946$ )

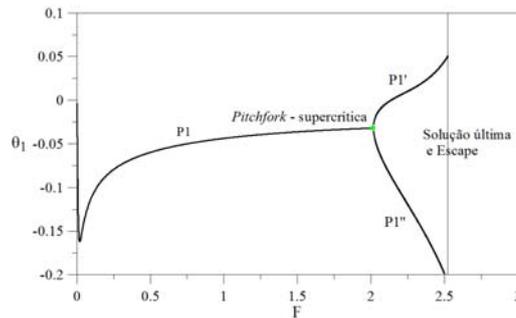
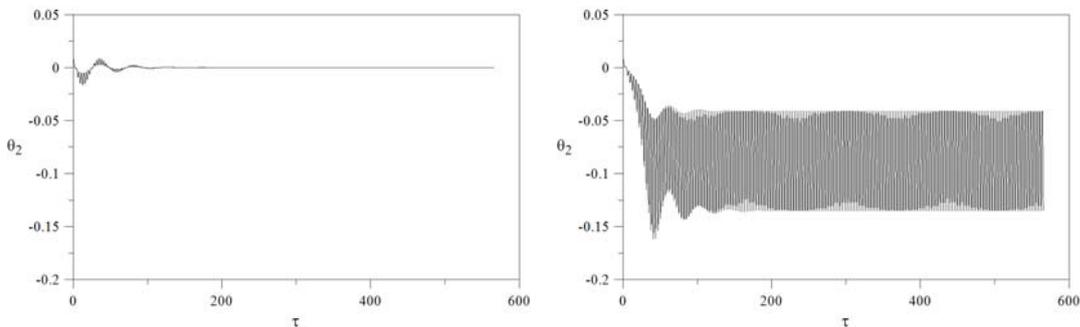


Figura 5.15: Diagramas de bifurcação, modelo acoplado e desacoplado, para  $\Omega = 1/3$ ,  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de Augusti perfeito.



C.I. (-0.054, 0.666, 0.01, 0.0)

C.I. (-0.053, 0.672, 0.01, 0.0)

Figura 5.16: Respostas no tempo para dois níveis de carregamento, considerando diferentes condições iniciais ( $\theta_1, d\theta_1/dt, \theta_2, d\theta_2/dt$ ), para  $\Omega = 1/3$  e  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de Augusti perfeito.

As bifurcações observadas no modelo acoplado e desacoplado variam com a frequência de excitação  $\Omega$ . Na Figura 5.17 são apresentados os resultados para  $\Omega = 0.4$  e  $\Omega = 0.525$ . Em todos os casos o decréscimo da carga de escape ( $F_{esc}$ ) se deve à excitação da coordenada  $\theta_2$ , o que torna a solução desacoplada instável.

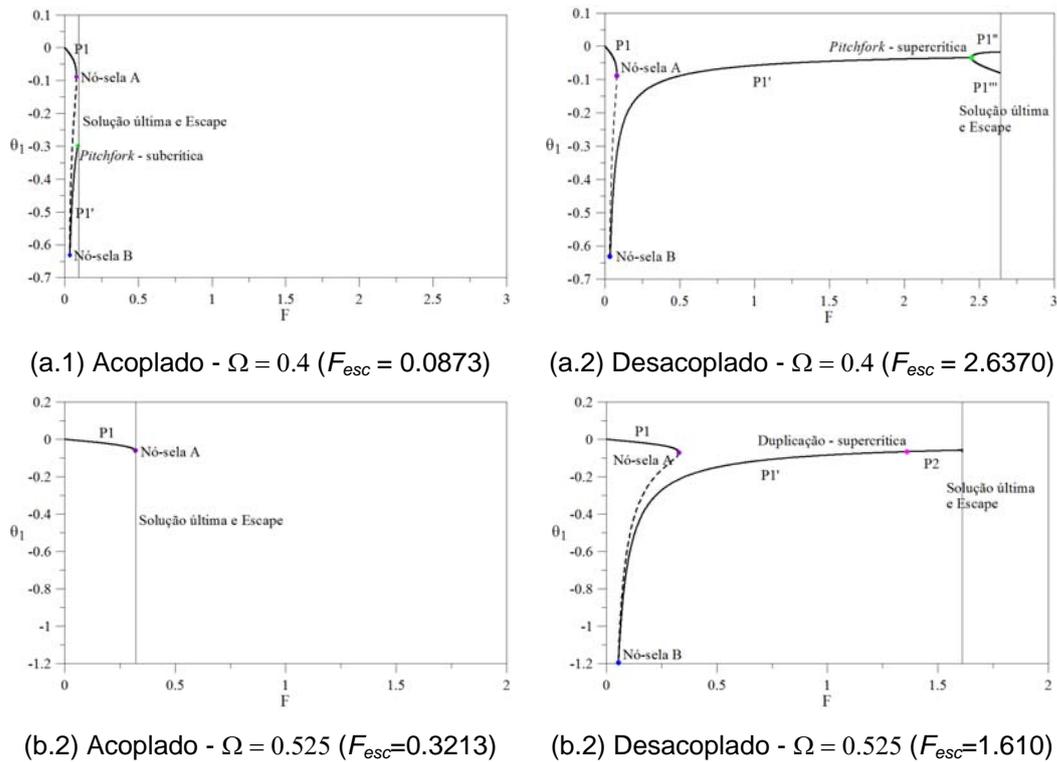


Figura 5.17: Diagramas de bifurcação, modelo acoplado e desacoplado, para  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de Augusti perfeito.

A fim de se avaliar a segurança da estrutura, apresenta-se um estudo da integridade das soluções periódicas para uma variação paramétrica da amplitude da força, através das bacias de atração e da medida de integridade dinâmica LIM.

Na Figura 5.18 apresentam-se as bacias de atração para  $\Omega = 0.525$  com  $F = 0.07$  e  $F = 0.3$ , considerando tanto o caso acoplado como o desacoplado. Tem-se uma solução estável para o caso acoplado enquanto que, para o caso desacoplado, se tem duas soluções estáveis (vide Figura 5.17(b)). Neste último caso, a área escura corresponde às condições iniciais que convergem para a solução P1 e a área clara corresponde às condições iniciais que convergem para a solução P1'. A área branca corresponde, em ambos os casos, ao escape (região insegura). Observa-se que o acoplamento modal causa uma diminuição considerável da região segura. A nuvem de pontos ao redor das bacias indica o caráter fractal das fronteiras das bacias de atração.

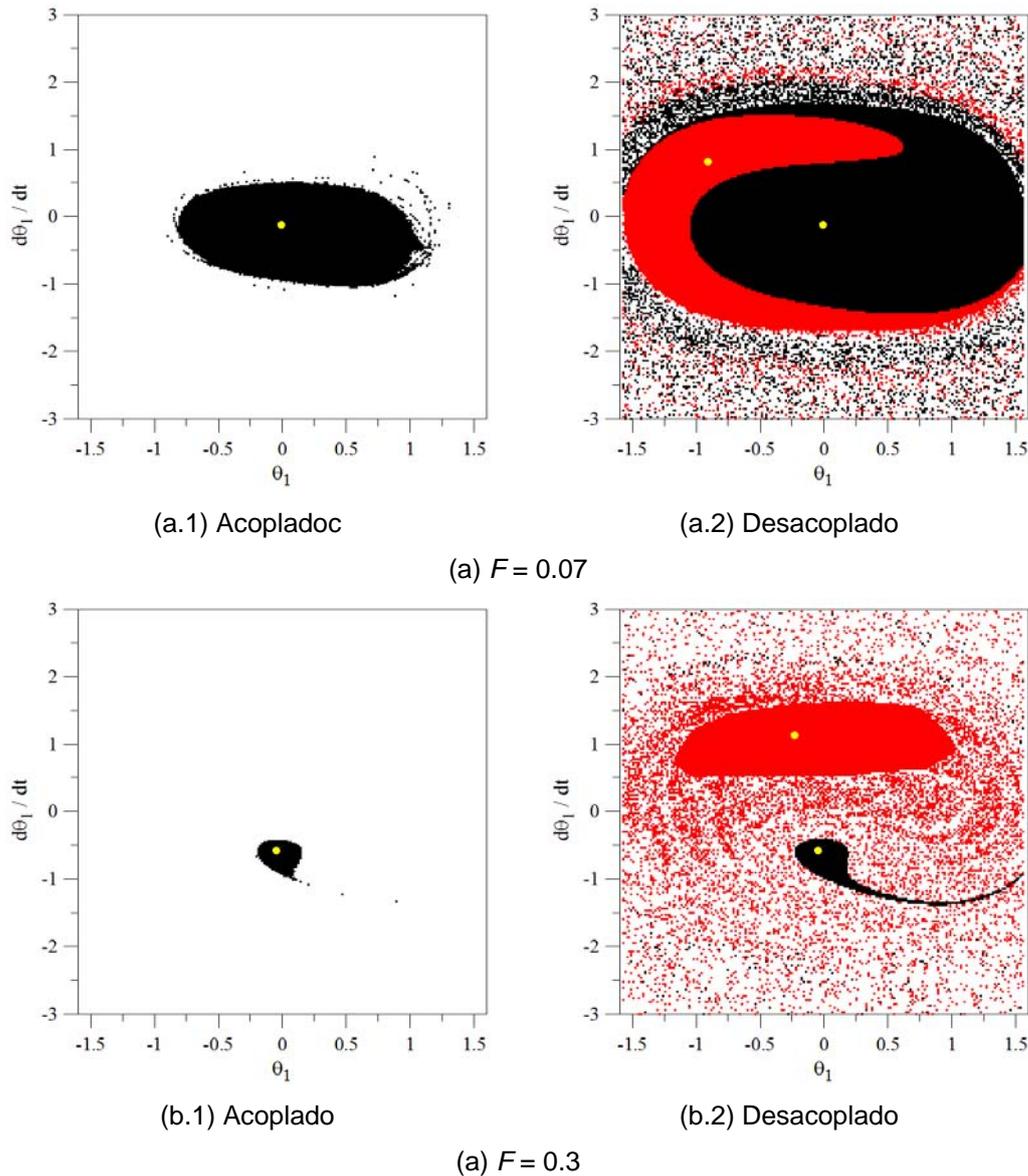


Figura 5.18: Seções das bacias de atração no plano  $\theta_1 \times d\theta_1/dt$ , modelo acoplado e desacoplado, para  $\Omega = 0.525$ ,  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de Augusti perfeito.

A Figura 5.19 apresenta uma comparação entre as bacias de atração do modelo acoplado e desacoplado, para  $\Omega = 1/3$  e  $F = 0.1$ . Novamente, observa-se a grande redução da região segura em virtude do acoplamento global.

Na Figura 5.20 se podem observar as seções das bacias de atração no plano  $\theta_1 \times \theta_2$  para dois níveis de carregamento. Verifica-se na Figura 5.20(a) que, para um carregamento bem inferior ao valor da carga de bifurcação, Figura 5.15(a), o sistema mostra uma grande gama de condições iniciais com  $\theta_2 \neq 0.0$  que levam a uma solução estável. Porém, para um carregamento um pouco inferior ao do ponto de bifurcação, Figura 5.20(b), o sistema apresenta pouquíssimas condições iniciais

com  $\theta_2 \neq 0.0$  que convergem para a solução estável. Neste caso, a bacia praticamente se resume aos pontos ao longo do eixo  $\theta_1$ .

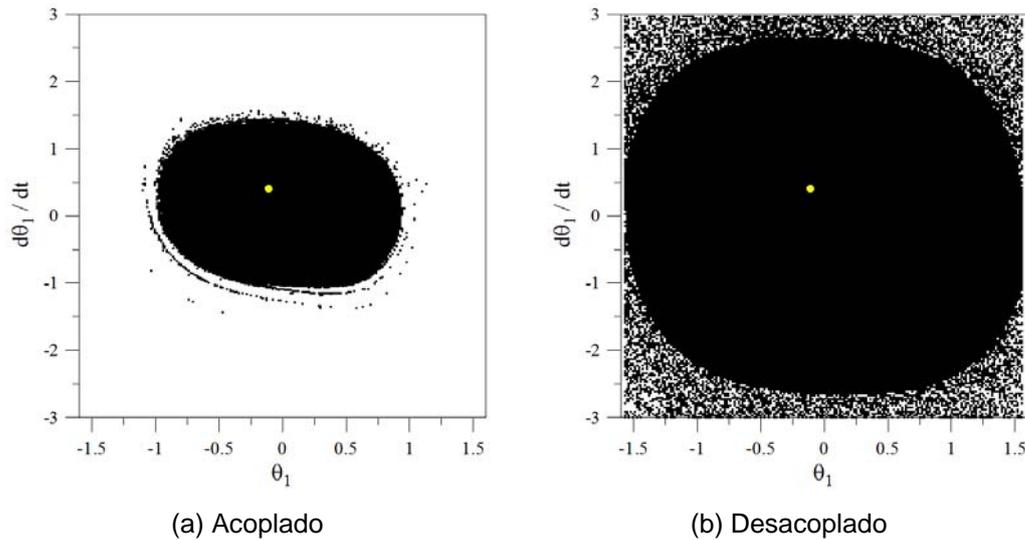


Figura 5.19: Seções das bacias de atração no plano  $\theta_1 \times d\theta_1/dt$ , modelo acoplado e desacoplado, para  $\Omega = 1/3$ ,  $F = 0.1$ ,  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de Augusti perfeito.

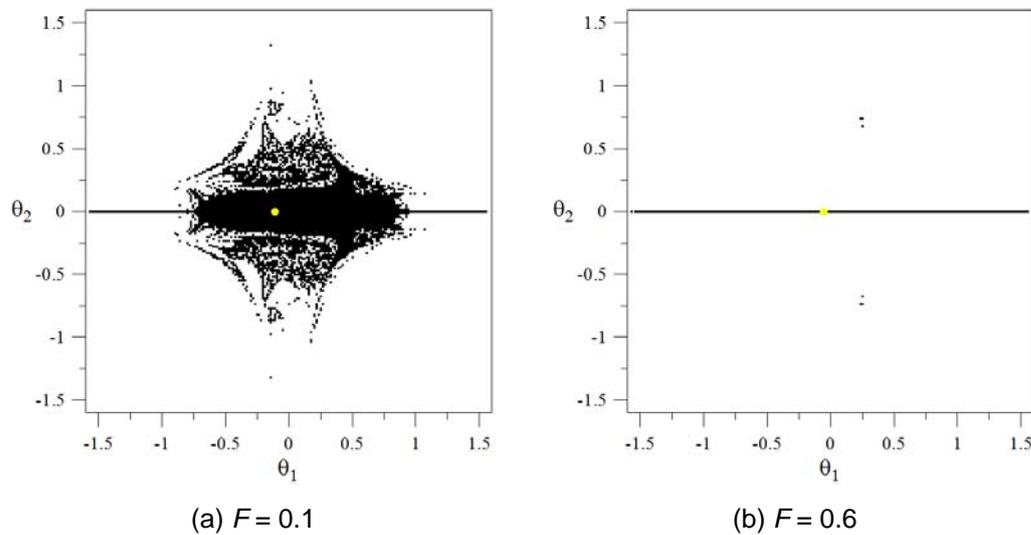


Figura 5.20: Seções das bacias de atração no plano  $\theta_1 \times \theta_2$ , modelo acoplado, para  $\Omega = 1/3$ ,  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de Augusti perfeito.

Por fim, a Figura 5.21 apresenta uma comparação entre as medidas de integridade local, LIM, da solução periódica P1 do modelo acoplado e do desacoplado para  $\Omega = 1/3$  e  $\varphi = 0^\circ$ . O modelo desacoplado apresenta uma curva de integridade com o perfil denominado por Thompson de *Dover Cliff* (Thompson

& Stewart, 1993; Soliman & Thompson, 1989, 1992), onde inicialmente a LIM decresce vagarosamente com o aumento da carga e cai drasticamente para zero quando se aproxima do valor crítico (ponto de bifurcação). Para o modelo acoplado, além do decréscimo no valor inicial da medida de integridade, verifica-se uma diminuição acentuada desde o início, com uma queda quase que linear até certo ponto a partir do qual a bacia se torna quase nula e tende lentamente a zero.

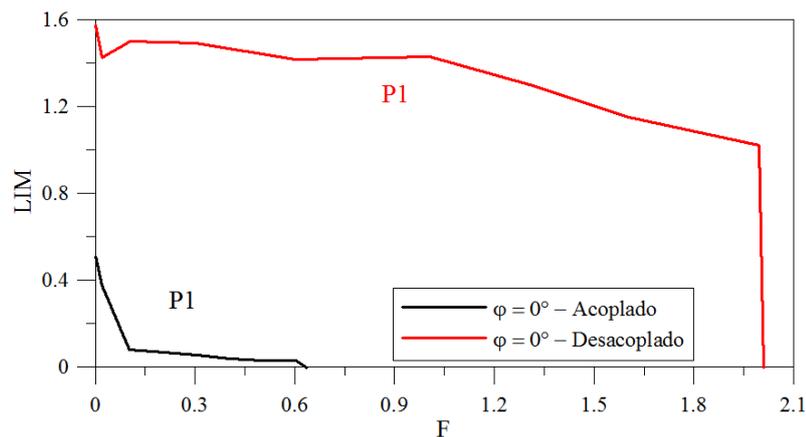


Figura 5.21: Medida de integridade local da bacia de atração, LIM, modelo acoplado e desacoplado, para  $\Omega = 1/3$ ,  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de Augusti perfeito.

O outro possível modelo desacoplado localiza-se no plano auxiliar  $u \times du/dt$  (ou, alternativamente, no plano  $v \times dv/dt$ ) quando a direção da excitação é de  $\varphi = 45^\circ$ , ou seja, no plano das variedades de dois pontos de sela e do modo não-linear similar (ver Capítulo 4). As fronteiras de escape considerando o modelo acoplado e desacoplado são apresentadas na Figura 5.22.

Observa-se que o sistema desacoplado não sofre influência do modo não-linear desacoplado (*hardening*), mas somente do modo não-linear acoplado (*softening*) que pertence a esse plano auxiliar  $u \times du/dt$ . Por isso a menor magnitude de  $F_{esc}$  localiza-se à esquerda da ressonância fundamental. Já para o caso acoplado o sistema mostra a influência dos dois modos, aparecendo, como no caso anterior, um segundo vale em torno de  $\Omega = 0.4$ .

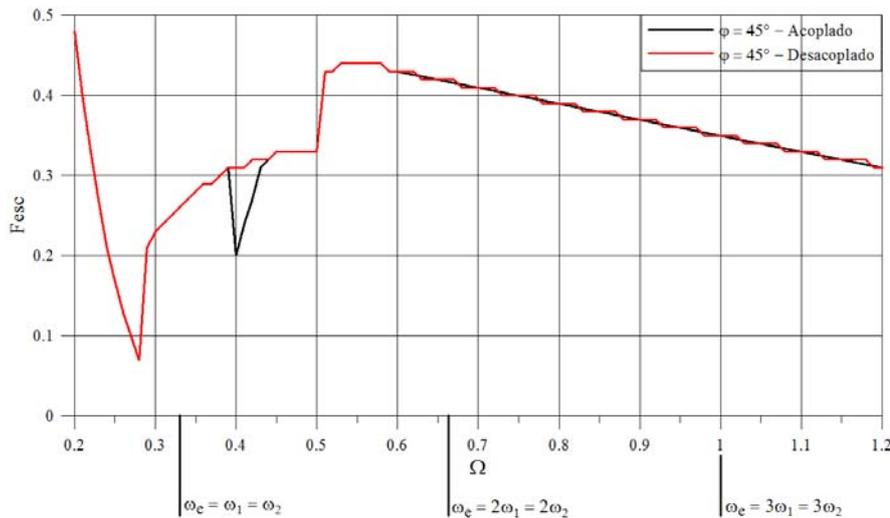
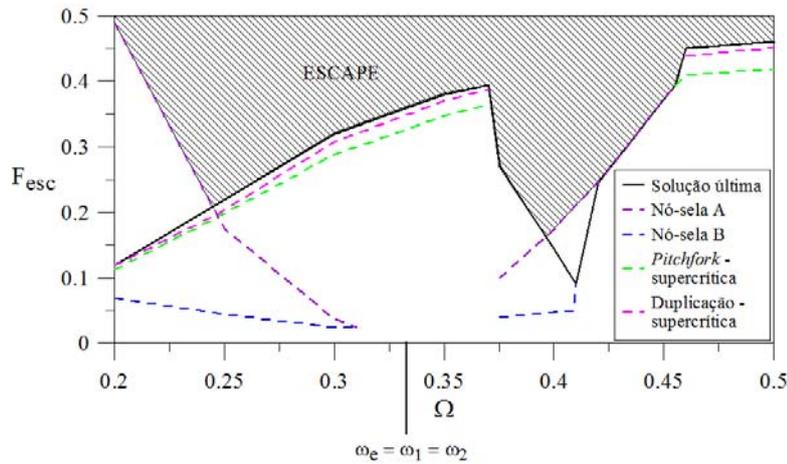
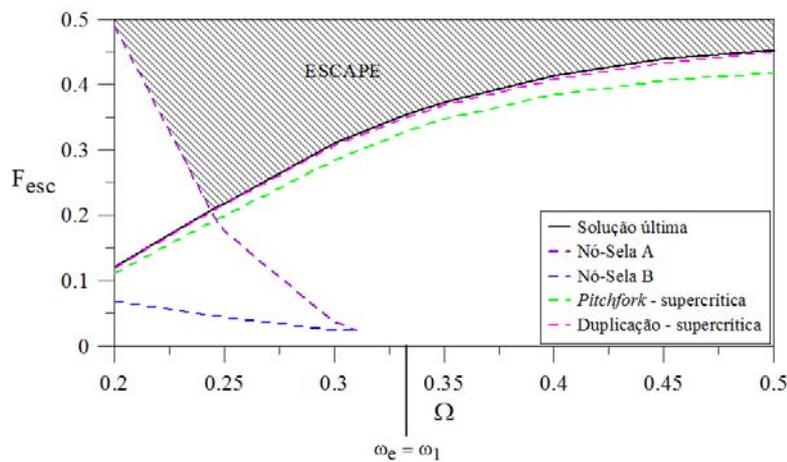


Figura 5.22: Fronteiras de estabilidade (escape), modelo acoplado e desacoplado, para  $\varphi = 45^\circ$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de Augusti perfeito (valores mínimos –  $F_{esc} = 0.07$  (acoplado e desacoplado)).

Na Figura 5.23 mostra-se, de uma forma mais clara, o comportamento dessas duas regiões de ressonância através de uma análise minuciosa dos diagramas de bifurcação, obtidos pelo método da continuação, com a variação de  $\Omega$ . Com isto, tem-se uma visão clara da seqüência de bifurcações que antecede o escape em cada caso. As seqüências de bifurcações que caracterizam o primeiro vale são características de um sistema com comportamento *softening*, enquanto as seqüências de bifurcações que caracterizam o segundo vale são características de um sistema com comportamento *hardening* (Thompson & Stewart, 1993; Soliman & Thompson, 1989, 1992). Neste caso, verifica-se que um modelo não-linear reduzido com um grau de liberdade, baseado na teoria dos modos não-lineares, seria válido apenas na vizinhança do primeiro vale. Tem-se assim que a dedução de modelos reduzidos deve ser feita com bastante cuidado em sistemas que apresentem possíveis acoplamentos entre os diversos modos não-lineares de vibração, como nesse caso onde há uma ressonância interna 1:1.



(a) Acoplado

(Valores mínimos (2 vales) –  $F_{esc} = 0.2071$  e  $F_{esc} = 0.1653$ )

(b) Desacoplado

(Valor mínimo –  $F_{esc} = 0.2071$ )

Figura 5.23: Mapeamento das bifurcações locais na região de ressonância fundamental, modelo acoplado e desacoplado, para  $\varphi = 45^\circ$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de Augusti perfeito.

A significativa diferença entre os valores de escape para  $\Omega = 0.4$ , Figura 5.23, pode ser compreendida observando os diagramas de bifurcação em função da magnitude da carga para o sistema acoplado e desacoplado, Figura 5.24. O modelo acoplado apresenta uma solução estável de período um, P1, que desaparece em virtude de uma bifurcação nó-sela, dando origem a uma solução instável, que, posteriormente, através de outra bifurcação nó-sela origina a solução estável de período um, P1', que se torna instável através de uma bifurcação *pitchfork* subcrítica. Neste caso o escape ocorre no ponto de sela A. Já o modelo desacoplado possui uma solução P1 que permanece estável até um elevado valor

do carregamento e torna-se instável através de uma bifurcação *pitchfork* supercrítica, dando origem às soluções estáveis de período um,  $P1'$  e  $P1''$ , ocorrendo o escape após a perda de estabilidade destas soluções.

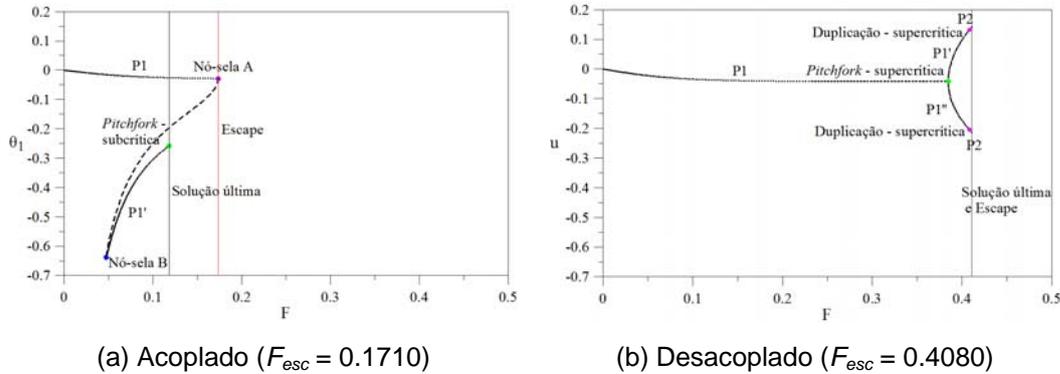


Figura 5.24: Diagramas de bifurcação, modelo acoplado e desacoplado, para  $\Omega = 0.4$ ,  $\varphi = 45^\circ$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de Augusti perfeito.

Para  $\Omega = 1/3$  verifica-se, através da Figura 5.25, que os diagramas de bifurcação em função da magnitude da carga ( $F$ ), tanto do modelo acoplado como do desacoplado, apresentam o mesmo comportamento. Neste caso o modelo desacoplado com 1GL pode ser usado para se estudar a dinâmica da estrutura.

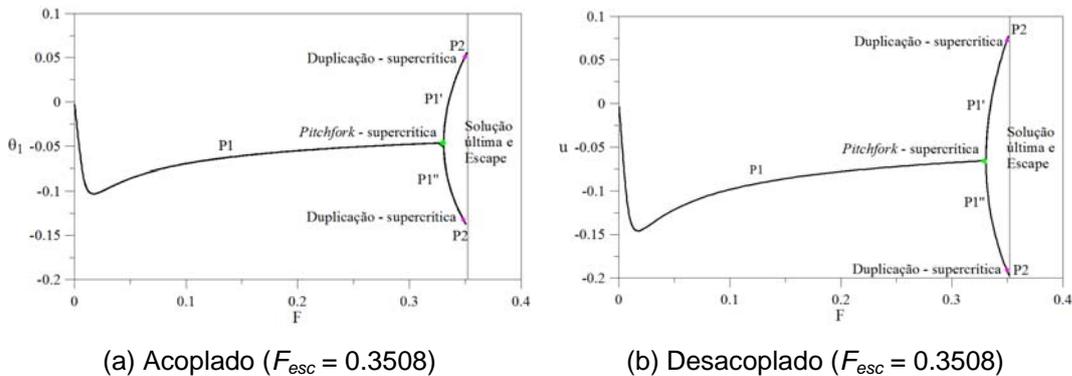


Figura 5.25: Diagramas de bifurcação, modelo acoplado e desacoplado, para  $\Omega = 1/3$ ,  $\varphi = 45^\circ$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de Augusti perfeito.

Com o intuito de avaliar a segurança do modelo considerando  $\varphi = 45^\circ$ , mostra-se na Figura 5.26 as seções das bacias de atração do modelo acoplado nos planos  $\theta_1 \times d\theta_1/dt$  e  $\theta_1 \times \theta_2$  para  $\Omega = 1/3$  e magnitudes crescentes de  $F$ . Constata-se que, com o aumento de  $F$ , a bacia apresenta uma acentuada erosão e estratificação em virtude de uma bifurcação global heteroclínica.

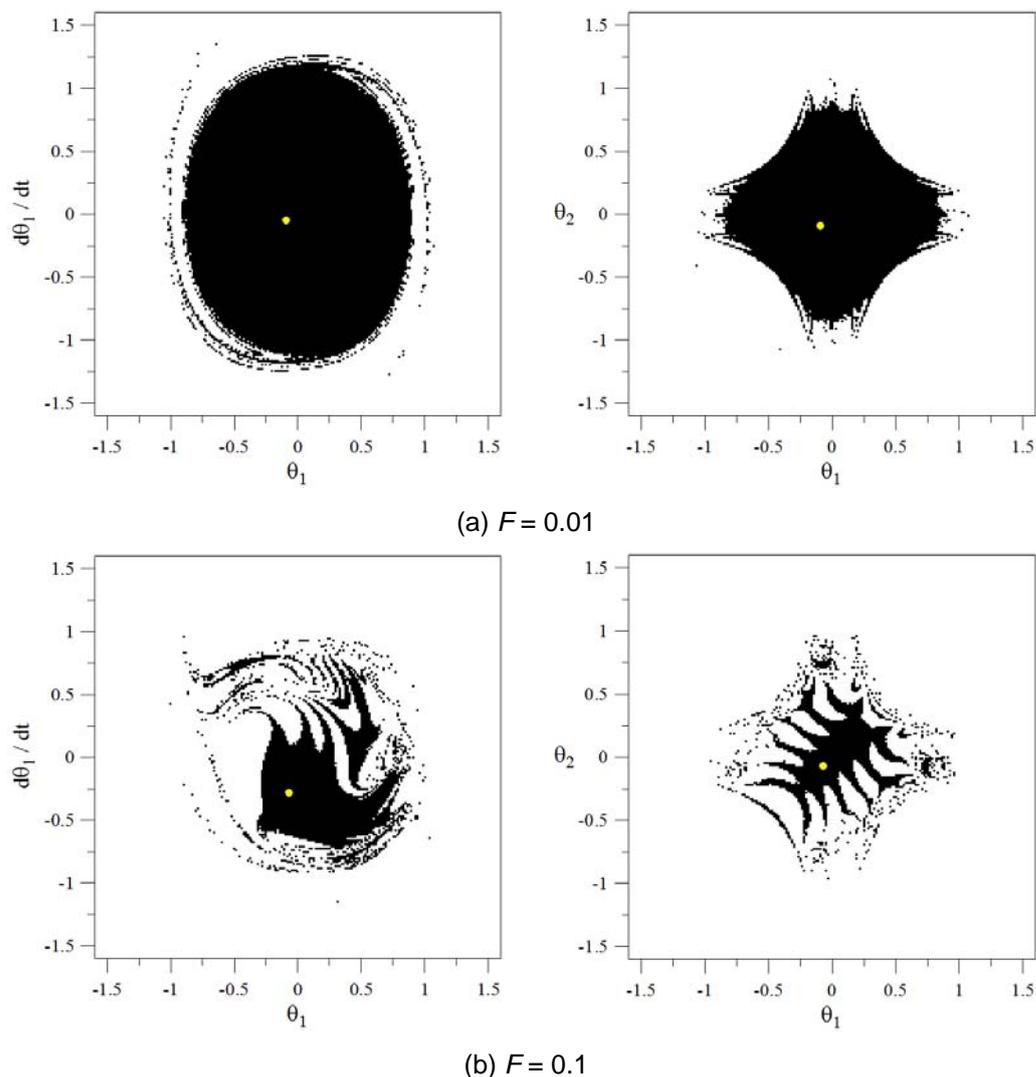


Figura 5.26: Seções das bacias de atração nos planos  $\theta_1 \times d\theta_1/dt$  e  $\theta_1 \times \theta_2$ , modelo acoplado, para  $\Omega = 1/3$ ,  $\varphi = 45^\circ$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de Augusti perfeito.

A Figura 5.27 apresenta as bacias de atração juntamente com as variedades dos pontos de sela para valores crescentes de  $F$  obtidas com o modelo desacoplado. As linhas escuras representam as variedades estáveis dos pontos de sela e as linhas claras representam as variedades instáveis dos pontos de sela. Observa-se que para  $F = 0.1$  já ocorreu à bifurcação global e que a complexa fronteira e a acentuada erosão da bacia de atração se devem ao número infinito de cruzamentos entre as duas variedades após a bifurcação heteroclínica (Thompson & Stewart, 1993; Soliman & Thompson, 1989 e 1992). Cabe ressaltar que as bacias no plano  $\theta_1 \times d\theta_1/dt$  observadas na Figura 5.26 são as projeções das bacias da Figura 5.27 a  $45^\circ$ .

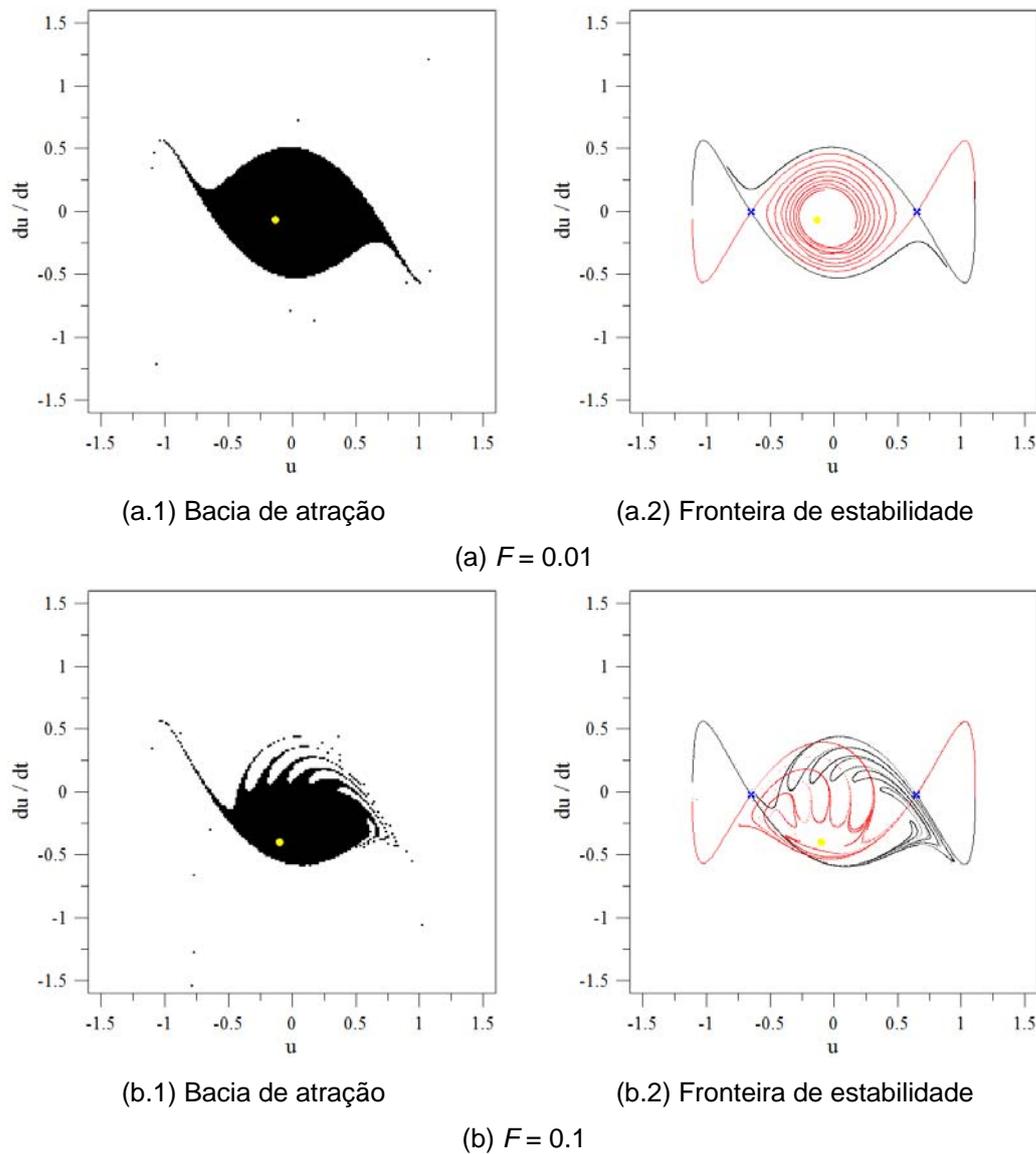


Figura 5.27: Seções das bacias de atração e variedades dos pontos de sela no plano  $u \times du/dt$ , modelo desacoplado, para  $\Omega = 1/3$ ,  $\varphi = 45^\circ$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de Augusti perfeito.

Completando a análise do modelo de Augusti perfeito com  $\varphi = 45^\circ$ , apresentam-se duas comparações das medidas de integridade LIM, entre o modelo acoplado e o desacoplado na Figura 5.28, uma para  $\Omega = 1/3$  e outra para  $\Omega = 0.4$ . Verifica-se que para  $\Omega = 1/3$ , Figura 5.28(a), as medidas LIM apresentam o mesmo comportamento para a solução P1, corroborando o fato de que o modelo de Augusti pode ser desacoplado nesse plano auxiliar  $u \times du/dt$  nessa faixa de frequência. Já para  $\Omega = 0.4$ , observa-se um comportamento diverso entre as medidas de integridade LIM do modelo acoplado e desacoplado. Verifica-se que a

completa compreensão do modelo é necessária para evitar resultados errôneos, pois, como se verifica na Figura 5.23, o acoplamento modal gera regiões de instabilidade extremamente perigosas no modelo acoplado que não aparecem no modelo desacoplado. Isto indica, ainda, que o modelo desacoplado não representa com fidelidade o modelo acoplado em toda a faixa de frequência considerada.

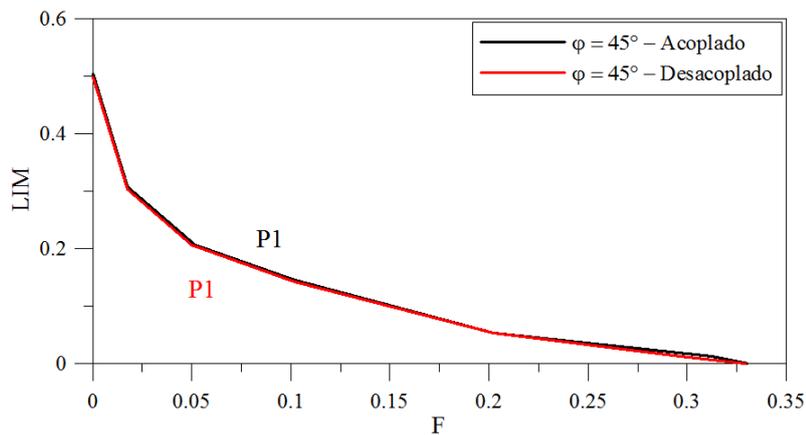
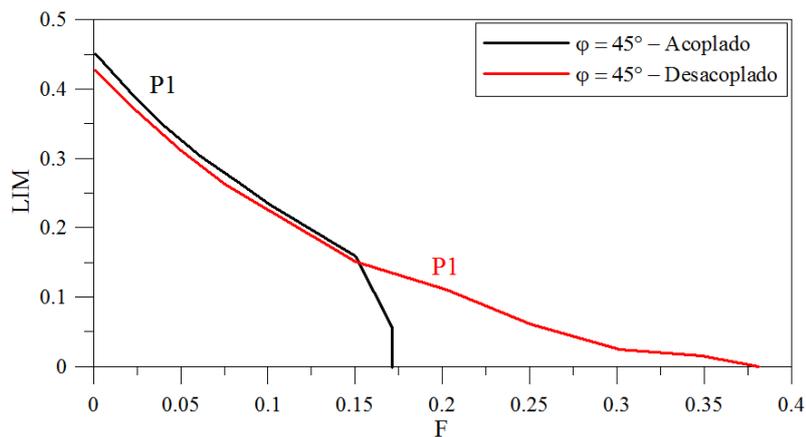
(a)  $\Omega = 1/3$ (b)  $\Omega = 0,4$ 

Figura 5.28: Medida de integridade local da bacia de atração, LIM, modelo acoplado e desacoplado, para  $\varphi = 45^\circ$ ,  $\lambda = 0,9$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0,01$ . Modelo de Augusti perfeito.

O comportamento do modelo de Augusti perfeito para valores de  $\varphi$  entre  $0^\circ$  e  $45^\circ$ , planos que não podem ser desacoplados, é estudado a seguir. Na Figura 5.29 apresenta-se a fronteira de escape no entorno da ressonância fundamental, bem como um mapeamento de todas as bifurcações locais que ocorrem antes do escape considerando  $\varphi = 2^\circ$ .

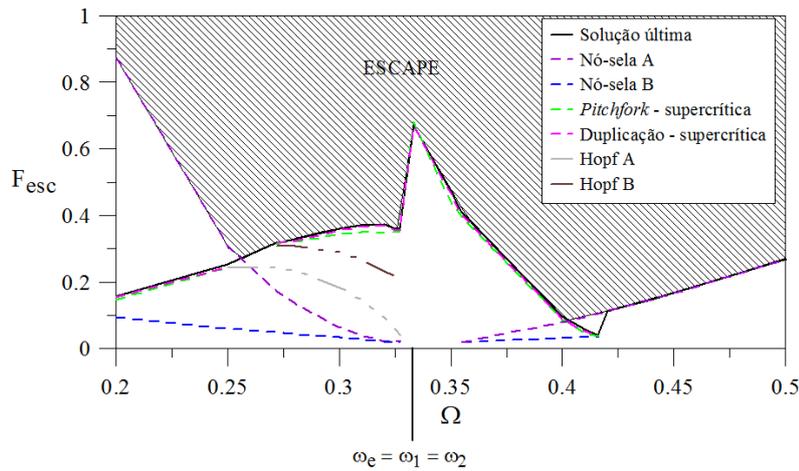


Figura 5.29: Mapeamento das bifurcações locais na região de ressonância fundamental, modelo acoplado, para  $\varphi = 2^\circ$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de Augusti perfeito (valores mínimos (2 vales) –  $F_{esc} = 0.2705$  e  $F_{esc} = 0.0882$ ).

Observa-se que o comportamento dinâmico do modelo é bastante complexo, exibindo uma grande variedade de bifurcações, incluindo bifurcações do tipo Hopf e soluções caóticas dentro do vale potencial, como ilustra o diagrama de bifurcação para  $\varphi = 2^\circ$  e  $\Omega = 0.3$ , Figura 5.30.

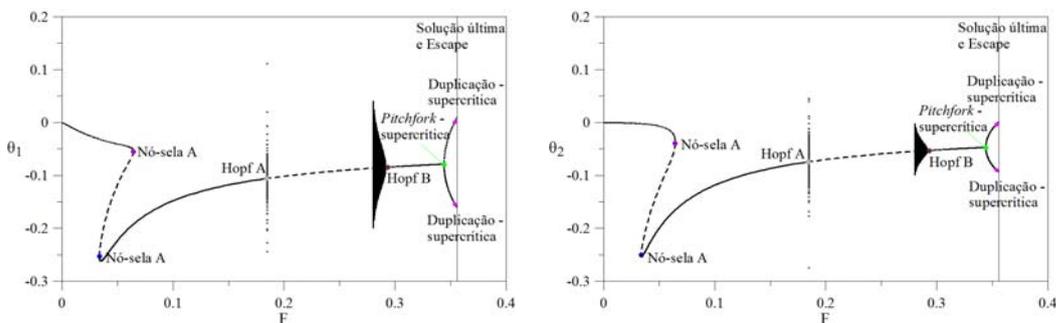


Figura 5.30: Diagramas de bifurcação, modelo acoplado, para  $\Omega = 0.3$ ,  $\varphi = 2^\circ$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de Augusti perfeito ( $F_{esc} = 0.3545$ ).

Os resultados para diversos valores de  $\varphi$  entre  $0^\circ$  e  $45^\circ$ , direções que não podem ser desacoplados, mostram uma grande riqueza de fenômenos oriundos do acoplamento dos diversos modos de vibração não-lineares, indicando ser o estudo da dinâmica não-linear de estruturas com forte acoplamento modal uma promissora área de pesquisa. Por outro lado, a integridade desta classe de estruturas é bastante reduzida em virtude do acoplamento, levando a uma severa e contínua degradação da bacia desde o início do carregamento, como demonstram

os resultados apresentados na Figura 5.31, onde se apresenta a variação da medida de integridade dinâmica LIM da solução P1 para diversos valores de  $\varphi$ .

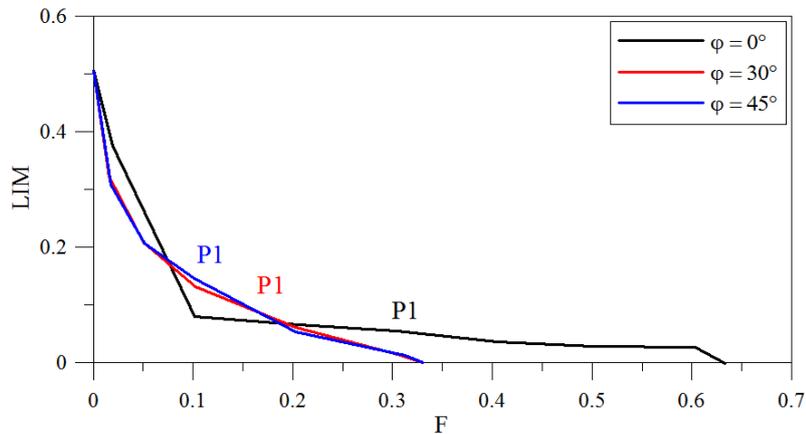


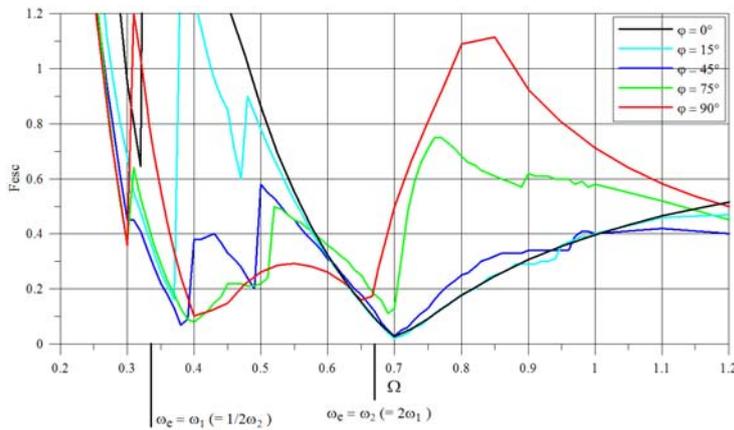
Figura 5.31: Variação da medida de integridade local da bacia de atração, LIM, modelo acoplado, para  $\Omega = 1/3$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de Augusti perfeito.

### 5.2.2. Influência da Rigidez Relativa das Molas

Para se estudar o comportamento do modelo de Augusti considerando a influência da rigidez relativa das molas, consideram-se dois valores de  $\alpha$  que geram além da ressonância fundamental, ressonância interna 1:2 ( $\alpha = 1.3$ ) e ressonância interna 1:3 ( $\alpha = 1.8$ ). As frequências naturais para estes valores de  $\alpha$  são apresentadas na Tabela 5.2. As fronteiras de escape para o modelo de Augusti considerando a influência da rigidez relativa das molas são apresentadas na Figura 5.32 no plano  $F_{esc} \times \Omega$  para diferentes valores de  $\varphi$ .

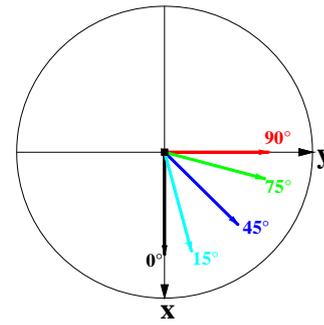
Tabela 5.2: Frequências naturais para  $\lambda = 0.9$ . Modelo de Augusti considerando a influência da rigidez relativa das molas.

Caso	Primeira Frequência - $\Omega_1$	Segunda Frequência - $\Omega_2$
$\alpha = 1.3$	1/3	2/3
$\alpha = 1.8$	1/3	1

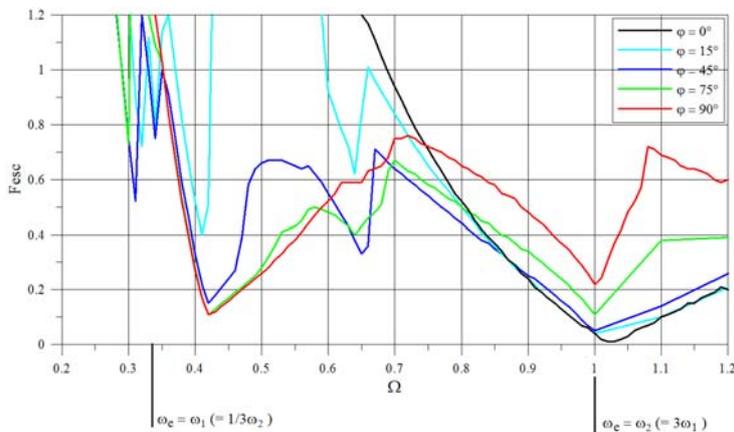


(a.1) Curvas de escape (Valores mínimos (2 vales) –  
 $F_{esc} = 0.0700$  ( $\varphi = 45^\circ$ ) e  $F_{esc} = 0.0300$  ( $\varphi = 15^\circ$ ))

(a)  $\alpha = 1.3$  (ressonância interna 1:2)

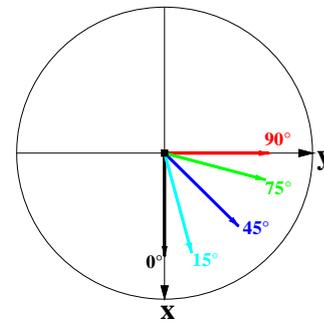


(a.2) Direção da excitação



(b.1) Curvas de escape (Valores mínimos (2 vales) –  
 $F_{esc} = 0.1100$  ( $\varphi = 90^\circ$ ) e  $F_{esc} = 0.0100$  ( $\varphi = 0^\circ$ ))

(b)  $\alpha = 1.8$  (ressonância interna 1:3)



(b.2) Direção da excitação

Figura 5.32: Fronteiras de estabilidade (escape) para  $\lambda = 0.9$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de Augusti considerando a influência da rigidez relativa das molas.

Verifica-se na Figura 5.32(a), obtida para  $\alpha = 1.3$ , que existem duas regiões principais de ressonância, uma em torno de  $\omega_e = \omega_1$  e a segunda na vizinhança de  $\omega_e = \omega_2$ . Esta segunda região, que corresponde à ressonância interna 1:2 ( $\omega_e = 2\omega_1$ ), apresenta as menores cargas de escape para a maioria dos valores de  $\varphi$ . Na Figura 5.32(b), para  $\alpha = 1.8$ , verifica-se que a região mais crítica ocorre na vizinhança da frequência natural  $\omega_e = \omega_2$ , que corresponde à ressonância interna 1:3 ( $\omega_e = 3\omega_1$ ). Estes resultados mostram que a existência de ressonância interna é extremamente importante na estabilidade de um sistema sob vibração forçada.

Comparando-se as duas figuras, verifica-se que, na primeira região de ressonância,  $\omega_e = \omega_1$ , à medida que  $\alpha$  aumenta, o valor de  $F_{esc}$  aumenta progressivamente. Na Figura 5.33 mostra-se, através de um gráfico em coordenadas polares, a variação de  $F_{esc}$  com a direção da excitação  $\varphi$  para  $\alpha = 1.3$  e  $\omega_e = \omega_1$  (Figura 5.33(a)) e  $\omega_e = \omega_2$  (Figura 5.33(b)). Os resultados são comparados com aqueles obtidos para  $\alpha = 1$ . Verifica-se que a direção da excitação  $\varphi$  tem uma grande influência na carga de escape.

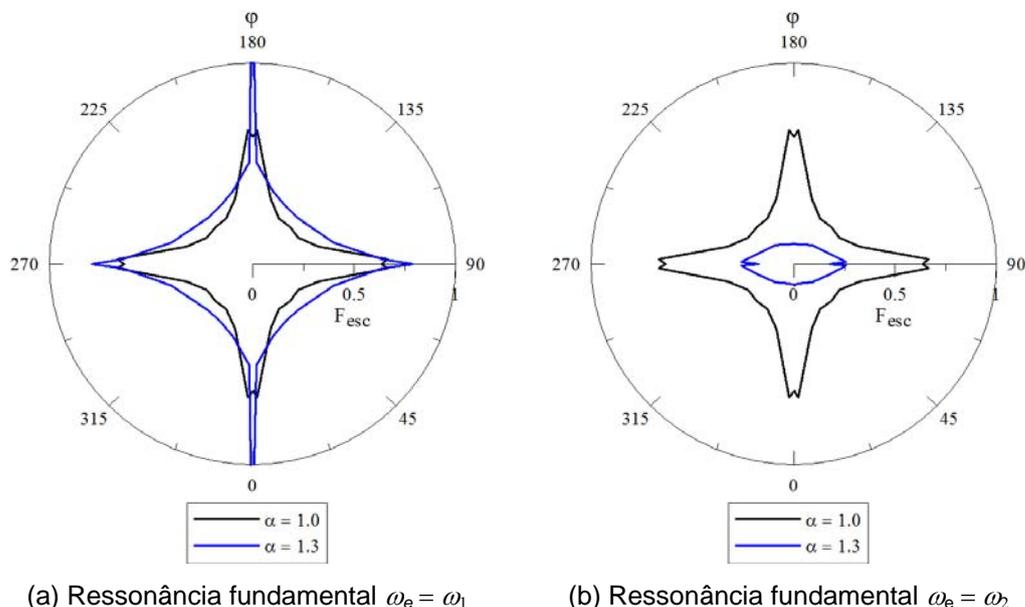


Figura 5.33: Variação da carga de escape,  $F_{esc}$ , com a direção da excitação,  $\varphi$ , (gráfico em coordenadas polares) para  $\lambda = 0.9$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de Augusti considerando a influência da rigidez relativa das molas.

Pela Figura 5.32, constata-se que as magnitudes mais baixas de  $F_{esc}$ , para qualquer  $\varphi$ , estão localizadas ligeiramente à direita das ressonâncias fundamentais ( $\omega_e = \omega_1$  e  $\omega_e = \omega_2$ ). Isso se deve ao caráter da relação frequência-amplitude dos dois modos não-lineares desacoplados que, como mostrado na Figura 4.22, são do tipo *hardening*. Isto se pode observar de forma clara através da Figura 5.34 que mostra as curvas de ressonância para  $\alpha = 1.3$  (ressonância interna 1:2),  $F = 0.02$  e diversos valores de  $\varphi$  nas duas regiões principais de ressonância juntamente com as relações frequência-amplitude. Para esse nível de carregamento ( $F = 0.02$ ) a influência dos modos não-lineares acoplados é muito pequena,

porém, para níveis superiores de carregamento, as curvas de ressonância começam a apresentar picos referentes a tais modos.

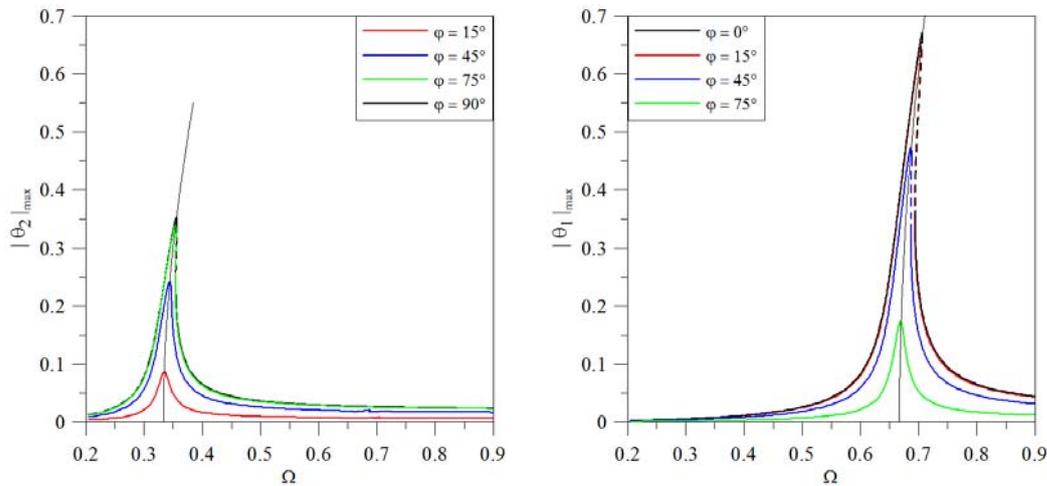


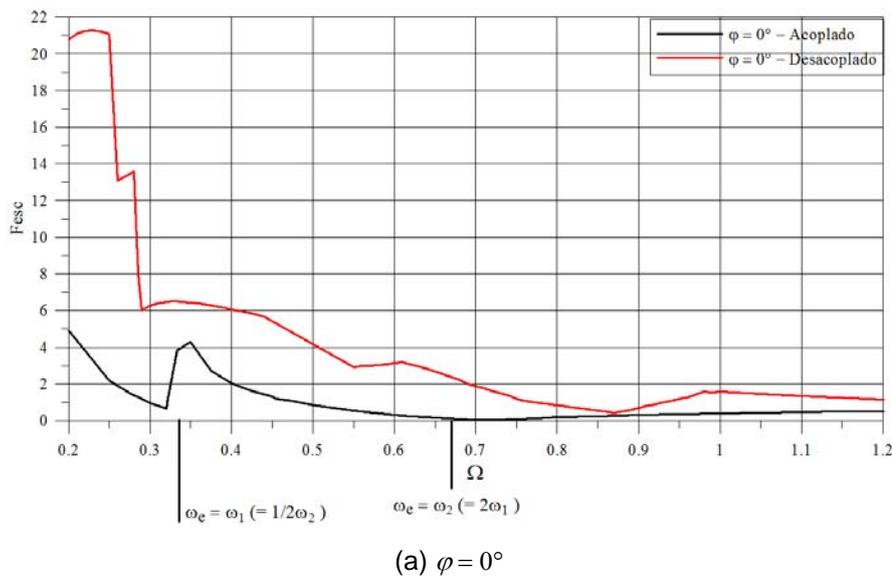
Figura 5.34: Curvas de ressonância para  $F = 0.02$ ,  $\alpha = 1.3$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de Augusti considerando a influência da rigidez relativa das molas.

Com base nos resultados do Capítulo 4, tem-se que o sistema imperfeito pode ser facilmente desacoplado nos planos que contêm os modos não-lineares similares desacoplados, ou seja, nos planos  $\theta_1 \times d\theta_1/dt$  e  $\theta_2 \times d\theta_2/dt$ , quando a excitação coincide com um destes planos.

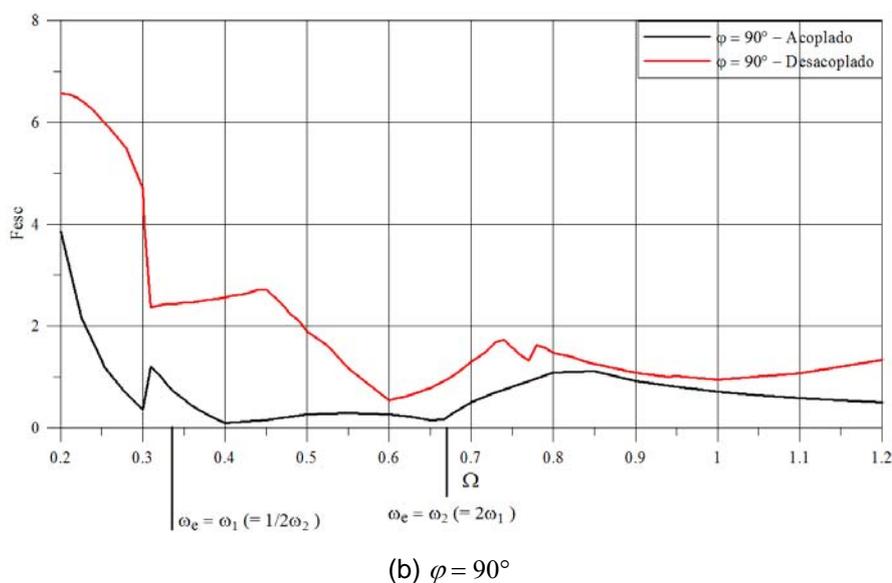
Na Figura 5.35(a) compara-se o comportamento do sistema acoplado com o desacoplado para  $\varphi = 0^\circ$ , considerando  $\alpha = 1.30$ . Já na Figura 5.35(b) mostra-se o comportamento acoplado e desacoplado, considerando  $\varphi = 90^\circ$  e  $\alpha = 1.3$ . Verifica-se, como no modelo perfeito, uma grande diferença nos valores de  $F_{esc}$  entre o modelo acoplado e o desacoplado.

Uma melhor compreensão dos dois vales que aparecem na Figura 5.32(a), associados às duas regiões principais de ressonância e que apresentam as menores magnitudes de  $F_{esc}$ , pode ser obtida com um mapeamento de todas as bifurcações que ocorrem antes do escape nos diagramas de bifurcação obtidos em função da magnitude da excitação  $F$  para cada valor da frequência de excitação  $\Omega$ . Na Figura 5.36(a) são apresentados os resultados para  $\alpha = 1.3$  e  $\varphi = 75^\circ$  na região de ressonância fundamental da primeira frequência e na Figura 5.36(b) para  $\alpha = 1.3$  e  $\varphi = 15^\circ$  na região de ressonância associada à segunda frequência. Verifica-se que as bifurcações são características de sistemas com ganho de rigidez. Nota-se

também que o modelo imperfeito apresenta um comportamento dinâmico bem mais simples que o modelo perfeito, ocorrendo poucas bifurcações antes do escape e apenas próximo ao fundo do vale ( $F_{esc}$  mínimo). Como ilustração, mostra-se na Figura 5.37 o diagrama de bifurcação para  $\alpha = 1.3$ ,  $\varphi = 45^\circ$  e  $\Omega = 2/3$ . O diagrama de bifurcação mostra que, nesta condição, o sistema apresenta uma solução de período um, P1, que permanece estável até a bifurcação *pitchfork* subcrítica.

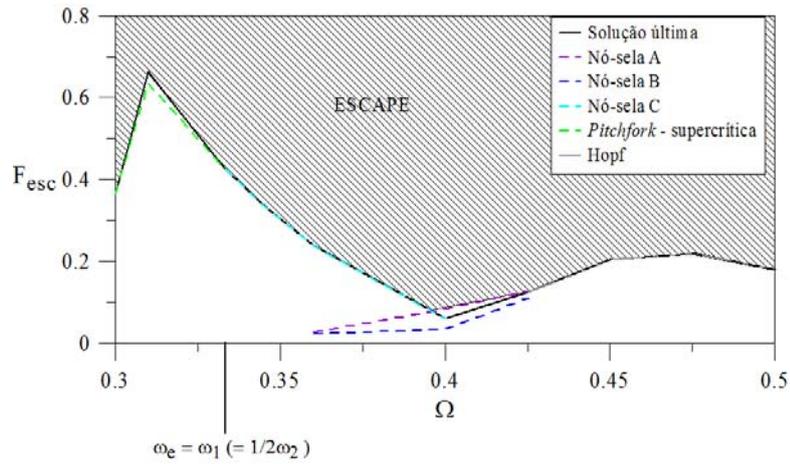


(Valores mínimos –  $F_{esc} = 0.0266$  (acoplado) e  $F_{esc} = 0.4400$  (desacoplado))



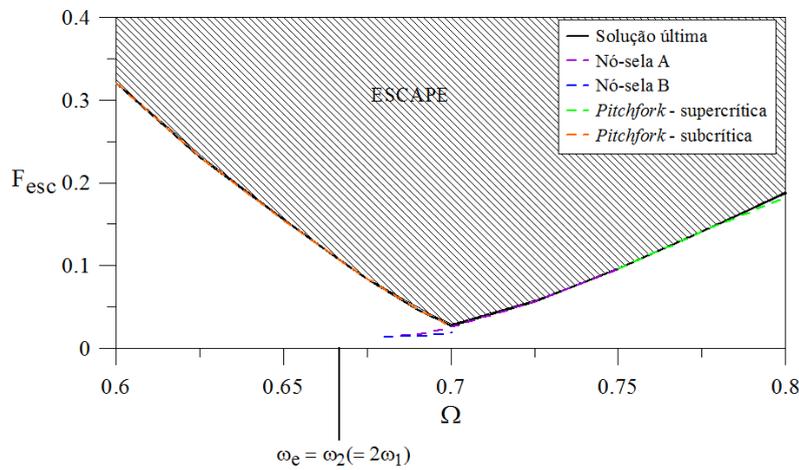
(Valores mínimos –  $F_{esc} = 0.1026$  (acoplado) e  $F_{esc} = 0.5800$  (desacoplado))

Figura 5.35: Fronteiras de estabilidade (escape), modelo acoplado e desacoplado, para  $\alpha = 1.3$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de Augusti considerando a influência da rigidez relativa das molas.



(a)  $\varphi = 75^\circ$

(Valor mínimo (vale) –  $F_{esc} = 0.0598$ )



(b)  $\varphi = 15^\circ$

(Valor mínimo (vale) –  $F_{esc} = 0.0300$ )

Figura 5.36: Mapeamento das bifurcações locais na região de ressonância fundamental, modelo acoplado, para  $\alpha = 1.3$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de Augusti considerando a influência da rigidez relativa das molas.

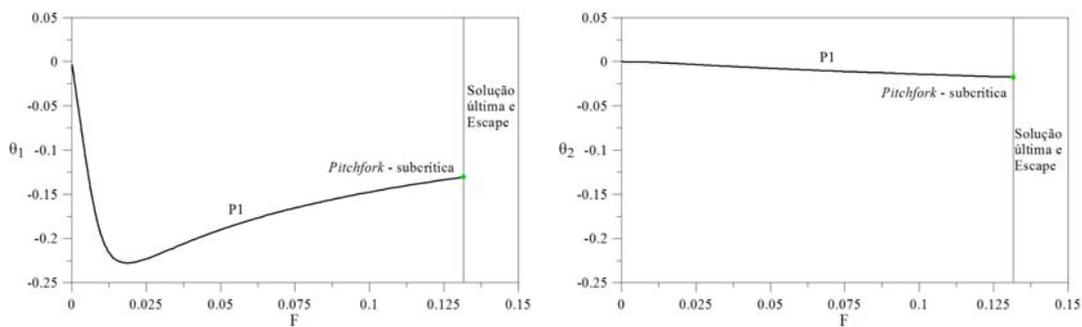


Figura 5.37: Diagramas de bifurcação, modelo acoplado, para  $\Omega = 2/3$ ,  $\varphi = 45^\circ$ ,  $\alpha = 1.3$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de Augusti considerando a influência da rigidez relativa das molas ( $F_{esc} = 0.1315$ ).

Avaliando a evolução das bacias de atração à medida que  $F$  cresce, Figura 5.38, verifica-se a presença de uma acentuada erosão para pequenos níveis de carregamento.

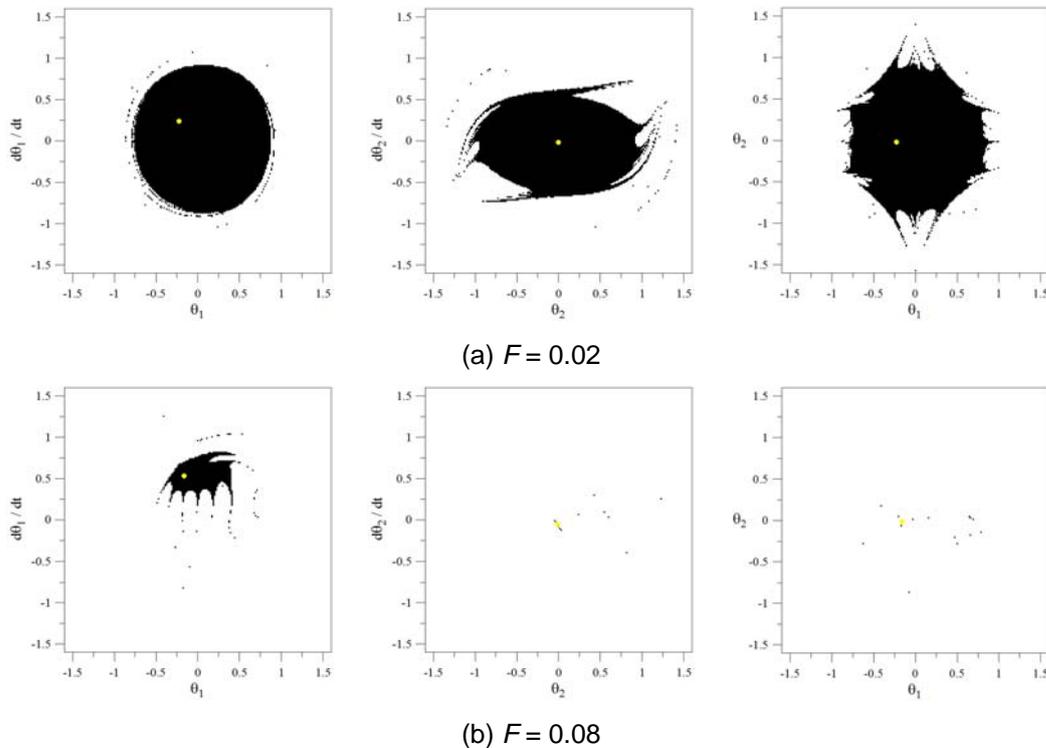


Figura 5.38: Seções das bacias de atração nos planos  $\theta_1 \times d\theta_1/dt$ ,  $\theta_2 \times d\theta_2/dt$  e  $\theta_1 \times \theta_2$ , modelo acoplado, para  $\Omega = 2/3$ ,  $\varphi = 45^\circ$ ,  $\alpha = 1.3$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de Augusti considerando a influência da rigidez relativa das molas.

Finalmente, mostra-se na Figura 5.39 a variação da medida de integridade dinâmica local LIM da solução P1 dos modelos imperfeitos acoplados, considerando  $\Omega = 2/3$  e  $\alpha = 1.3$ . Com exceção do plano  $\varphi = 90^\circ$  (por simetria também  $\varphi = 270^\circ$ ), as curvas de integridade apresentam um comportamento similar, ou seja, com uma erosão inicial mais acentuada e depois mais suave até o valor de escape, que muda ligeiramente seu valor de caso para caso. Já a curva de integridade para  $\varphi = 90^\circ$  apresenta inicialmente uma erosão suave e quase linear com uma queda brusca do LIM quando o valor do carregamento aproxima-se do valor crítico (*Dover cliff*).

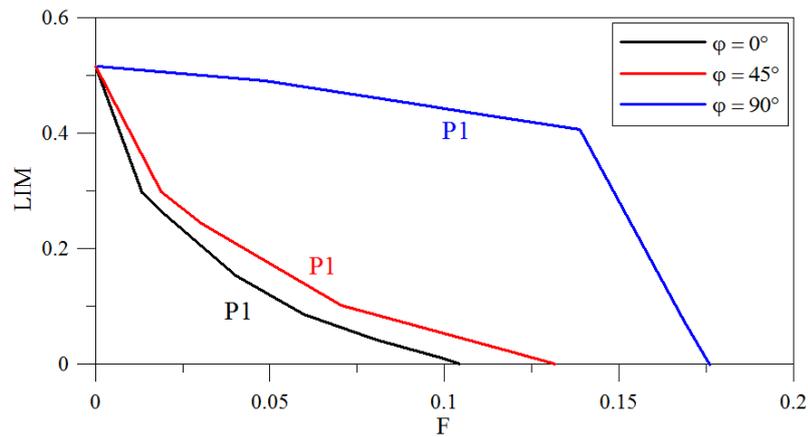


Figura 5.39: Variação da medida de integridade local da bacia de atração, LIM, modelo acoplado, para  $\Omega = 2/3$ ,  $\alpha = 1.3$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de Augusti considerando a influência da rigidez relativa das molas.

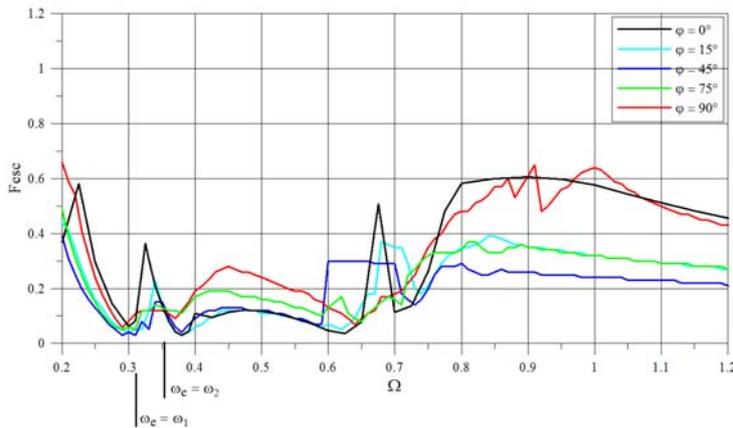
### 5.2.3. Modelo com Imperfeição Geométrica

O comportamento do modelo de Augusti com imperfeição geométrica é apresentado na Figura 5.40. Adota-se uma coluna com inclinação inicial  $\phi = 1^\circ$  e diversos valores do ângulo que define a projeção da coluna no plano  $x \times y$ ,  $\psi$ . Na Tabela 5.3 são apresentadas as frequências naturais para  $\psi = 0^\circ$  e  $\psi = 45^\circ$ .

Tabela 5.3: Frequências naturais para  $\lambda = 0.9$ . Modelo de Augusti com imperfeição geométrica.

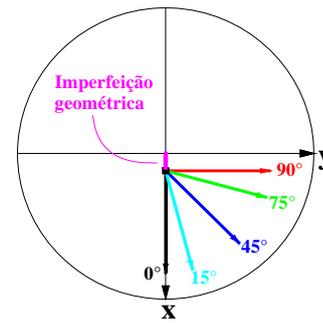
Caso	Primeira Frequência - $\Omega_1$	Segunda Frequência - $\Omega_2$
$\phi = 1^\circ$ e $\psi = 0^\circ$	0.311289	0.353726
$\phi = 1^\circ$ e $\psi = 45^\circ$	0.302655	0.361008

Considerando  $\phi = 1^\circ$  e  $\psi = 0^\circ$  (imperfeição geométrica na direção do eixo  $x$ ), Figura 5.40(a), verifica-se que a região crítica se encontra no entorno das ressonâncias fundamentais do sistema, ou seja, para  $\omega_e = \omega_1$  e  $\omega_e = \omega_2$ . Entretanto duas outras regiões de ressonâncias são observadas na vizinhança da região dos super-harmônicos de ordem dois,  $\omega_e = 2\omega_1$  e  $\omega_e = 2\omega_2$ . O mesmo se observa para  $\phi = 1^\circ$  e  $\psi = 45^\circ$  (imperfeição nas duas direções), Figura 5.40(b).

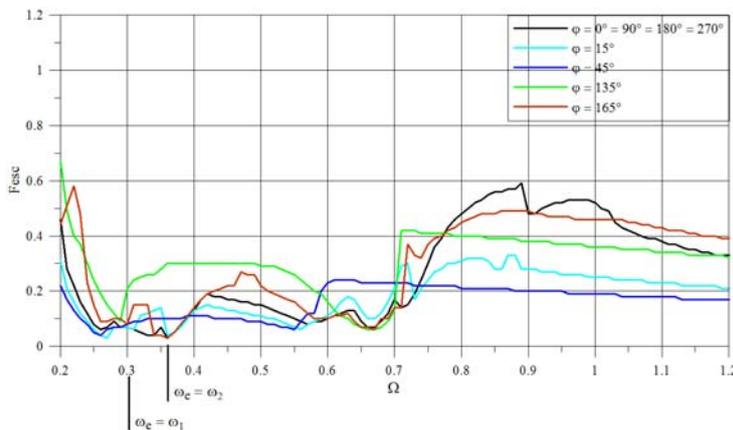


(a.1) Curvas de escape (Valores mínimos (2 vales) –  
 $F_{esc} = 0.0300$  ( $\varphi = 45^\circ$ ) e  $F_{esc} = 0.0299$  ( $\varphi = 0^\circ$ ))

(a)  $\phi = 1^\circ$  e  $\psi = 0^\circ$

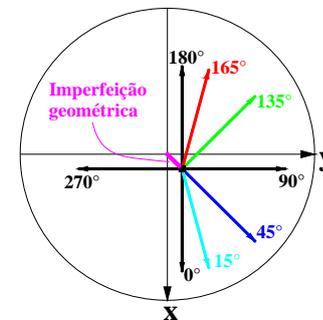


(a.2) Direção da excitação



(b.1) Curvas de escape (Valores mínimos (2 vales) –  
 $F_{esc} = 0.0300$  ( $\varphi = 15^\circ$ ) e  $F_{esc} = 0.0300$  ( $\varphi = 0^\circ$ ))

(b)  $\phi = 1^\circ$  e  $\psi = 45^\circ$



(b.2) Direção da excitação

Figura 5.40: Fronteiras de estabilidade (escape) para  $\lambda = 0.9$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de Augusti com imperfeição geométrica.

Na Figura 5.41 tem-se, em coordenadas polares, a variação de  $F_{esc}$  com a direção da excitação  $\varphi$  para as regiões das ressonâncias fundamentais para uma inclinação da coluna  $\phi = 1^\circ$  e diversos valores do ângulo  $\psi$ . O acoplamento modal resulta máximo para  $\psi = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$ , quando se verificam as menores magnitudes de  $F_{esc}$ . Verifica-se também que há uma grande variação de  $F_{esc}$  com a direção da excitação  $\varphi$  e que esta variação depende do valor de  $\psi$ .

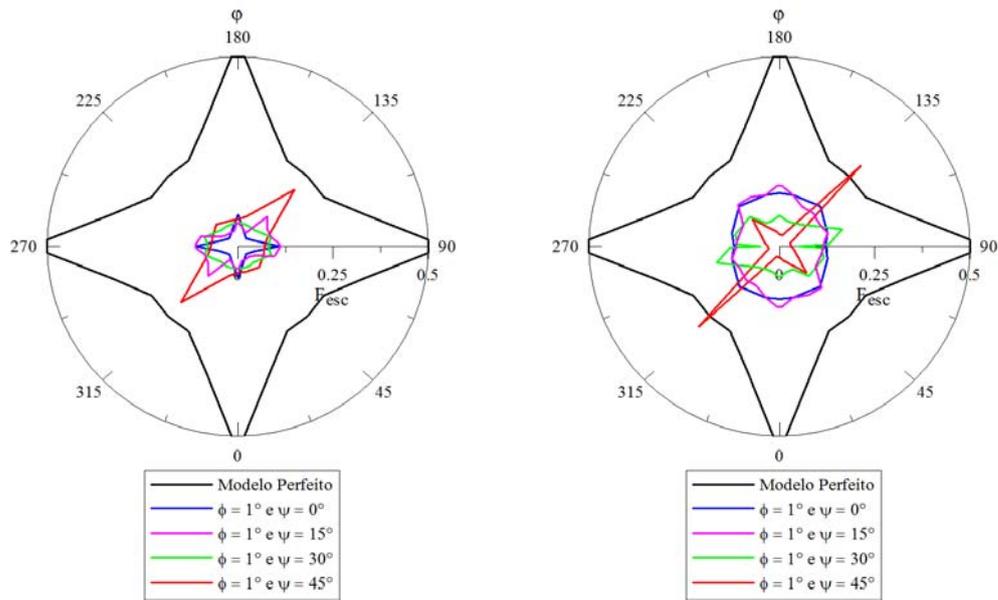
(a) Ressonância fundamental  $\omega_e = \omega_1$ (b) Ressonância fundamental  $\omega_e = \omega_2$ 

Figura 5.41: Variação da carga de escape,  $F_{esc}$ , com a direção da excitação,  $\varphi$ , (gráfico em coordenadas polares) para  $\lambda = 0.9$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de Augusti com imperfeição geométrica.

As curvas de ressonância considerando a imperfeição geométrica com  $\phi = 1^\circ$ ,  $\psi = 0^\circ$  e diversos valores de  $\varphi$  são mostradas na Figura 5.42, onde se tem a variação de  $|\theta_1|_{max}$  e  $|\theta_2|_{max}$  com  $\Omega$ . Verifica-se que o modelo imperfeito apresenta uma interação modal entre o modo não-linear desacoplado, plano  $\theta_1 \times d\theta_1/dt$ , Figura 4.25, e o modo não-linear acoplado, Figura 4.26, sendo ambos do tipo *hardening*.

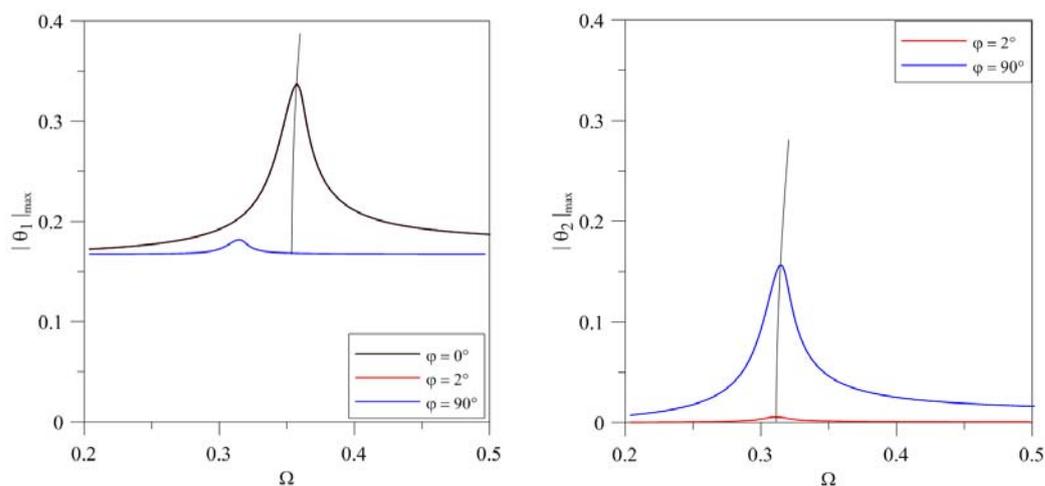


Figura 5.42: Curvas de ressonância para  $F = 0.01$ ,  $\phi = 1^\circ$ ,  $\psi = 0^\circ$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de Augusti com imperfeição geométrica.

A Figura 5.43 mostra as curvas de ressonância para  $\phi = 1^\circ$ , considerando  $\psi = 30^\circ$  (Figura 5.43(a)) e  $\psi = 45^\circ$  (Figura 5.43(b)) e diversos valores de  $\varphi$ . Em particular, para  $\psi = 45^\circ$ , verifica-se a interação entre os modos não-lineares acoplados, modo similar no eixo auxiliar  $u \times du/dt$  (Figura 4.32) e o modo não-similar, Figura 4.31, sendo ambos do tipo *softening*, ou seja, com perda de rigidez.

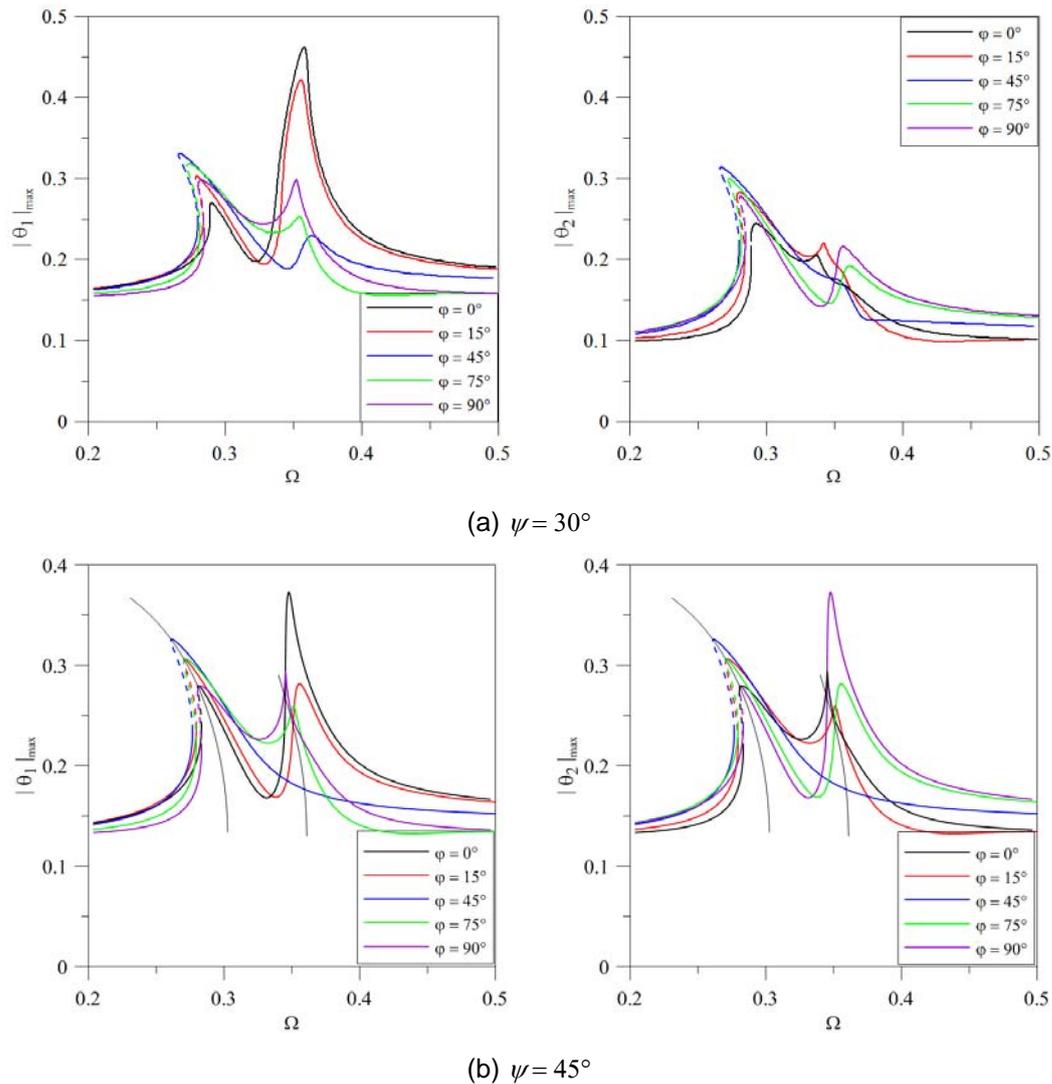
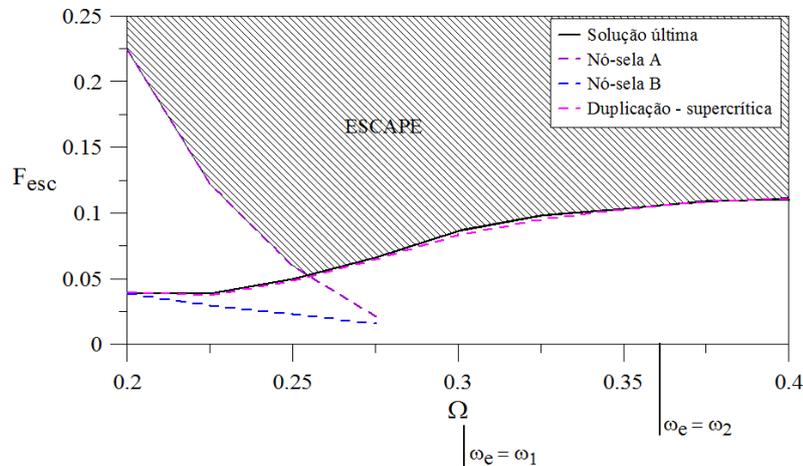


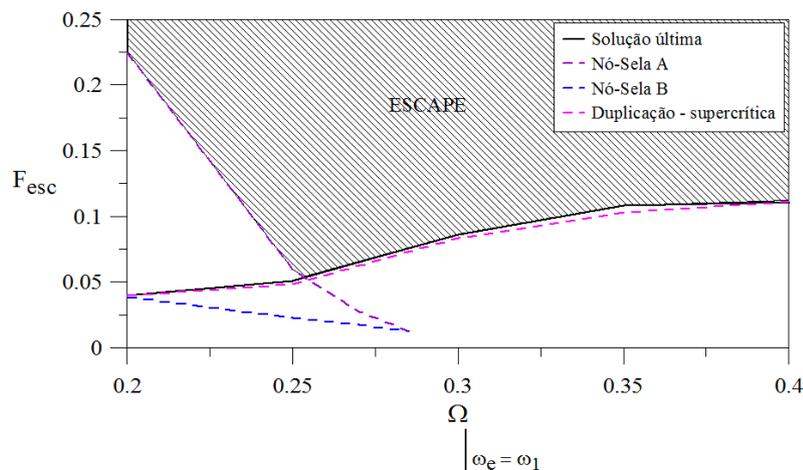
Figura 5.43: Curvas de ressonância para  $F = 0.01$ ,  $\phi = 1^\circ$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de Augusti com imperfeição geométrica.

O estudo dos modos de vibração, capítulo 4, mostra que no caso de imperfeição geométrica com  $\psi = 45^\circ$ , o sistema pode ser desacoplado no plano auxiliar  $u \times du/dt$  através do modo não-linear similar contido neste plano quando

$\varphi = 45^\circ$ . Neste contexto, apresenta-se a seguir uma comparação entre o modelo acoplado e o desacoplado para  $\phi = 1^\circ$ ,  $\psi = 45^\circ$  e  $\varphi = 45^\circ$ , nas regiões das ressonâncias fundamentais, Figura 5.44.



(a) Acoplado

(Valor mínimo (vale) –  $F_{esc} = 0.0510$ )

(b) Desacoplado

(Valor mínimo (vale) –  $F_{esc} = 0.0510$ )

Figura 5.44 Mapeamento das bifurcações locais na região de ressonância fundamental, modelo acoplado e desacoplado, para  $\varphi = 45^\circ$ ,  $\phi = 1^\circ$ ,  $\psi = 45^\circ$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de Augusti com imperfeição geométrica.

Verifica-se que o sistema apresenta o mesmo comportamento para os dois casos, acoplado e desacoplado, diferente do modelo perfeito onde o efeito da interação modal é sentido de forma mais forte nesse plano,  $\varphi = 45^\circ$ , Figura 5.23. Porém as magnitudes de  $F_{esc}$  se reduzem consideravelmente quando se compara

as fronteiras de escape entre o modelo perfeito e com imperfeição geométrica ( $\phi = 1^\circ$  e  $\psi = 45^\circ$ ), Figura 5.45. Mostra-se assim que, como no caso estático, a carga de escape apresenta uma grande sensibilidade a imperfeições geométricas. Por exemplo, para  $\Omega = 0.5$ , o valor de  $F_{esc}$  decresce de 0.453 para 0.0863, ou seja, há uma redução de 80.94% no valor de  $F_{esc}$ .

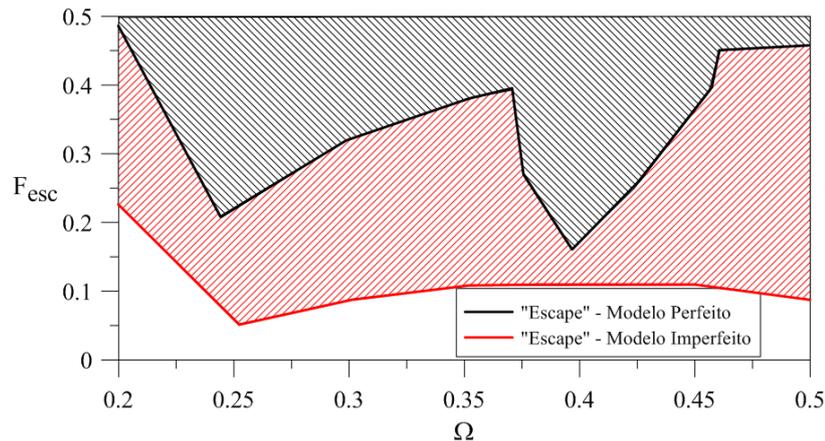


Figura 5.45: Comparação do comportamento na região de ressonância fundamental entre o modelo perfeito e com imperfeição geométrica ( $\phi = 1^\circ$  e  $\psi = 45^\circ$ ), modelo acoplado, para  $\varphi = 45^\circ$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . (Valores mínimos –  $F_{esc} = 0.1653$  (perfeito) e  $F_{esc} = 0.0510$  (imperfeito)).

Na Figura 5.46 são comparadas as seções das bacias de atração no plano  $u \times du/dt$  para o modelo desacoplado considerando o modelo perfeito e com imperfeição geométrica ( $\phi = 1^\circ$  e  $\psi = 45^\circ$ ) para  $\varphi = 45^\circ$ ,  $\Omega = 0.302655$  e valores crescentes de  $F$ . Verifica-se a grande erosão das bacias em virtude da imperfeição geométrica e do incremento na magnitude da carga.

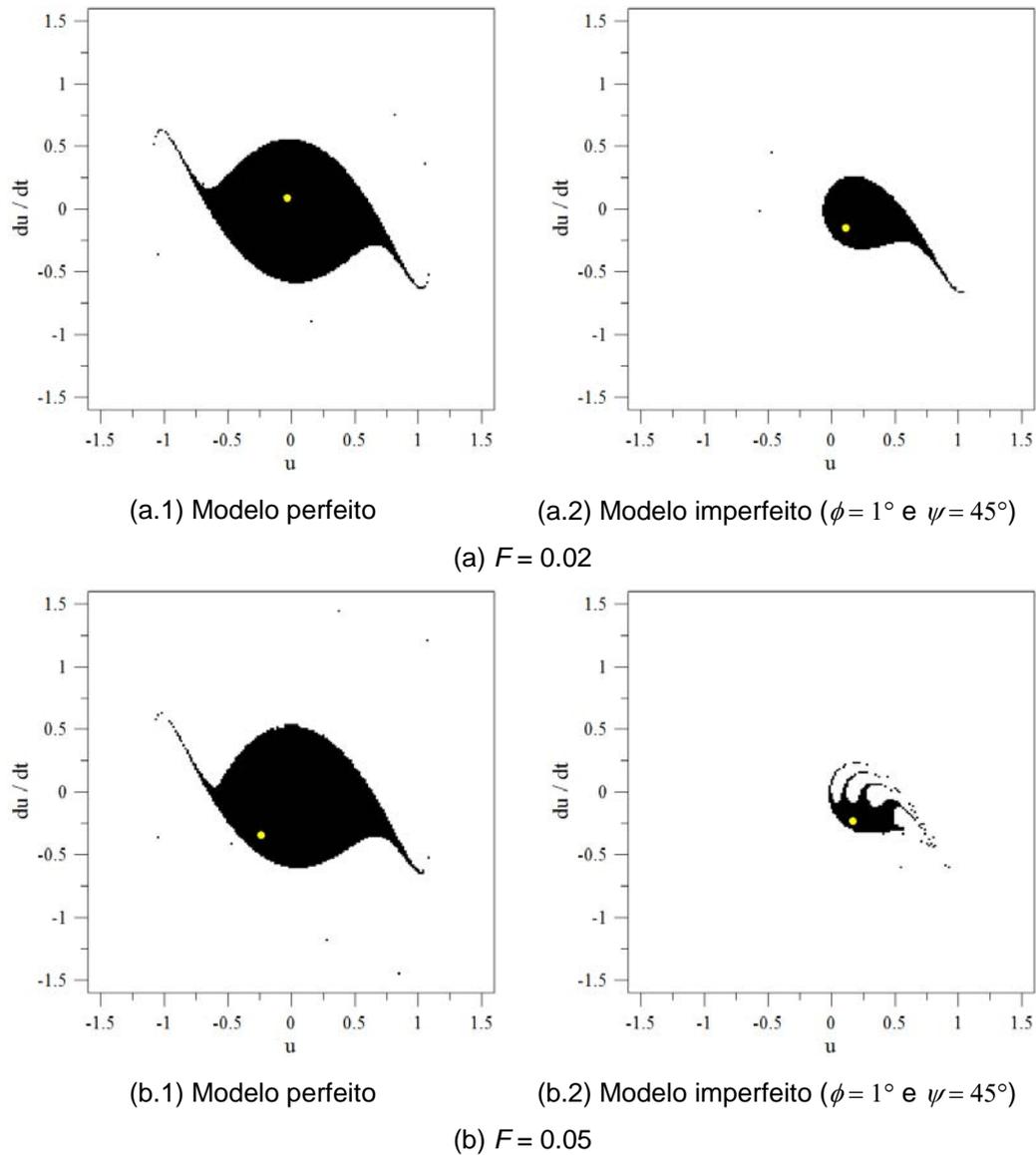


Figura 5.46: Seções das bacias de atração no plano  $uxdu/dt$ , modelo desacoplado, para  $\Omega = 0.3026$ ,  $\varphi = 45^\circ$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de Augusti.

A medida de integridade LIM para o modelo com imperfeição geométrica, considerando  $\phi = 1^\circ$ ,  $\psi = 45^\circ$ ,  $\varphi = 45^\circ$  e  $\Omega = 0.302655$ , é apresentada na Figura 5.47. Verifica-se que o modelo acoplado e o desacoplado mostram o mesmo comportamento. Portanto, nessa situação, o sistema pode ser desacoplado.

Uma comparação entre o modelo perfeito e com imperfeição geométrica ( $\phi = 1^\circ$  e  $\psi = 45^\circ$ ) para  $\omega_e = \omega_1$ , Figura 5.48, mostra claramente o efeito negativo da imperfeição geométrica na capacidade de carga e integridade do sistema, pois se observa que a medida LIM se reduz consideravelmente na presença da imperfeição.

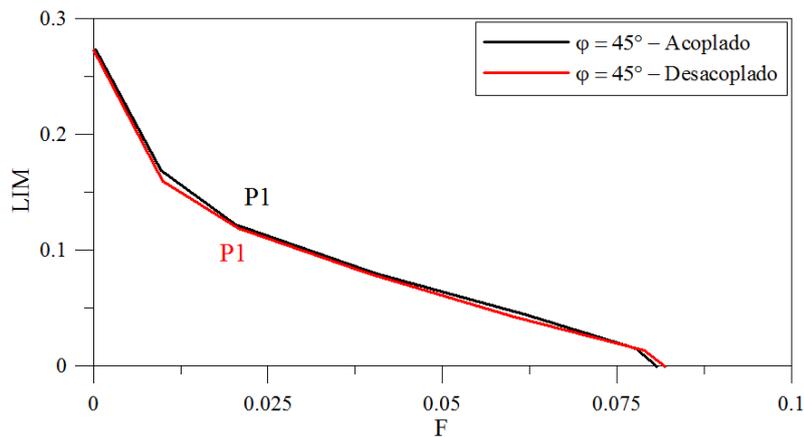


Figura 5.47: Medida de integridade local da bacia de atração, LIM, modelo acoplado e desacoplado, para  $\Omega = 0.3026$ ,  $\varphi = 45^\circ$ ,  $\phi = 1^\circ$ ,  $\psi = 45^\circ$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de Augusti com imperfeição geométrica.

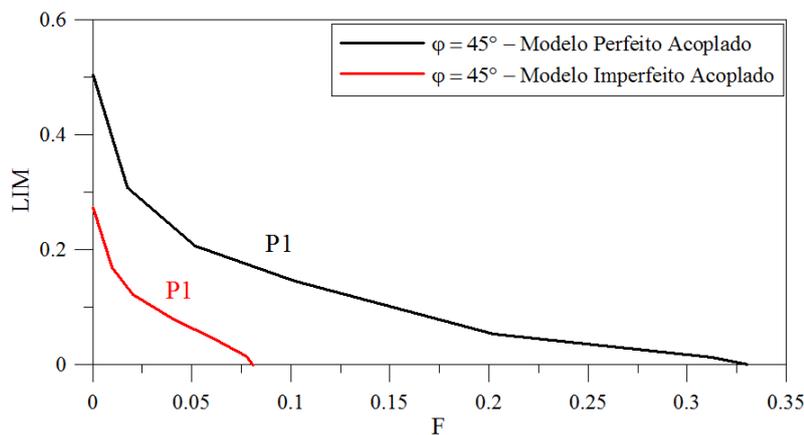
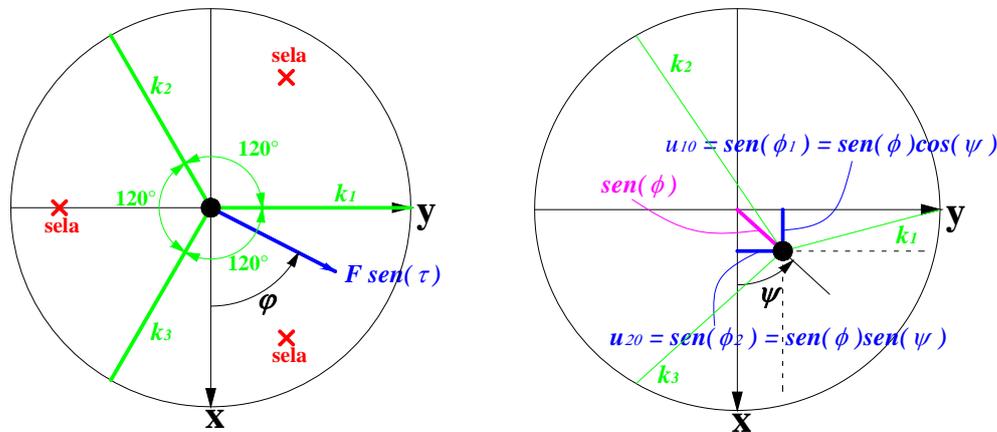


Figura 5.48: Comparação da medida de integridade local da bacia de atração, LIM, na ressonância fundamental entre o modelo perfeito e com imperfeição geométrica ( $\phi = 1^\circ$  e  $\psi = 45^\circ$ ), modelo acoplado, para  $\varphi = 45^\circ$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ .

### 5.3. Modelo de Torre Estaiada

Mostram-se na Figura 5.49 os principais parâmetros do modelo de torre estaiada sob vibração forçada. A Figura 5.49(a) apresenta uma visão superior do modelo, explicitando a direção da excitação de base  $F \sin(\tau)$  dada pelo ângulo  $\varphi$ , juntamente com a posição das molas ( $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$ ) e a localização (ilustrativa) dos pontos de sela do modelo perfeito. Na Figura 5.49(b) mostra-se a configuração do

modelo imperfeito, sendo a imperfeição geométrica inicial definida, como no caso anterior, pelos ângulos  $\phi$  e  $\psi$ .



(a) Direção da força e posição das molas.

Modelo perfeito

(b) Posição da extremidade superior.

Modelo com imperfeição geométrica.

Figura 5.49 Vista superior ilustrativa do modelo de torre estaiada.

Partindo das expressões (2.15), em termos das coordenadas generalizadas  $u_1$  e  $u_2$ , tem-se que as equações de movimento que regem o comportamento do modelo de torre estaiada em vibração forçada apresentadas na seqüência.

Considera-se, como no Capítulo 4, que  $k_2 = k_3$ ,  $k_2 = \nu K$  e  $k_1 = (1 - 2\nu)K$ . As equações são adimensionalizadas em função da carga crítica do sistema perfeito,  $P_{cr} = Kl/4$ . Além disso, definem-se as seguintes variáveis auxiliares:  $\nu = \alpha/4 \sin^2 \beta$ ,  $\lambda = P/P_{cr}$ ,  $P = mg$ ,  $K/ml^2 = \omega_p^2/\lambda$ ,  $C_i/ml^2 = 2\xi_i\omega_p$ ,  $F = F_b/l$ ,  $\Omega = \omega_e/\omega_p$ ,  $\Omega_1 = \omega_1/\omega_p$ ,  $\Omega_2 = \omega_2/\omega_p$ ,  $\tau = \omega_e t$  e  $\omega_p^2 = g/l$ , sendo  $F_b$  a magnitude do deslocamento de base e  $\omega_e$  a frequência da excitação. As parcelas referentes à excitação de base são dadas por:  $u_b = F_b \cos \varphi \text{sen}(\omega_e t)$  e  $v_b = F_b \text{sen} \varphi \text{sen}(\omega_e t)$ .

Para a análise dinâmica em vibração forçada do modelo de torre estaiada considera-se que  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$ ,  $\omega_p = 1.0$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$  (constantes de amortecimento).

$$\begin{aligned}
& \ddot{u}_1(1-u_1^2-2u_2^2+u_1^2u_2^2+u_2^4)+\ddot{u}_2(u_1u_2-u_1^3u_2-u_1u_2^3) \\
& +\dot{u}_1^2(u_1-u_1u_2^2)+\dot{u}_2^2(u_1-u_1^3)+2u_1^2u_2\dot{u}_1\dot{u}_2+\left[\frac{\alpha}{\lambda\Omega^2\text{sen}\beta}\left\{\right.\right. \\
& \left.\left.\left(\left(\sqrt{(\text{sen}\beta-u_{10})^2+(\cos\beta-u_{20})^2+1-u_{10}^2-u_{20}^2}\right.\right.\right. \\
& \left.\left.\left.-\sqrt{(\text{sen}\beta-u_1)^2+(\cos\beta-u_2)^2+1-u_1^2-u_2^2}\right)\right)\right) \\
& \left.\sqrt{(\text{sen}\beta-u_1)^2+(\cos\beta-u_2)^2+1-u_1^2-u_2^2}\right) \\
& -\left(\left(\sqrt{(-\text{sen}\beta-u_{10})^2+(\cos\beta-u_{20})^2+1-u_{10}^2-u_{20}^2}\right.\right. \\
& \left.\left.-\sqrt{(-\text{sen}\beta-u_1)^2+(\cos\beta-u_2)^2+1-u_1^2-u_2^2}\right)\right) \\
& \left.\sqrt{(-\text{sen}\beta-u_1)^2+(\cos\beta-u_2)^2+1-u_1^2-u_2^2}\right)\left.\right\} \\
& -\frac{1}{\Omega^2}\frac{u_1}{\sqrt{1-u_1^2-u_2^2}}+\frac{2\xi_1}{\Omega}\dot{u}_1\left(-1+u_1^2+u_2^2\right)^2= \\
& F\cos\varphi\text{sen}\tau(-1+u_1^2+u_2^2)^2
\end{aligned} \tag{5.2a}$$

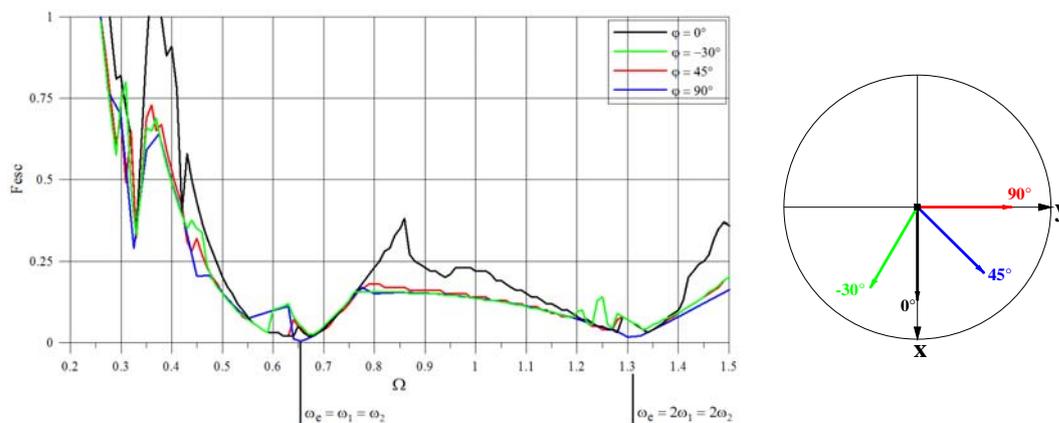
$$\begin{aligned}
& \ddot{u}_2(1-u_2^2-2u_1^2+u_1^2u_2^2+u_1^4)+\ddot{u}_1(u_1u_2-u_1^3u_2-u_1u_2^3) \\
& +\dot{u}_2^2(u_2-u_1^2u_2)+\dot{u}_1^2(u_2-u_2^3)+2u_1u_2^2\dot{u}_1\dot{u}_2+\left[\frac{\alpha\cos\beta}{\lambda\Omega^2\text{sen}^2\beta}\left\{\right.\right. \\
& \left.\left.\left(\left(\sqrt{(\text{sen}\beta-u_{10})^2+(\cos\beta-u_{20})^2+1-u_{10}^2-u_{20}^2}\right.\right.\right. \\
& \left.\left.\left.-\sqrt{(\text{sen}\beta-u_1)^2+(\cos\beta-u_2)^2+1-u_1^2-u_2^2}\right)\right)\right) \\
& \left.\sqrt{(\text{sen}\beta-u_1)^2+(\cos\beta-u_2)^2+1-u_1^2-u_2^2}\right) \\
& -\left(\left(\sqrt{(-\text{sen}\beta-u_{10})^2+(\cos\beta-u_{20})^2+1-u_{10}^2-u_{20}^2}\right.\right. \\
& \left.\left.-\sqrt{(-\text{sen}\beta-u_1)^2+(\cos\beta-u_2)^2+1-u_1^2-u_2^2}\right)\right) \\
& \left.\sqrt{(-\text{sen}\beta-u_1)^2+(\cos\beta-u_2)^2+1-u_1^2-u_2^2}\right)\left.\right\} \\
& +\frac{4\left(\sqrt{2-2u_{20}}-\sqrt{2-2u_2}\right)}{\lambda\Omega^2\sqrt{2-2u_2}}-\frac{2\alpha}{\lambda\Omega^2\text{sen}^2\beta}\frac{\left(\sqrt{2-2u_{20}}-\sqrt{2-2u_2}\right)}{\sqrt{2-2u_2}} \\
& -\frac{1}{\Omega^2}\frac{u_2}{\sqrt{1-u_1^2-u_2^2}}+\frac{2\xi_2}{\Omega}\dot{u}_2\left(-1+u_1^2+u_2^2\right)^2= \\
& F\text{sen}\varphi\text{sen}\tau(-1+u_1^2+u_2^2)^2
\end{aligned} \tag{5.2b}$$

### 5.3.1. Modelo Perfeito

As frequências naturais do modelo de torre estaiada perfeito são apresentadas na Tabela 5.4. As fronteiras de escape são apresentadas na Figura 5.50 para diversos valores de  $\varphi$ . Como no modelo de Augusti perfeito, o modelo de torre estaiada perfeito está em ressonância interna 1:1, pois  $\omega_1 = \omega_2$ , e conseqüentemente esse efeito torna naturalmente a região no entorno desta frequência ( $\omega_e = \omega_1 = \omega_2$ ) a mais crítica. Contudo uma situação similar é verificada na região de ressonância super-harmônica de ordem dois ( $\omega_e = 2\omega_1 = 2\omega_2$ ).

Tabela 5.4: Frequências naturais para  $\lambda = 0.7$  e  $\beta = 120^\circ$ . Modelo de torre estaiada perfeito.

Caso	Primeira Frequência - $\Omega_1$	Segunda Frequência - $\Omega_2$
Perfeito	0.654653	0.654653



(a) Curvas de escape (Valores mínimos (2 vales) –  $F_{esc} = 0.0200$  ( $\varphi = 0^\circ = 45^\circ$ ) e  $F_{esc} = 0.0200$  ( $\varphi = 90^\circ$ ))

(b) Direção da excitação

Figura 5.50: Fronteiras de estabilidade (escape) para  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de torre estaiada perfeito.

A variação da carga de escape,  $F_{esc}$ , com a direção da excitação,  $\varphi$  (gráfico em coordenadas polares) para três valores da frequência de excitação,  $\Omega$  ( $\omega_e = \omega_1, 2\omega_1, 3\omega_1$ ), é mostrada na Figura 5.51. Verifica-se que as menores magnitudes de escape ocorrem quando o sistema está na ressonância fundamental.

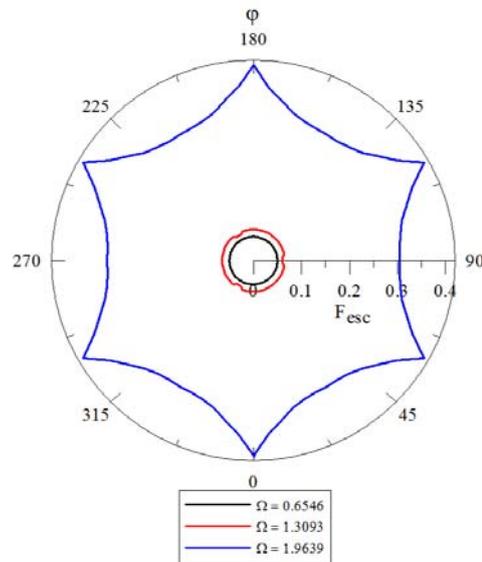


Figura 5.51: Variação da carga de escape,  $F_{esc}$ , com a direção da excitação,  $\varphi$ , (gráfico em coordenadas polares) para  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de torre estaiada perfeito.

As magnitudes mais baixas de  $F_{esc}$  estão localizadas no entorno da ressonância fundamental ( $\omega_e = \omega_1 = \omega_2$ ). Nesta região observa-se uma forte interação entre os modos de vibração não-lineares. Os modos não-lineares presentes no modelo de torre estaiada perfeito são: (a) um modo similar com comportamento *softening* (Figuras 4.46 (acoplado) e 4.49 (desacoplado)), (b) um modo instável acoplado gerado pelos pontos de sela (Figura 4.47) e (c) um modo não-similar acoplado com comportamento *hardening* (Figura 4.48). Isto é ilustrado, de uma forma clara, na Figura 5.52, que mostra as curvas de ressonância para  $F = 0.02$  juntamente com as relações frequência-amplitude dos modos relevantes associados a este caso. Este comportamento também pode ser observado na Figura 5.53, que mostra as curvas de ressonância para  $\varphi = 0^\circ$  e valores crescentes da magnitude do carregamento.

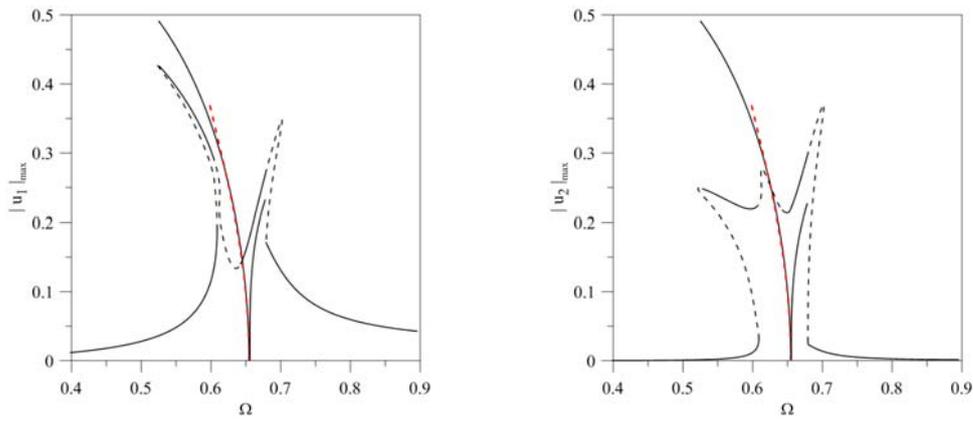
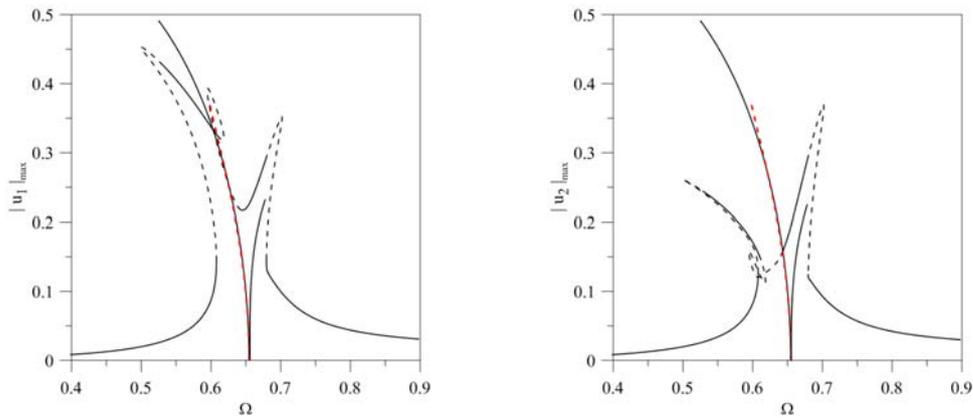
(a)  $\varphi = 0^\circ$ (b)  $\varphi = 45^\circ$ 

Figura 5.52: Curvas de ressonância para  $F = 0.02$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de torre estaiada perfeito.

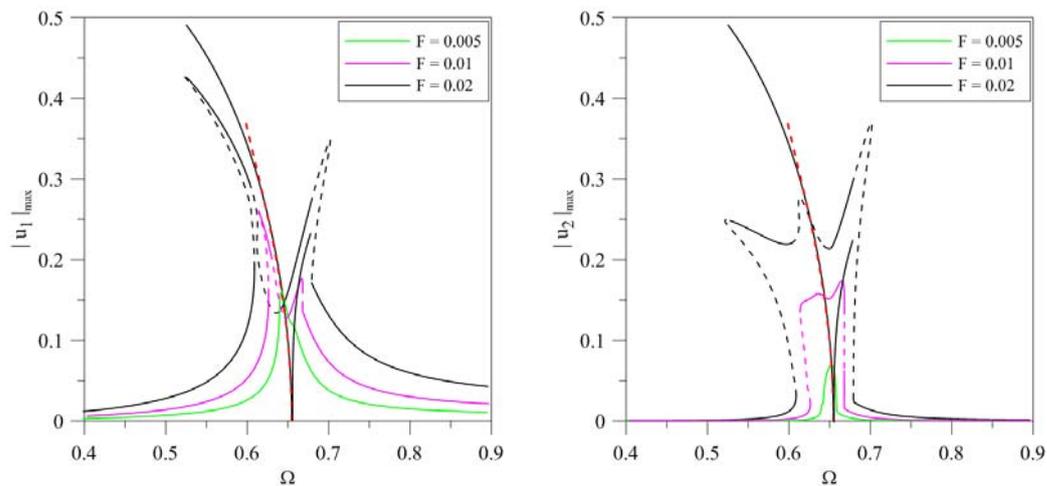


Figura 5.53: Curvas de ressonância para valores crescentes de  $F$ ,  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de torre estaiada perfeito.

Retomando as informações da análise dinâmica em vibração livre, capítulo 4, verifica-se que o modelo de torre estaiada perfeito pode ser desacoplado nos

planos que contêm as molas lineares, ou seja, no plano  $u_2 \times du_2/dt$  ( $\varphi = 90^\circ$  ou  $\varphi = 270^\circ$ ), modo não-linear desacoplado, e nos planos auxiliares  $u \times du/dt$  (localizados ou em  $\varphi = 30^\circ$  ou em  $\varphi = 150^\circ$  ou em  $\varphi = 210^\circ$  ou em  $\varphi = 330^\circ$ ), modos não-lineares similares acoplados.

Compara-se, inicialmente, o comportamento acoplado e o desacoplado do modelo para  $\varphi = 90^\circ$ , plano que contém um dos pontos de sela e o modo não-linear similar desacoplado. As fronteiras de escape para esta situação são apresentadas na Figura 5.54, onde se observa uma diferença entre os dois modelos em diversas regiões, sendo a carga de escape obtida com o modelo acoplado igual ou menor que a do modelo desacoplado.

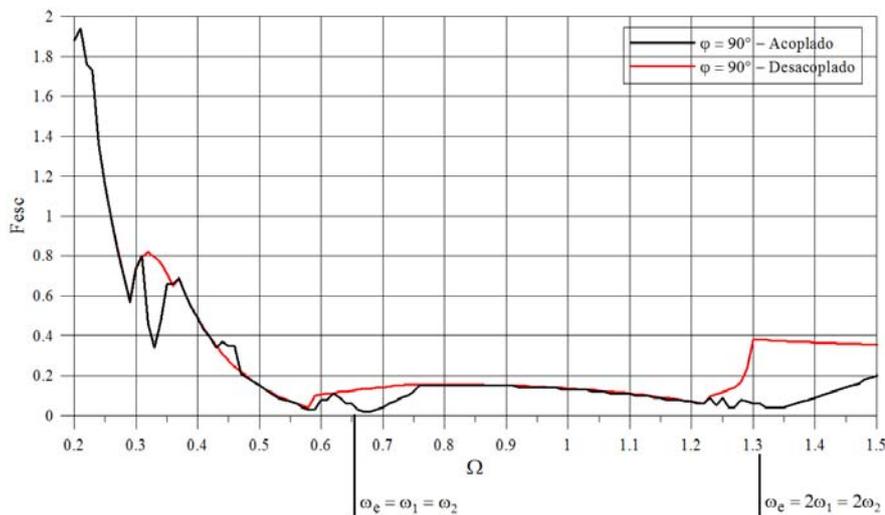


Figura 5.54: Fronteiras de estabilidade (escape), modelo acoplado e desacoplado, para  $\varphi = 90^\circ$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de torre estaiada perfeito (valores mínimos –  $F_{esc} = 0.0200$  (acoplado) e  $F_{esc} = 0.0400$  (desacoplado)).

Pode-se observar este fenômeno através das curvas de ressonância apresentadas nas Figuras 5.55 e 5.56. Para  $F = 0.002$ , o modelo acoplado e o desacoplado apresentam o mesmo comportamento e são dominados pelo modo desacoplado *softening* no plano  $u_2 \times du_2/dt$ , Figura 5.55. Contudo à medida que  $F$  cresce, cresce a influência do acoplamento modal, como mostra a Figura 5.56 obtida para  $F = 0.01$ , ocorrendo à interferência do modo não-similar *hardening*. Neste caso surgem ao longo do ramo ressonante da resposta dois pontos de bifurcação. Entre estes dois pontos o deslocamento  $u_1$  é diferente de zero,

indicando que neste trecho o modelo desacoplado não é mais capaz de descrever o comportamento do sistema dinâmico.

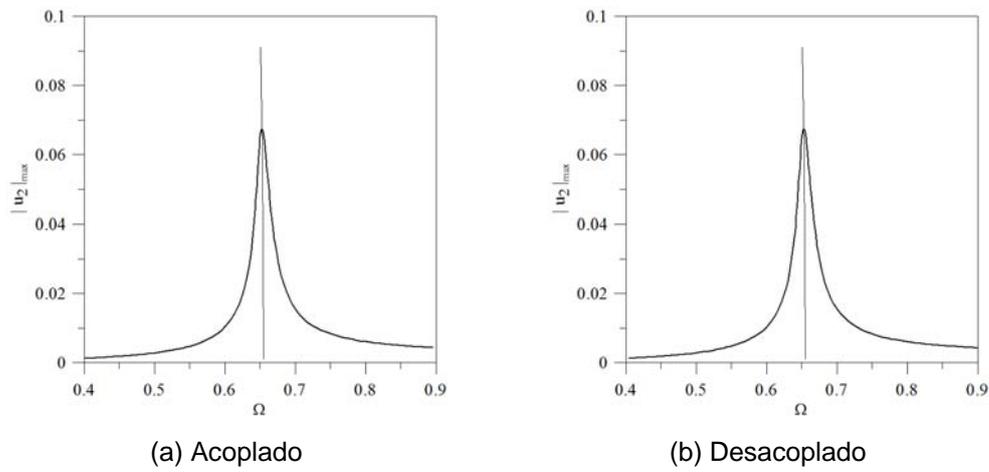


Figura 5.55: Curvas de ressonância, modelo acoplado e desacoplado, para  $F = 0.002$ ,  $\varphi = 90^\circ$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de torre estaiada perfeito.

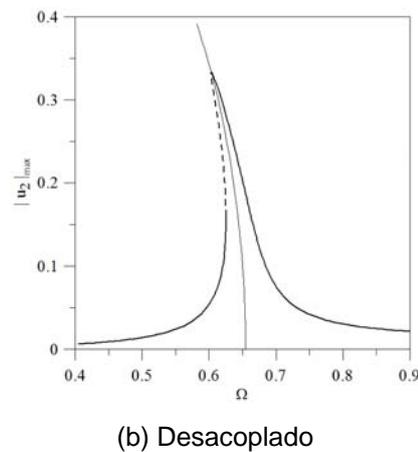
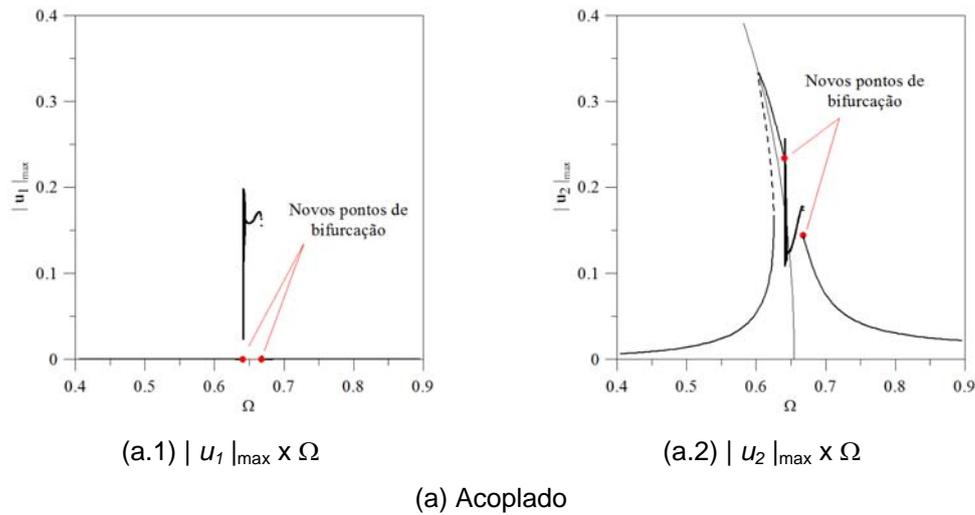
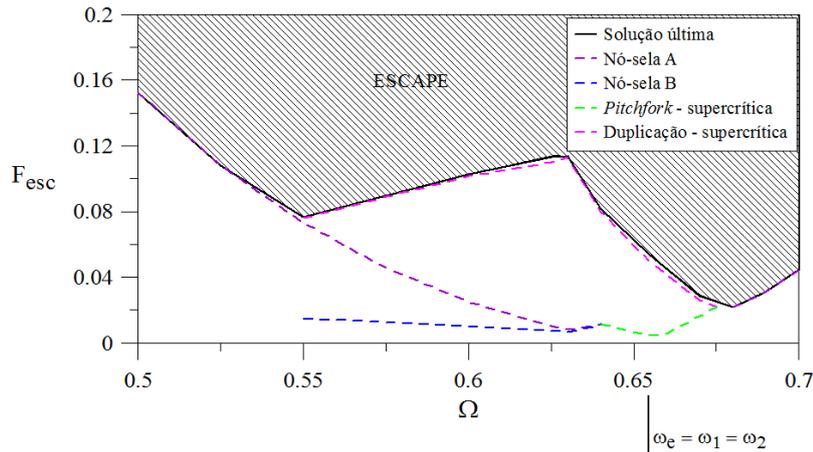
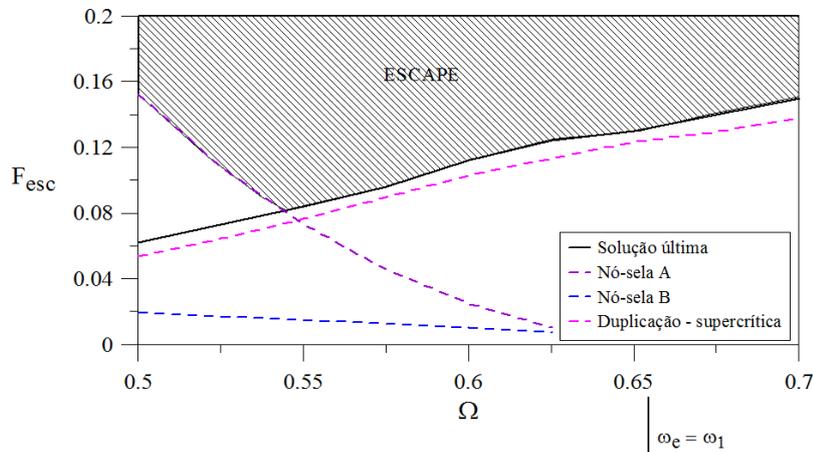


Figura 5.56: Curvas de ressonância, modelo acoplado e desacoplado, para  $F = 0.01$ ,  $\varphi = 90^\circ$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de torre estaiada perfeito.

Como no modelo de Augusti, Figura 5.14(a.1), o acoplamento modal no modelo de torre estaiada muda o comportamento do diagrama de bifurcação da coordenada  $u_2$ , Figura 5.56(a.2), pois sua ativação faz com que as coordenadas  $u_1$  e  $\dot{u}_1$ , que eram nulas, interajam com o sistema, Figura 5.56(a.1) para uma pequena faixa de frequência onde o acoplamento esta presente.



(a) Acoplado

(Valores mínimos (2 vales) –  $F_{esc} = 0.0780$  e  $F_{esc} = 0.0230$ )

(b) Desacoplado

(Valor mínimo (vale) –  $F_{esc} = 0.0806$ )

Figura 5.57: Mapeamento das bifurcações locais na região de ressonância fundamental, modelo acoplado e desacoplado, para  $\varphi = 90^\circ$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de torre estaiada perfeito.

As diferenças entre as cargas de escape,  $F_{esc}$ , do modelo acoplado e do desacoplado também podem ser compreendidas através dos diagramas de

bifurcação. Uma comparação das fronteiras de escape entre o modelo acoplado e o desacoplado é apresentada na Figura 5.57, através de uma análise detalhada de todas as bifurcações que ocorrem no entorno da região da ressonância fundamental, considerando  $\varphi = 90^\circ$ . Como se pode observar, tal como no modelo de Augusti perfeito, aparece um novo vale associado a outro modo de vibração não-linear, o que, novamente, compromete o modelo não-linear reduzido com um grau de liberdade nesta região. A seqüência de bifurcações que caracteriza o primeiro vale é característica de um sistema com comportamento *softening* (modo não-linear similar desacoplado, Figura 4.46), enquanto a seqüência de bifurcações associada ao segundo vale é característica de um sistema com comportamento *hardening* (modo não-linear não-similar acoplado, Figura 4.48).

Para compreender melhor o efeito do acoplamento modal, apresentam-se na Figura 5.58 os diagramas de bifurcação do modelo acoplado e desacoplado para  $\omega_e = \omega_1$  e  $\varphi = 90^\circ$ .

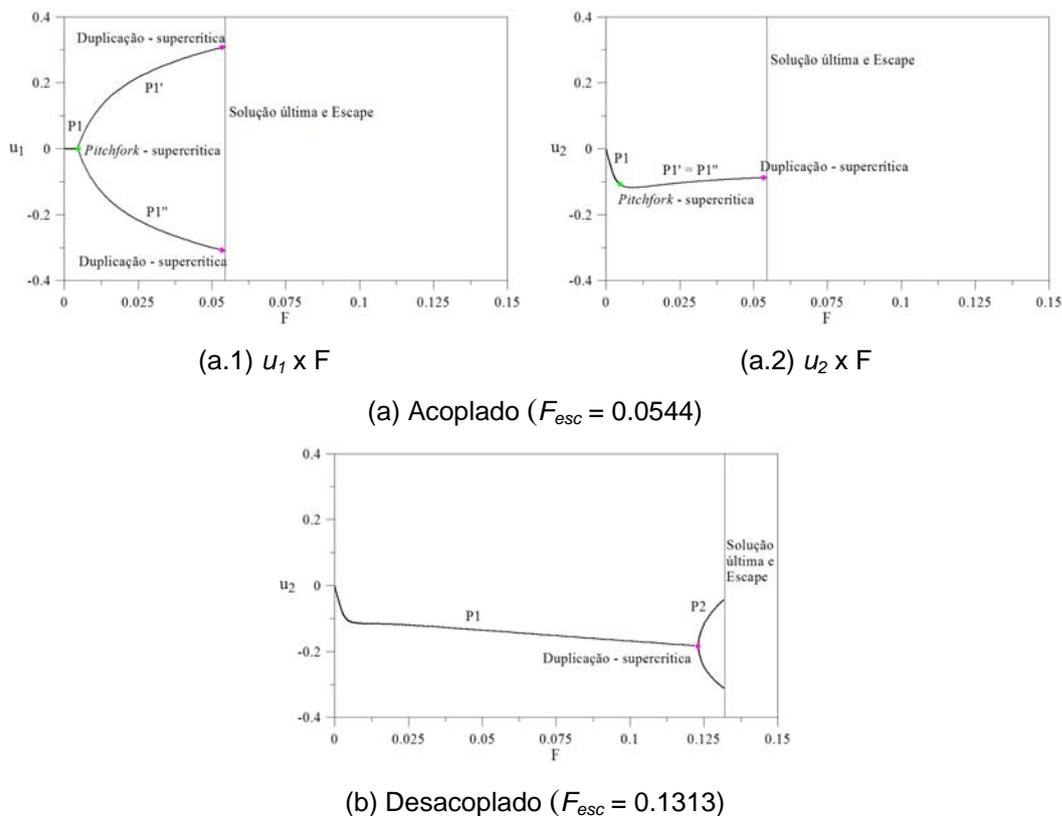


Figura 5.58: Diagramas de bifurcação, modelo acoplado e desacoplado, para  $\Omega = 0.6546$ ,  $\varphi = 90^\circ$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de torre estaiada perfeito.

O caso desacoplado, Figura 5.58(b), mostra uma solução periódica de período um, P1, que se torna instável através de uma bifurcação por duplicação de período, dando origem a uma solução de período dois, P2. Já o sistema acoplado, Figura 5.58(a), apresenta a solução periódica P1, que é semelhante àquela do sistema desacoplado até o ponto de bifurcação *pitchfork* supercrítico, onde surgem duas soluções de período um, P1' e P1'', que permanecem estáveis até o escape. Observa-se que o acoplamento modal muda a seqüência de bifurcações, e diminui drasticamente a carga de escape.

A seguir, compara-se o comportamento do sistema acoplado com o do desacoplado considerando  $\varphi = 30^\circ$ , ou seja, no plano das variedades de um dos pontos de sela e do modo não-linear similar acoplado (Capítulos 3 e 4). As fronteiras de escape para ambos os casos são apresentadas na Figura 5.59. Novamente, verifica-se a existência de diferenças entre as cargas de escape obtidas pelos dois modelos em várias regiões.

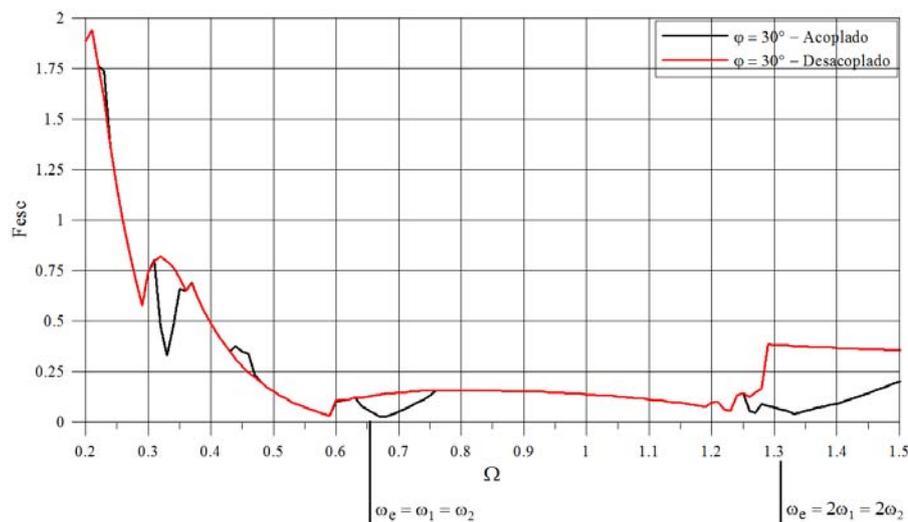


Figura 5.59: Fronteiras de estabilidade (escape), modelo acoplado e desacoplado, para  $\varphi = 30^\circ$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de torre estaiada perfeito (valores mínimos –  $F_{esc} = 0.0250$  (acoplado) e  $F_{esc} = 0.0300$  (desacoplado)).

É interessante observar, Figura 5.60, a grande diferença entre as curvas de ressonância do caso acoplado e do desacoplado para  $F = 0.02$ . No caso desacoplado, Figura 5.60(b), o sistema apresenta apenas a influência do modo similar com comportamento *softening*. Já na situação acoplada, Figura 5.60(a), o sistema mostra uma forte interação modal entre os modos não-lineares acoplados,

modo similar acoplado (*softening*) e modo não-similar (*hardening*), juntamente com o modo instável acoplado associado ao ponto de sela (Figura 4.47).

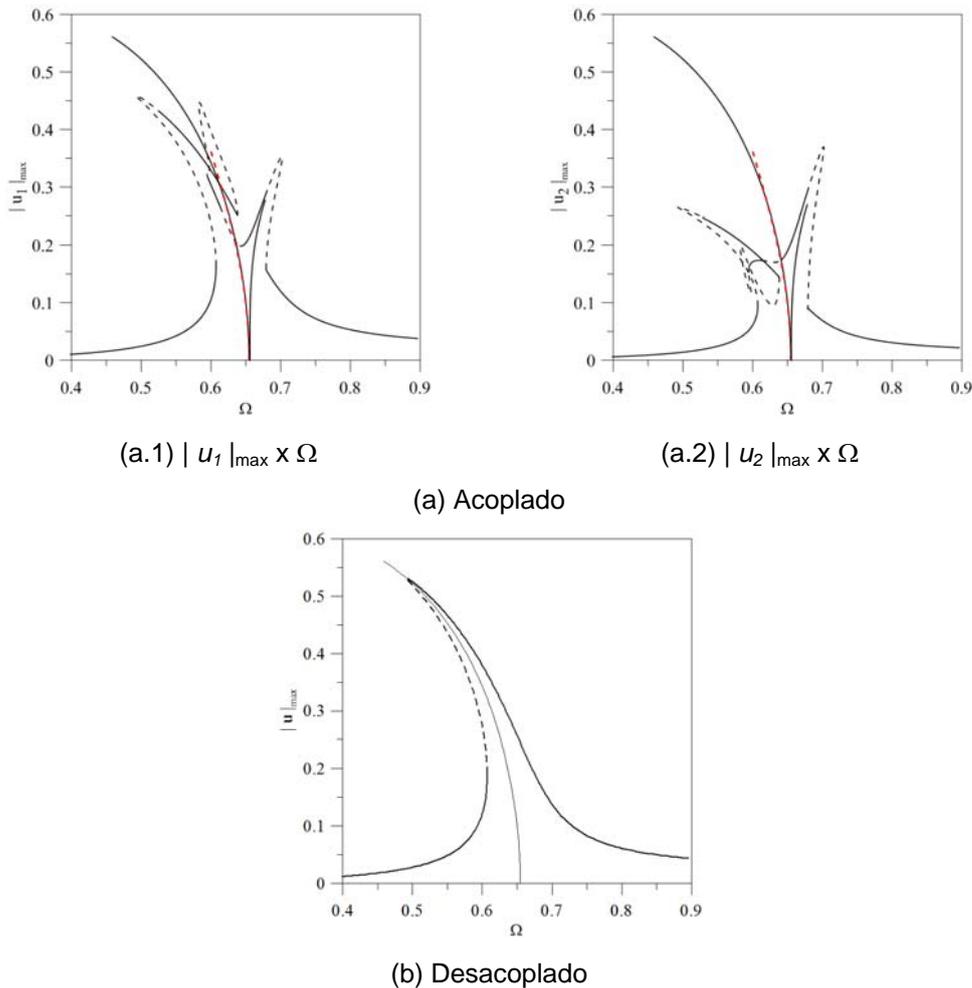
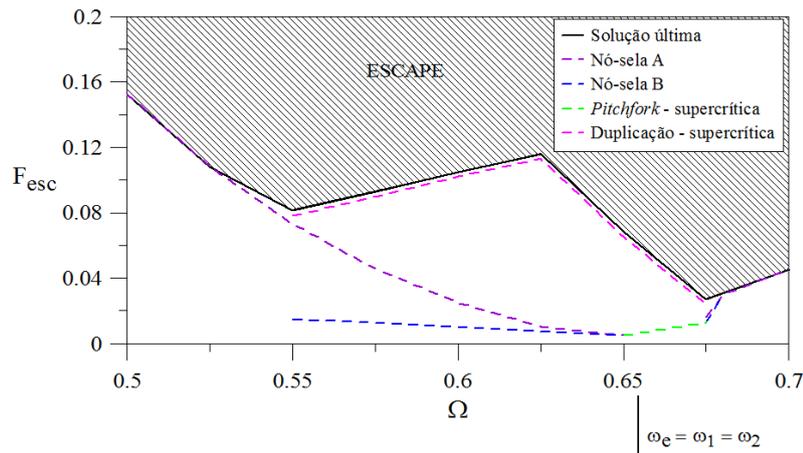
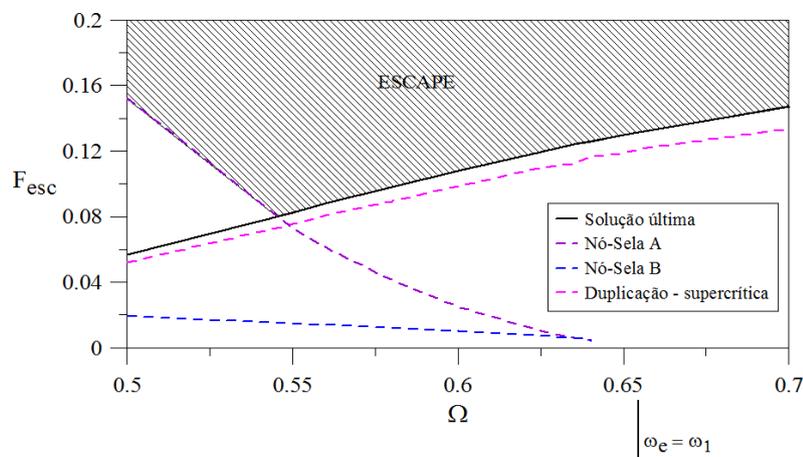


Figura 5.60: Curvas de ressonância, modelo acoplado e desacoplado, para  $F = 0.02$ ,  $\varphi = 30^\circ$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de torre estaiada perfeito.

A Figura 5.61 mostra uma comparação das fronteiras de escape entre o modelo acoplado e o desacoplado, através de uma análise detalhada de todas as bifurcações que ocorrem em torno da região da ressonância fundamental ( $\omega_e = \omega_1 = \omega_2$ ). Observa-se um comportamento semelhante àquele mostrado na Figura 5.57, sendo que a justificativa da presença dos dois vales no caso acoplado é a mesma daquela situação.



(a) Acoplado

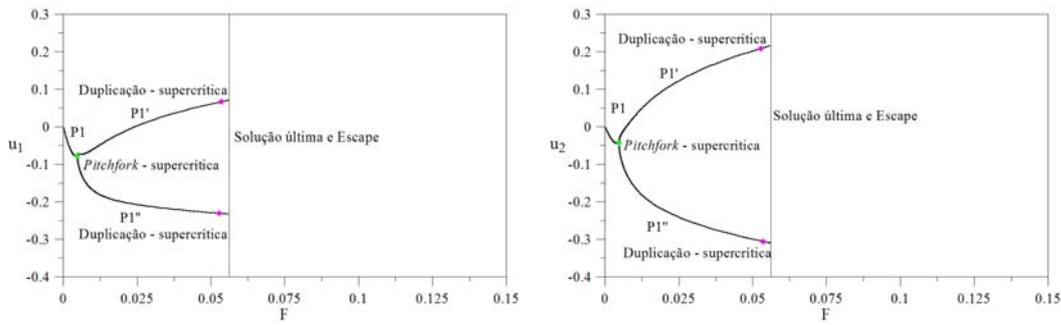
(Valores mínimos (2 vales) –  $F_{esc} = 0.0805$  e  $F_{esc} = 0.0260$ )

(b) Desacoplado

(Valor mínimo (vale) –  $F_{esc} = 0.0806$ )

Figura 5.61: Mapeamento das bifurcações locais na região de ressonância fundamental, modelo acoplado e desacoplado, para  $\varphi = 30^\circ$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de torre estaiada perfeito.

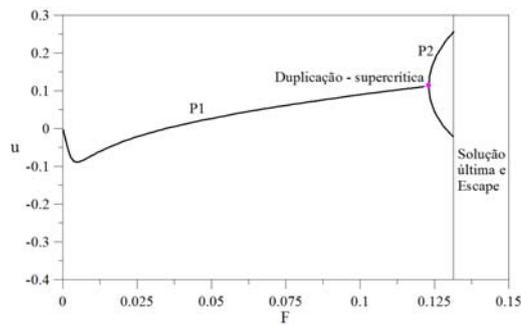
Os diagramas de bifurcação para  $\omega_e = \omega_1$  e  $\varphi = 30^\circ$ , apresentados na Figura 5.62, mostram que o modelo acoplado exibe inicialmente uma solução de período um, P1, que logo se torna instável através de uma bifurcação *pitchfork*, dando origem a duas novas soluções de período um, P1' e P1''. Já o modelo desacoplado exibe inicialmente uma solução de período um, que se torna instável através de uma bifurcação por duplicação de período.



(a.1)  $u_1 \times F$

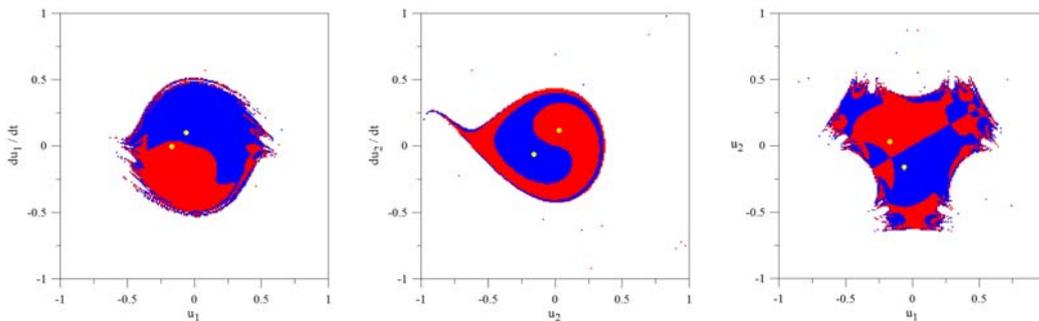
(a.2)  $u_2 \times F$

(a) Acoplado ( $F_{esc} = 0.0556$ )

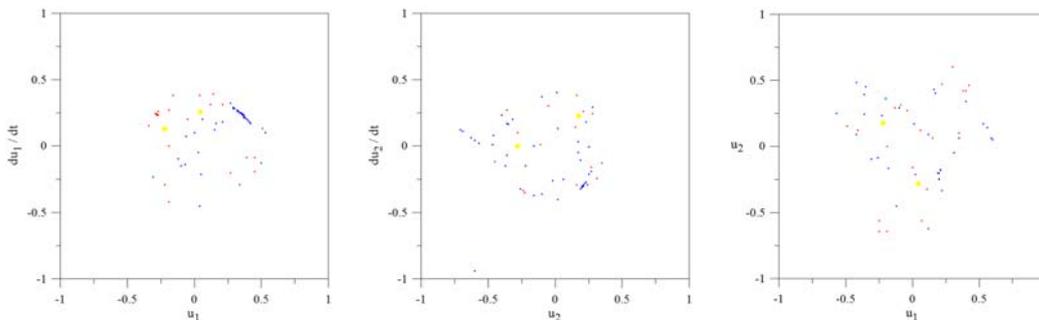


(b) Desacoplado ( $F_{esc} = 0.1309$ )

Figura 5.62: Diagramas de bifurcação, modelo acoplado e desacoplado, para  $\Omega = 0.6546$ ,  $\varphi = 30^\circ$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de torre estaiada perfeito.



(a)  $F = 0.01$



(b)  $F = 0.04$

Figura 5.63: Seções das bacias de atração nos planos  $u_1 \times du_1/dt$ ,  $u_2 \times du_2/dt$  e  $u_1 \times u_2$ , modelo acoplado, para  $\Omega = 0.6546$ ,  $\varphi = 30^\circ$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de torre estaiada perfeito.

Na Figura 5.63 mostram-se as bacias de atração para o modelo acoplado na ressonância fundamental ( $\omega_e = \omega_1$ ) para  $\varphi = 30^\circ$ , com valores crescentes da magnitude da carga. Como a bifurcação nesta situação ocorre para uma magnitude muito pequena, verifica-se que para  $F = 0.01$  o sistema já apresenta duas bacias referentes às soluções de período um, P1' e P1'', Figura 5.63(a). Após um pequeno incremento no carregamento,  $F = 0.04$ , nota-se uma grande erosão da bacia de atração destas duas soluções, sendo estas constituídas por uma nuvem difusa de pontos. Neste caso a medida de integridade é praticamente zero.

O comportamento do modelo nas demais direções de excitação,  $\varphi$ , para as quais não é possível se obter modelos desacoplados, é estudado a seguir. Para o modelo com  $\varphi = 0^\circ$  observa-se na região em torno da ressonância fundamental, Figura 5.64, a presença de dois vales ligados a presença de diferentes modos de vibração não-lineares, cada vale caracterizado por diferentes tipos de bifurcação. Como nas Figuras 5.57(a) e 5.61(a), porém de forma mais intensa, essa situação mostra que a seqüência de bifurcações no primeiro vale mostra uma característica *softening* (modos não-lineares similares, desacoplado e acoplado), enquanto a seqüência de bifurcações no segundo vale apresenta uma característica *hardening* (modo não-linear não-similar acoplado).

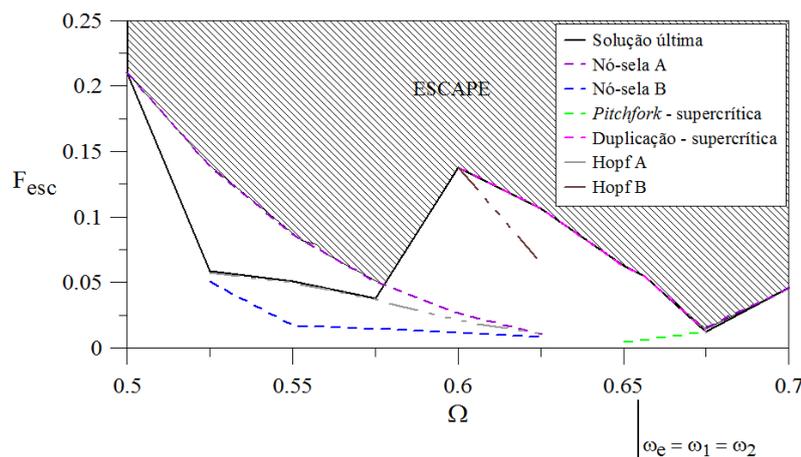


Figura 5.64: Mapeamento das bifurcações locais na região de ressonância fundamental, modelo acoplado, para  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de torre estaiada perfeito (valores mínimos (2 vales) –  $F_{esc} = 0.0495$  e  $F_{esc} = 0.0150$ ).

### 5.3.2. Influência da Rigidez Relativa das Molas

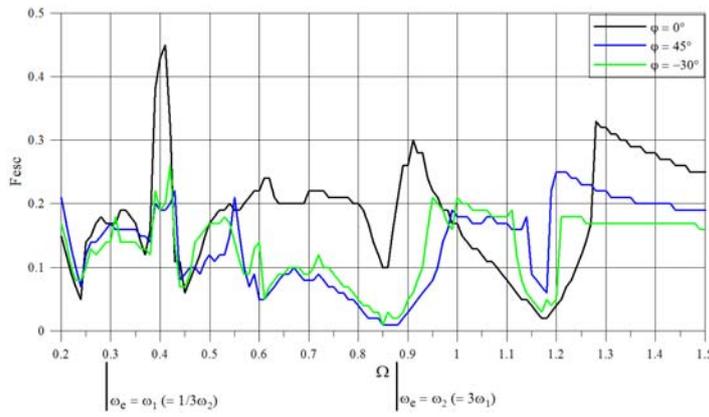
Para o modelo de torre estaiada considerando a influência da rigidez relativa das molas decidiu-se, como no modelo de Augusti, estudar o comportamento do sistema para valores de  $\alpha$  que façam com que o sistema esteja em ressonância interna.

As frequências naturais são mostradas na Tabela 5.5 para  $\alpha = 0.76$ , ressonância interna 1:3, e  $\alpha = 0.82$ , ressonância interna 1:2. A Figura 5.65 mostra as fronteiras de escape para estes dois casos. Observa-se em ambos os casos que as fronteiras de escape são bastante complexas, apresentando diversos mínimos locais. Para  $\alpha = 0.76$  a região mais crítica ocorre em torno de  $\omega_e = \omega_2 = 3\omega_1$  e para  $\alpha = 0.82$  a região mais crítica ocorre em torno de  $\omega_e = \omega_2 = 2\omega_1$ . Outro comportamento importante a ser observado é a grande variação das curvas com o valor da direção da excitação,  $\varphi$ , com mudanças notáveis no número e localização dos mínimos locais.

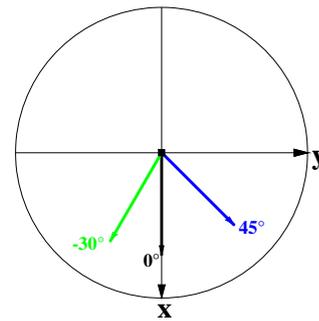
Na Figura 5.66 apresentam-se as curvas de ressonância juntamente com as relações frequência-amplitude dos modos de vibração não-lineares para  $\alpha = 0.82$  e  $F = 0.01$ . Para esta região de ressonância verifica-se a interação modal entre os modos não-lineares acoplados (Figura 4.53) juntamente com o modo instável desacoplado (Figura 4.52) gerado pela sela presente na seção de Poincaré da Figura 4.50. Este modo instável gera um pico de soluções instáveis, Figura 5.66 (plano  $|u_2|_{\max} \times \Omega$ ). O início do trecho instável é comandado pelos modos não-lineares acoplados.

Tabela 5.5: Frequências naturais para  $\alpha < 1$ ,  $\lambda = 0.7$  e  $\beta = 120^\circ$ . Modelo de torre estaiada considerando a influência da rigidez relativa das molas.

Caso	Primeira Frequência - $\Omega_1$	Segunda Frequência - $\Omega_2$
$\alpha = 0.76$	0.29277	0.87831
$\alpha = 0.82$	0.41404	0.82807

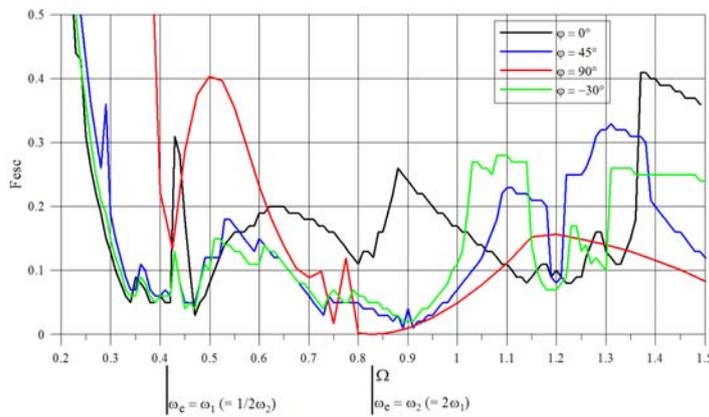


(a.1) Curvas de escape. Valores mínimos (2 vales) –  $F_{esc} = 0.0100$  ( $\varphi = 90^\circ$ ) e  $F_{esc} = 0.0200$  ( $\varphi = 0^\circ$ )

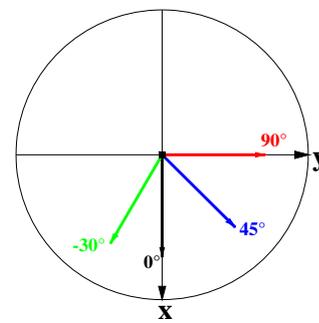


(a.2) Direção da excitação

(a)  $\alpha = 0.76$  (ressonância interna 1:3)



(b.1) Curvas de escape. (Valores mínimos (2 vales) –  $F_{esc} = 0.0003$  ( $\varphi = 90^\circ$ ) e  $F_{esc} = 0.0100$  ( $\varphi = 45^\circ$ ))



(b.2) Direção da excitação

(b)  $\alpha = 0.82$  (ressonância interna 1:2)

Figura 5.65 Fronteiras de estabilidade (escape) para  $\alpha < 1$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de torre estaiada considerando a influência da rigidez relativa das molas.

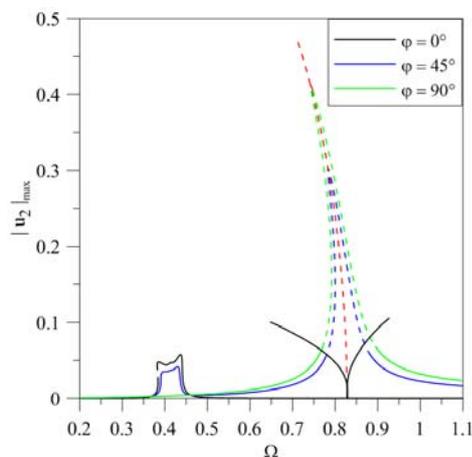
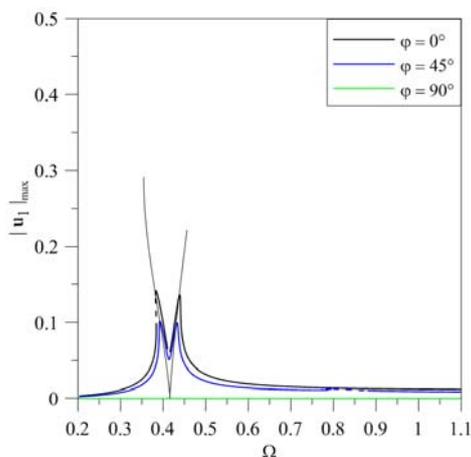


Figura 5.66: Curvas de ressonância para  $F = 0.01$ ,  $\alpha = 0.82$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de torre estaiada considerando a influência da rigidez relativa das molas.

O entendimento dos vales presentes na Figura 5.65 e a influência da direção da excitação  $\varphi$  podem ser obtidos através de uma análise criteriosa dos diagramas de bifurcação em função do parâmetro da carga  $F$  para diferentes valores de  $\Omega$ . Na Figura 5.67 observam-se os resultados para  $\alpha = 0.82$  na região de ressonância fundamental da segunda frequência, considerando duas direções de carregamento, a saber:  $\varphi = 45^\circ$  e  $\varphi = 90^\circ$ .

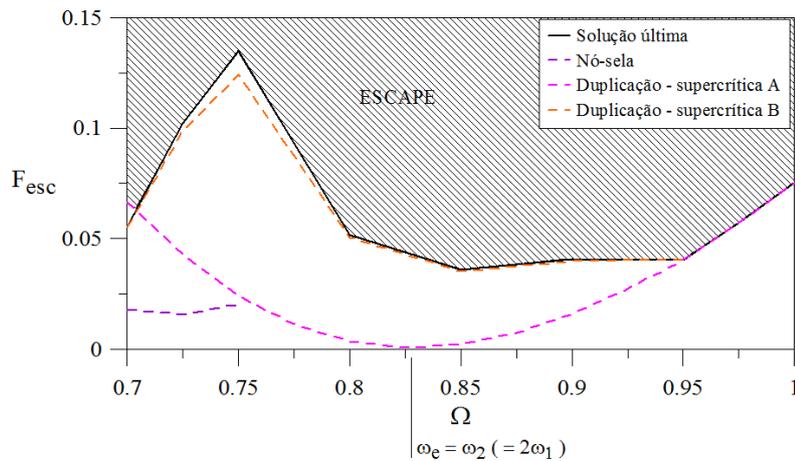
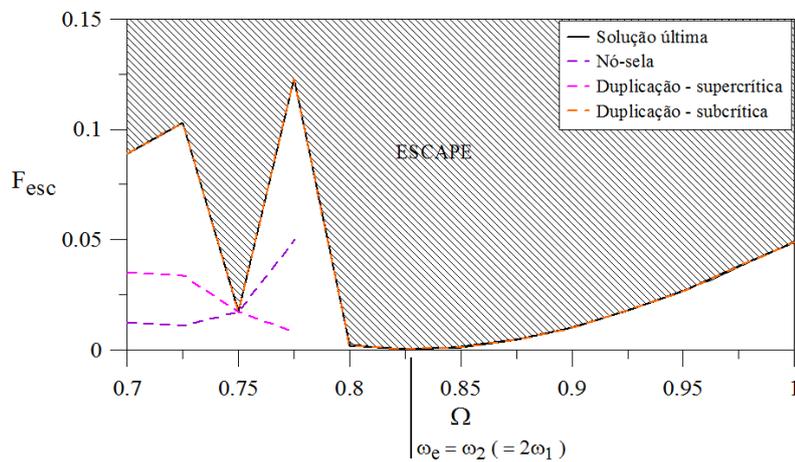
(a)  $\varphi = 45^\circ$ (Valor mínimo (vale) –  $F_{esc} = 0.0360$ )(b)  $\varphi = 90^\circ$ (Valor mínimo (vale) –  $F_{esc} = 0.0003$ )

Figura 5.67: Mapeamento das bifurcações locais na região de ressonância fundamental, modelo acoplado e desacoplado, para  $\alpha = 0.82$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo considerando a influência da rigidez relativa das molas.

Nota-se que há variações no cenário de bifurcações que explicam a variação de comportamento com  $\varphi$ . Deve-se observar na Figura 5.67(b) que, para  $\varphi = 90^\circ$ , há uma faixa de frequências onde a carga de escape se reduz praticamente a zero em virtude de uma bifurcação por duplicação de período subcrítica que ocorre para pequenos valores de  $F$ , mostrando ser esta uma situação extremamente perigosa. Já para  $\varphi = 45^\circ$ , Figura 5.67(a), tem-se nesta região uma bifurcação por duplicação de período supercrítica, o que eleva a capacidade de carga do sistema, como mostra a Figura 5.68 através do diagrama de bifurcação para  $\alpha = 0.82$ ,  $\varphi = 45^\circ$  e  $\omega_e = \omega_2$  ( $\Omega = 0.82807$ ).

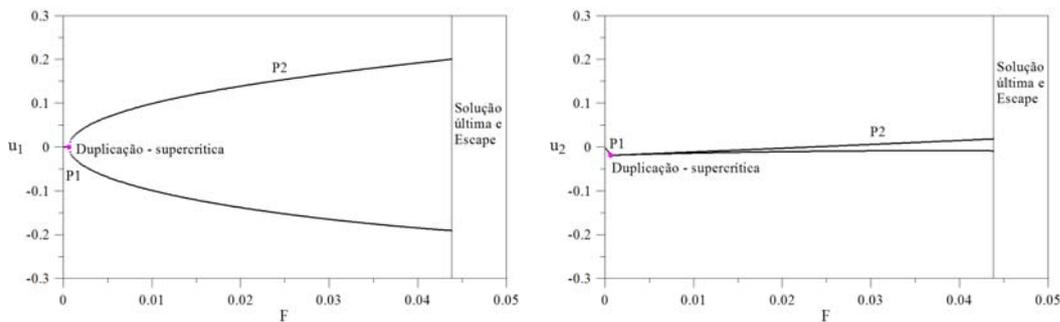


Figura 5.68: Diagrama de bifurcação para  $\Omega = 0.828$ ,  $\varphi = 45^\circ$ ,  $\alpha = 0.82$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de torre estaiada considerando a influência da rigidez relativa das molas ( $F_{esc} = 0.0437$ ).

O processo de erosão da bacia de atração para este exemplo é ilustrado na Figura 5.69 e a variação da medida de integridade dinâmica LIM, na Figura 5.70. Verifica-se que a solução  $P_1$  desaparece subitamente onde nasce à solução de período dois,  $P_2$ , que inicialmente apresenta o mesmo nível de integridade da solução  $P_1$ . Porém a integridade se reduz de forma quase linear com o aumento da magnitude do carregamento até atingir o ponto crítico que corresponde à completa erosão da bacia de atração.

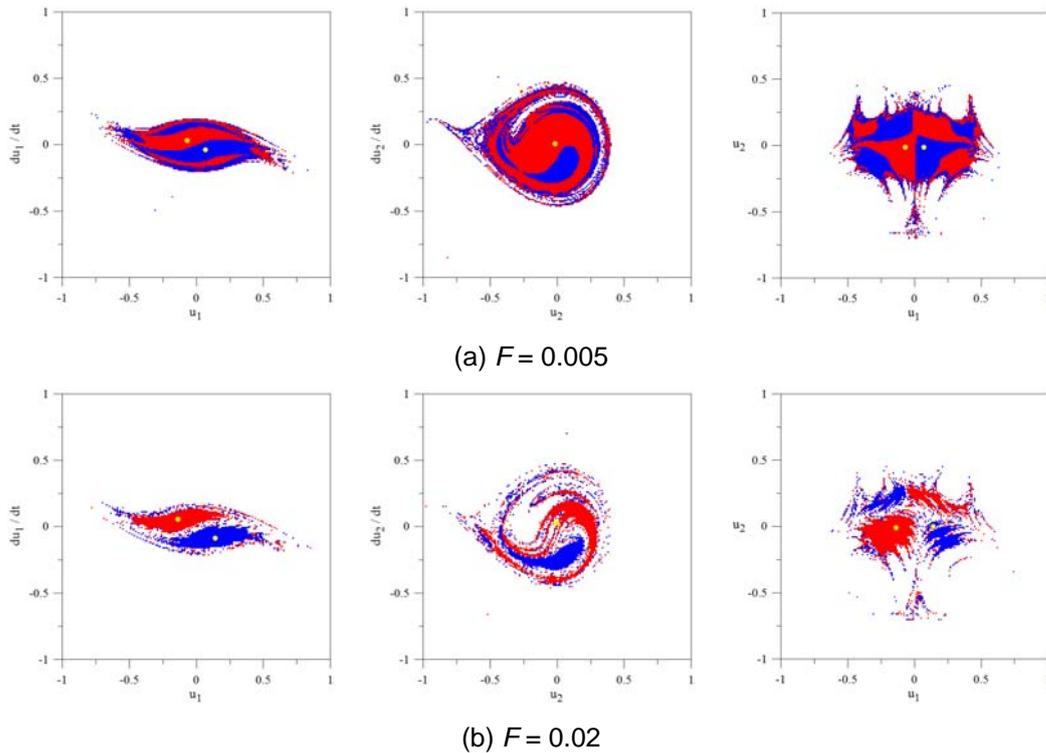


Figura 5.69: Seções das bacias de atração nos planos  $u_1 \times du_1/dt$ ,  $u_2 \times du_2/dt$  e  $u_1 \times u_2$ , modelo acoplado, para  $\Omega = 0.828$ ,  $\varphi = 45^\circ$ ,  $\alpha = 0.82$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de torre estaiada considerando a influência da rigidez relativa das molas.

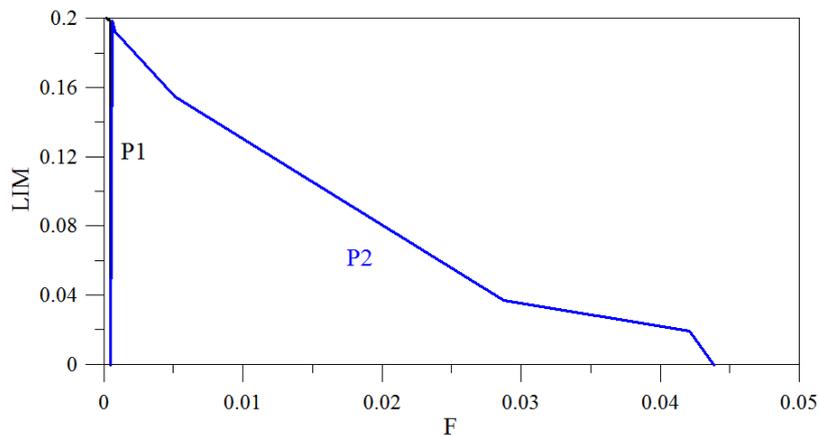


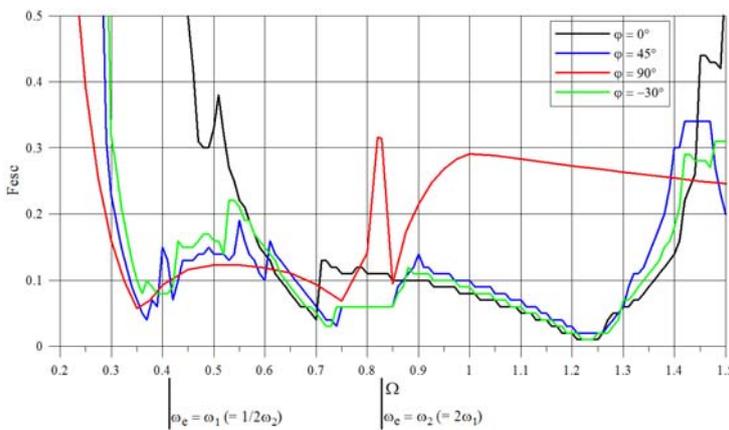
Figura 5.70: Medida de integridade local da bacia de atração, LIM, modelo acoplado, para  $\Omega = 0.828$ ,  $\varphi = 45^\circ$ ,  $\alpha = 0.82$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de torre estaiada considerando a influência da rigidez relativa das molas.

Estuda-se, agora, a influência da rigidez relativa das molas para valores de  $\alpha > 1$ . São consideradas duas situações, a saber:  $\alpha = 1.18$ , ressonância interna 1:2, e  $\alpha = 1.24$ , ressonância interna 1:3. As frequências naturais estão apresentadas na Tabela 5.6 e as fronteiras de escape na Figura 5.71. Quando

$\alpha = 1.18$  tem-se que os menores valores de  $F_{esc}$  encontram-se na região em torno de  $\omega_e = 3\omega_1$ , e para  $\alpha = 1.24$  a situação crítica ocorre na região em torno de  $\omega_e = 4\omega_1$ .

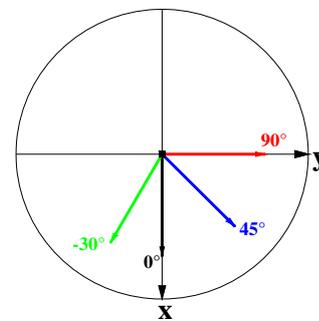
Tabela 5.6: Frequências naturais para  $\alpha > 1$ ,  $\lambda = 0.7$  e  $\beta = 120^\circ$ . Modelo de torre estaiada considerando a influência da rigidez relativa das molas.

Caso	Primeira Frequência - $\Omega_1$	Segunda Frequência - $\Omega_2$
$\alpha = 1.18$	0.41404	0.82807
$\alpha = 1.24$	0.29277	0.87831

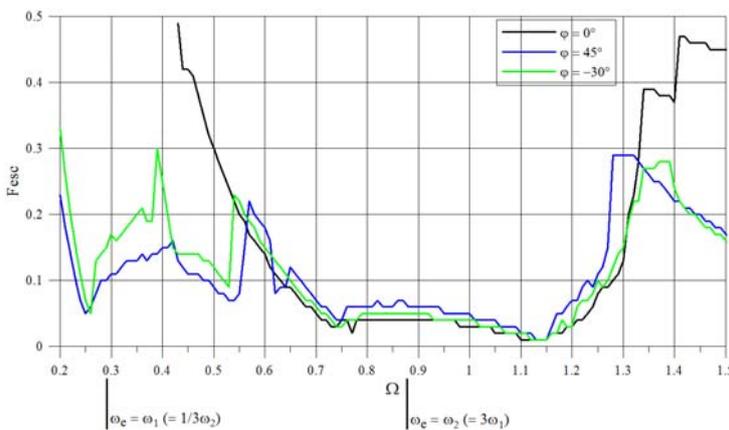


(a.1) Curvas de escape. (Valores mínimos (2 vales) –  $F_{esc} = 0.0300$  ( $\varphi = 45^\circ$ ) e  $F_{esc} = 0.0100$  ( $\varphi = 0^\circ$ ))

(a)  $\alpha = 1.18$  (ressonância interna 1:2)

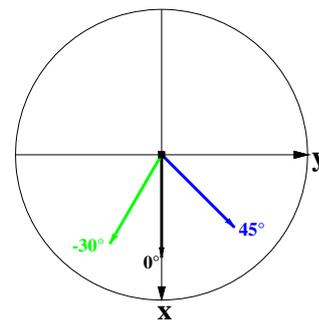


(a.2) Direção da excitação



(b.1) Curvas de escape. (Valores mínimos (2 vales) –  $F_{esc} = 0.0200$  ( $\varphi = 0^\circ$ ) e  $F_{esc} = 0.0100$  ( $\varphi = 0^\circ$ ))

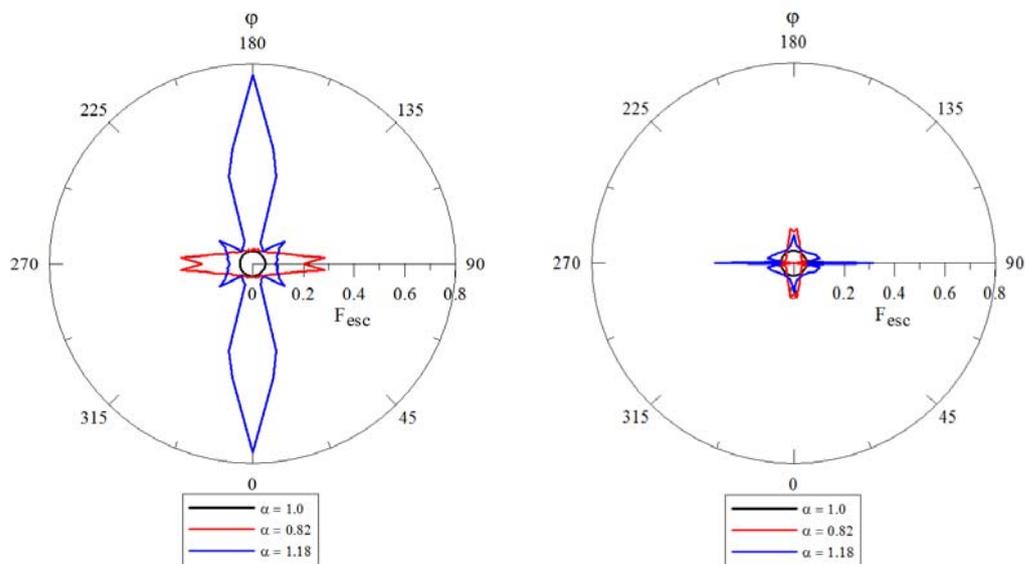
(b)  $\alpha = 1.24$  (ressonância interna 1:3)



(b.2) Direção da excitação

Figura 5.71: Fronteiras de estabilidade (escape) para  $\alpha > 1$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de torre estaiada considerando a influência da rigidez relativa das molas.

O valor da carga de escape mínima depende sensivelmente do valor de  $\varphi$ , como mostra a Figura 5.72, onde se apresenta a variação da carga de escape em função de  $\varphi$  para três valores de  $\alpha$  ( $\alpha = 0.82, 1.0, 1.18$ ) nas principais regiões de ressonâncias fundamentais. Nota-se que, em ambos os casos, a menor carga de escape, independente do valor de  $\varphi$ , ocorre para o modelo perfeito ( $\alpha = 1.0$ ). Verifica-se para a ressonância fundamental,  $\omega_e = \omega_1$ , que para  $\alpha = 0.82$  os maiores valores de escape estão na direção do segundo grau de liberdade, pois a rigidez associada ao segundo grau de liberdade é maior que aquela associada ao primeiro grau de liberdade. Já para  $\alpha = 1.18$  verifica-se exatamente o contrário, pois a rigidez associada ao primeiro grau de liberdade é maior. Na ressonância fundamental da segunda freqüência observa-se que todos os valores de escape se reduzem, em virtude da ressonância interna 1:2.



(a) Ressonância fundamental  $\omega_e = \omega_1$

(b) Ressonância fundamental  $\omega_e = \omega_2$

Figura 5.72: Variação da carga de escape,  $F_{esc}$ , com a direção da excitação,  $\varphi$ , (gráfico em coordenadas polares) para  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de torre estaiada considerando a influência da rigidez relativa das molas.

As curvas de ressonância para  $\alpha = 1.18$  e  $F = 0.01$ , Figura 5.73, mostram que o sistema sofre uma interação modal entre o modo similar desacoplado, *softening* (Figura 4.56), com os dois modos não-lineares acoplados (Figura 4.57).

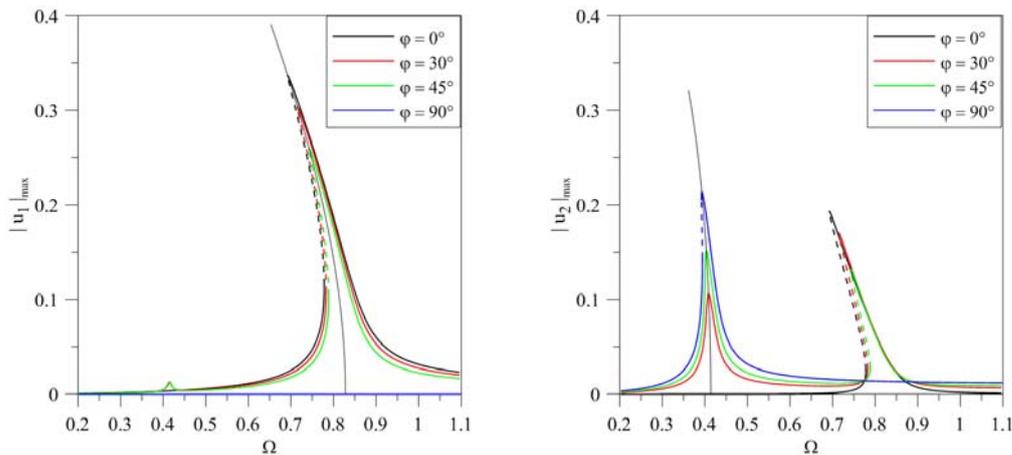


Figura 5.73: Curvas de ressonância para  $F=0.01$ ,  $\alpha=1.18$ ,  $\lambda=0.7$ ,  $\beta=120^\circ$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de torre estaiada considerando a influência da rigidez relativa das molas.

Pelas informações obtidas nos Capítulos 3 e 4, verifica-se que, para valores de  $\alpha > 1$ , o sistema pode ser desacoplado quando  $\varphi = 90^\circ$  ou  $\varphi = 270^\circ$ . Assim, apresenta-se na Figura 5.74 o comportamento acoplado e desacoplado do modelo considerando a influência da rigidez relativa das molas para  $\alpha = 1.18$ , considerando  $\varphi = 90^\circ$ . Observa-se que os dois modelos apresentam praticamente o mesmo resultado, exceto em torno de  $\omega_e = \omega_2 = 2\omega_1$ . A diferença entre os dois modelos pode ser entendida através dos diferentes cenários de bifurcação observados na Figura 5.75.

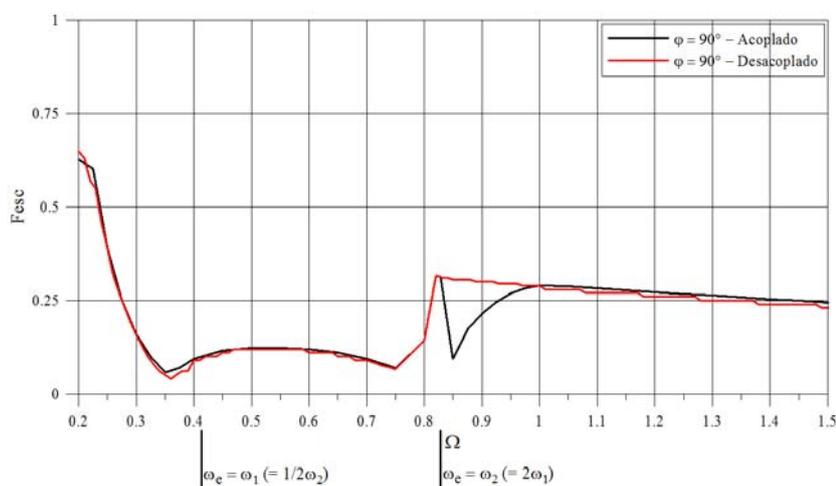
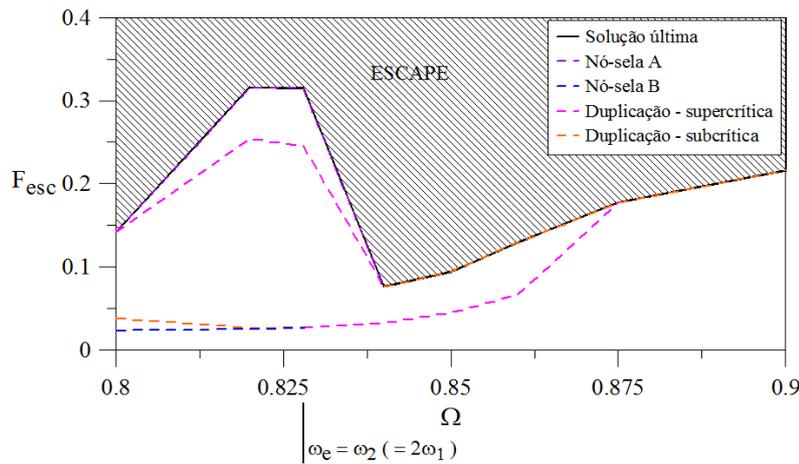
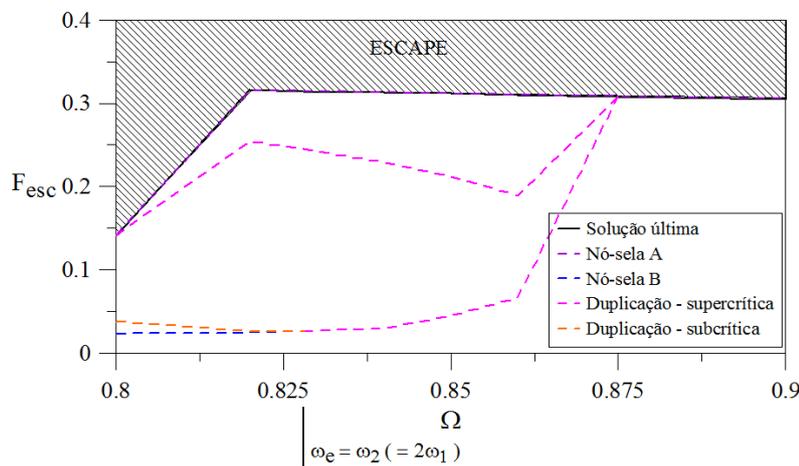


Figura 5.74: Fronteiras de estabilidade (escape), modelo acoplado e desacoplado, para  $\varphi = 90^\circ$ ,  $\alpha = 1.18$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de torre estaiada considerando a influência da rigidez relativa das molas (valores mínimos –  $F_{esc} = 0.047$  (acoplado) e  $F_{esc} = 0.040$  (desacoplado)).



(a) Acoplado

(Valor mínimo (vale) –  $F_{esc} = 0.0757$ )

(b) Desacoplado

(Valor mínimo (vale) –  $F_{esc} = 0.1413$ )

Figura 5.75: Mapeamento das bifurcações locais na região de ressonância fundamental, modelo acoplado e desacoplado, para  $\alpha = 1.18$ ,  $\varphi = 90^\circ$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de torre estaiada considerando a influência da rigidez relativa das molas.

Na Figura 5.76 comparam-se os diagramas de bifurcação do modelo acoplado e desacoplado para  $\alpha = 1.18$ ,  $\varphi = 90^\circ$  e  $\omega_e = \omega_2$  ( $\Omega = 0.82807$ ). Verifica-se que o modelo acoplado e o desacoplado apresentam o mesmo comportamento. Inicialmente, apresentam a solução de período um, P1, que acaba em uma bifurcação por duplicação de período, dando origem à solução P2, que acaba em outra bifurcação por duplicação de período dando origem à solução P1'.

Os resultados mostram a grande influência da ressonância interna no comportamento do sistema, gerando um forte acoplamento entre estes modos.

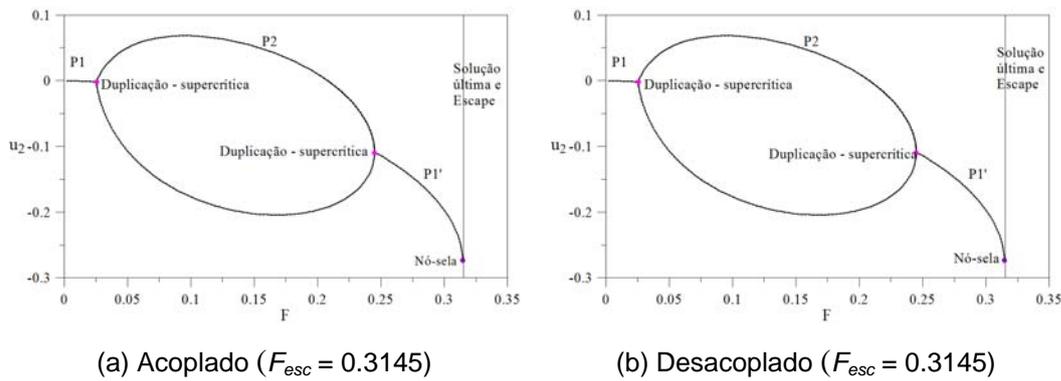


Figura 5.76: Diagramas de bifurcação, modelo acoplado e desacoplado, para  $\Omega = 0.82807$ ,  $\varphi = 90^\circ$ ,  $\alpha = 1.18$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de torre estaiada considerando a influência da rigidez relativa das molas.

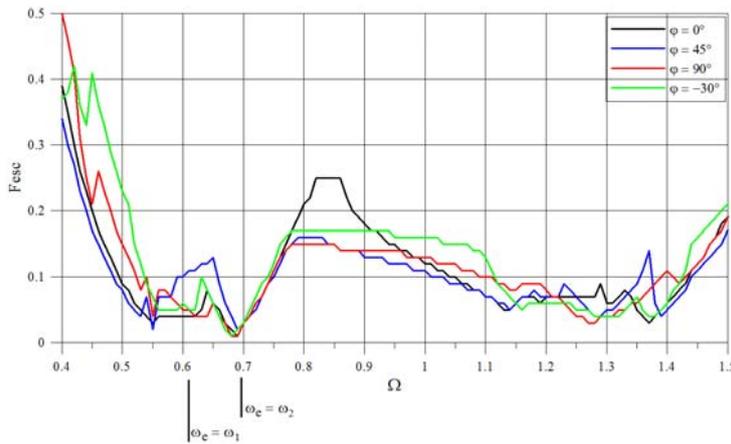
### 5.3.3. Modelo com Imperfeição Geométrica

A Figura 5.77 mostra o efeito que a imperfeição geométrica causa nas fronteiras de estabilidade do modelo de torre estaiada. São considerados dois casos, a saber:  $\phi = 1^\circ$  e  $\psi = 0^\circ$ , e  $\phi = 1^\circ$  e  $\psi = 90^\circ$ . As frequências naturais para os casos em estudo são mostradas na Tabela 5.7.

Tabela 5.7: Frequências naturais para  $\lambda = 0.7$  e  $\beta = 120^\circ$ . Modelo de torre estaiada com imperfeição geométrica.

Caso	Primeira Frequência - $\Omega_1$	Segunda Frequência - $\Omega_2$
$\phi = 1^\circ$ e $\psi = 0^\circ$	0.609385	0.696765
$\phi = 1^\circ$ e $\psi = 90^\circ$	0.612639	0.693936

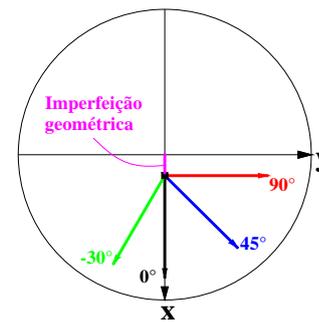
Nos dois casos as curvas apresentam um comportamento similar àquelas do modelo perfeito. Em todos os casos a região crítica encontra-se no entorno das ressonâncias fundamentais do sistema, ou seja, para  $\omega_e = \omega_1$  e  $\omega_e = \omega_2$ , como indicado na Figura 5.77, sendo que também se verifica uma situação similar na região das ressonâncias principais de ordem dois,  $\omega_e = 2\omega_1$  e  $\omega_e = 2\omega_2$ .



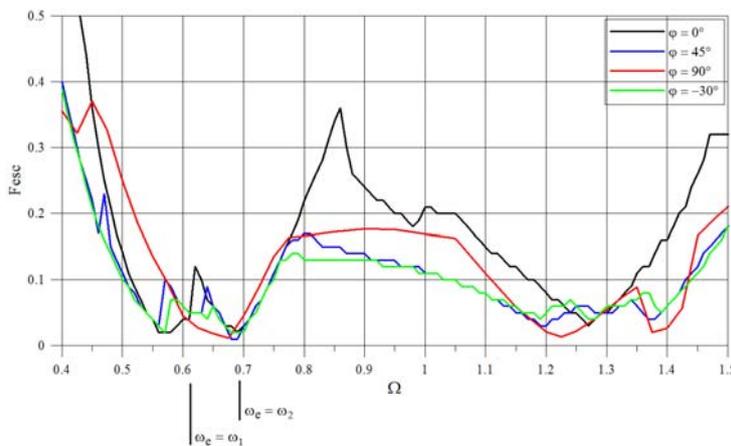
(a.1) Curvas de escape. (Valores mínimos (2 vales) –

$$F_{esc} = 0.0200 (\varphi = 45^\circ) \text{ e } F_{esc} = 0.0100 (\varphi = 90^\circ)$$

$$(a) \phi = 1^\circ \text{ e } \psi = 0^\circ$$



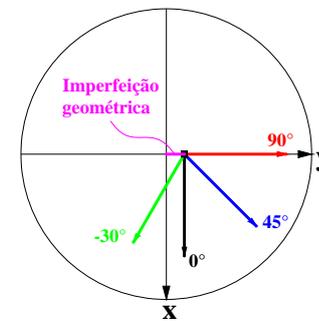
(a.2) Direção da excitação



(b.1) Curvas de escape. (Valores mínimos (2 vales) –

$$F_{esc} = 0.0200 (\varphi = 0^\circ) \text{ e } F_{esc} = 0.0100 (\varphi = 45^\circ)$$

$$(b) \phi = 1^\circ \text{ e } \psi = 90^\circ$$



(b.2) Direção da excitação

Figura 5.77: Fronteiras de estabilidade (escape) para  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ .

Modelo de torre estaiada com imperfeição geométrica.

A variação da carga de escape com  $\varphi$  e com a imperfeição nas regiões de ressonância  $\omega_e = \omega_1$  e  $\omega_e = \omega_2$  é apresentada na Figura 5.78. Observa-se que, para a ressonância fundamental  $\omega_e = \omega_1$ , o sistema apresenta uma grande variação da capacidade de carga com  $\varphi$  para os dois tipos de imperfeição. Já para a situação de ressonância fundamental  $\omega_e = \omega_2$  observa-se que o sistema apresenta uma diminuição dos valores de  $F_{esc}$ , para todas as imperfeição e direções da força de excitação,  $\varphi$ .

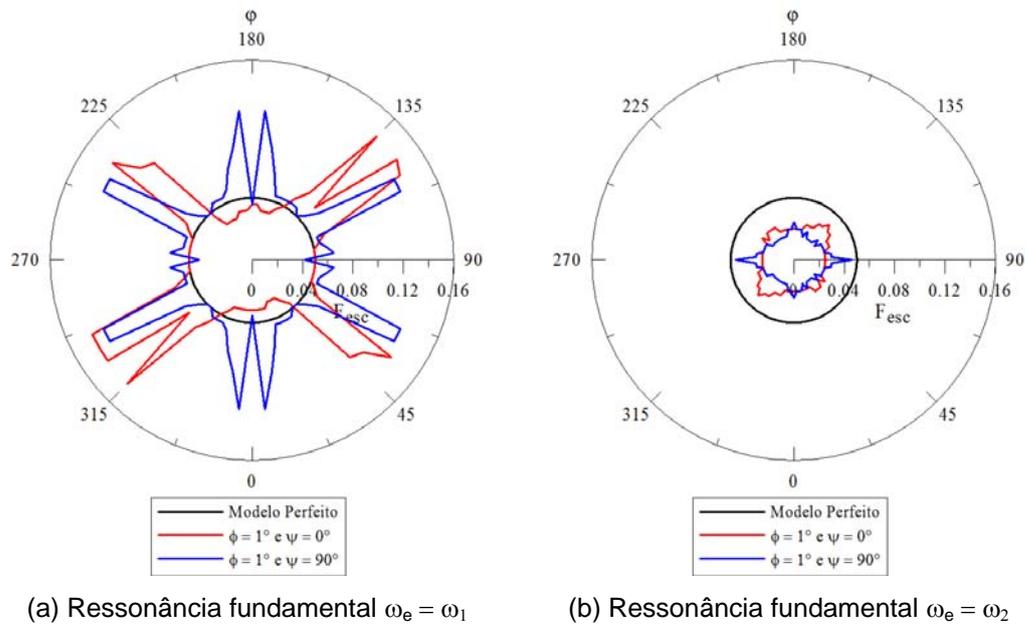


Figura 5.78: Variação da carga de escape,  $F_{esc}$ , com a direção da excitação,  $\varphi$ , (gráfico em coordenadas polares) para  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de torre estaiada com imperfeição geométrica.

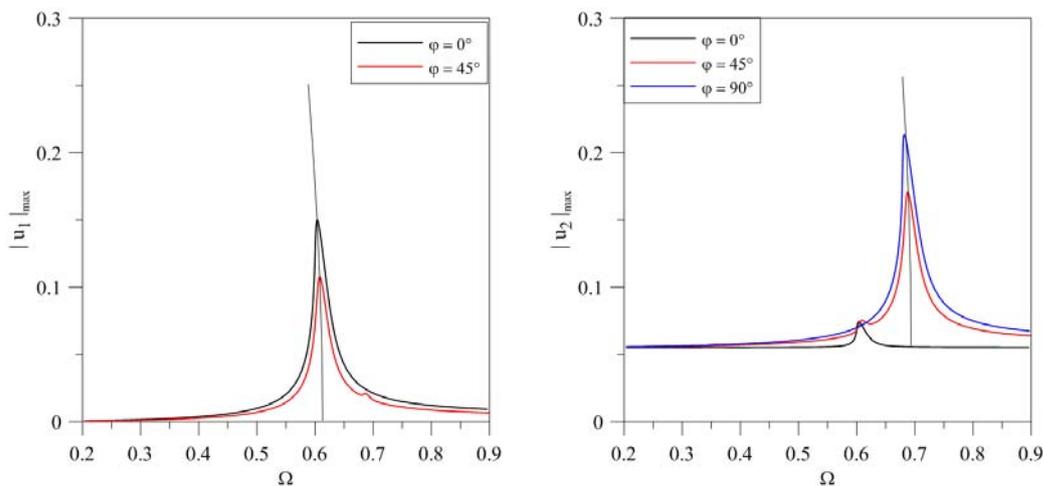
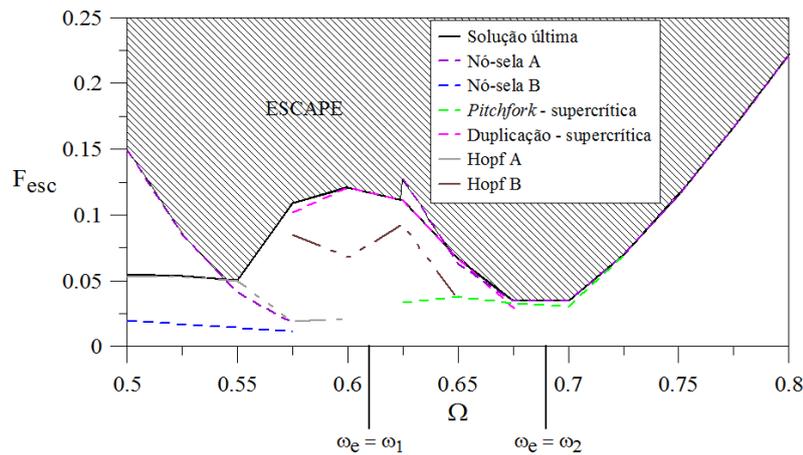


Figura 5.79: Curvas de ressonância para  $F = 0.005$ ,  $\phi = 1^\circ$ ,  $\psi = 90^\circ$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de torre estaiada com imperfeição geométrica.

Novamente, os valores mais baixos são justificados pelos modos de vibração não-lineares e da interação dos mesmos. Isto é verificado na Figura 5.79, que apresenta as curvas de ressonância e as relações frequência-amplitude para  $\phi = 1^\circ$ ,  $\psi = 90^\circ$  (imperfeição somente em uma direção) e  $F = 0.005$ . Observa-se que nessa situação o sistema apresenta a interação do modo similar desacoplado

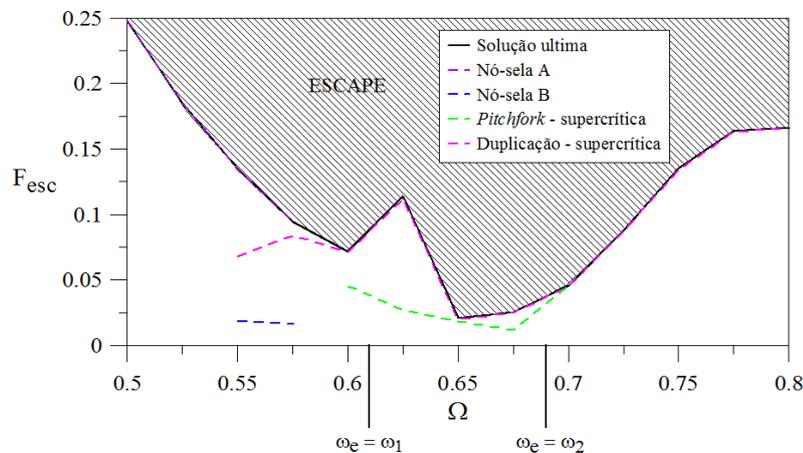
com comportamento *softening* (Figura 4.63) e o modo não-linear acoplado (Figura 4.64).

Para compreender os vales presentes na Figura 5.77, apresentam-se na Figura 5.80 as bifurcações para duas direções da força de excitação,  $\varphi = 0^\circ$  e  $\varphi = 90^\circ$ , nas regiões de ressonância do sistema com  $\phi = 1^\circ$  e  $\psi = 90^\circ$ .



(a)  $\varphi = 0^\circ$

(Valores mínimos (vales) –  $F_{esc} = 0.0501$  e  $F_{esc} = 0.0344$ )



(b)  $\varphi = 90^\circ$

(Valores mínimos (vales) –  $F_{esc} = 0.0720$  e  $F_{esc} = 0.0210$ )

Figura 5.80: Mapeamento das bifurcações locais na região de ressonância fundamental, modelo acoplado, para  $\phi = 1^\circ$ ,  $\psi = 90^\circ$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de torre estaiada com imperfeição geométrica.

Completando este estudo apresenta-se, a seguir, a análise do sistema considerando  $\varphi = 0^\circ$  e  $\Omega = 0.6967$  ( $\omega_e = \omega_2$ ), para a imperfeição com  $\phi = 1^\circ$  e  $\psi = 90^\circ$ . Na Figura 5.81 mostra-se o diagrama de bifurcação e verifica-se que o

sistema apresenta uma solução de período um,  $P1$ , que se torna instável através de uma bifurcação *pitchfork* supercrítica. A Figura 5.82 mostra o processo de erosão das bacias de atração. Por fim, apresenta-se na Figura 5.83 a variação da medida de integridade local LIM da solução  $P1$  com  $F$ .

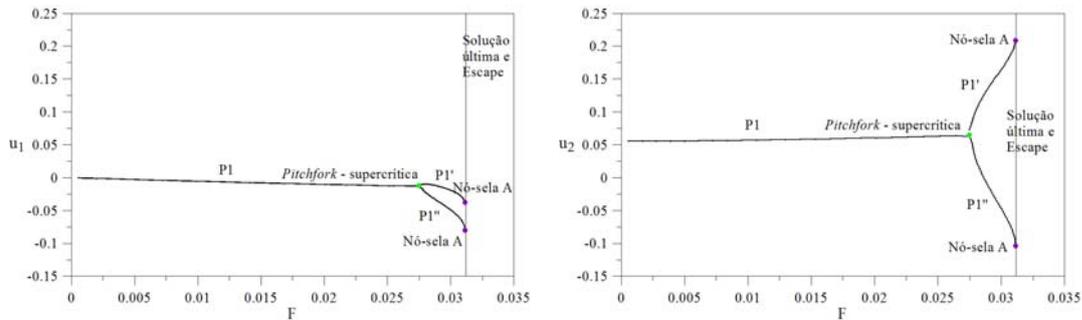


Figura 5.81: Diagramas de bifurcação para  $\Omega = 0.6967$ ,  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\phi = 1^\circ$ ,  $\psi = 90^\circ$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de torre estaiada com imperfeição geométrica ( $F_{esc}=0.0311$ ).

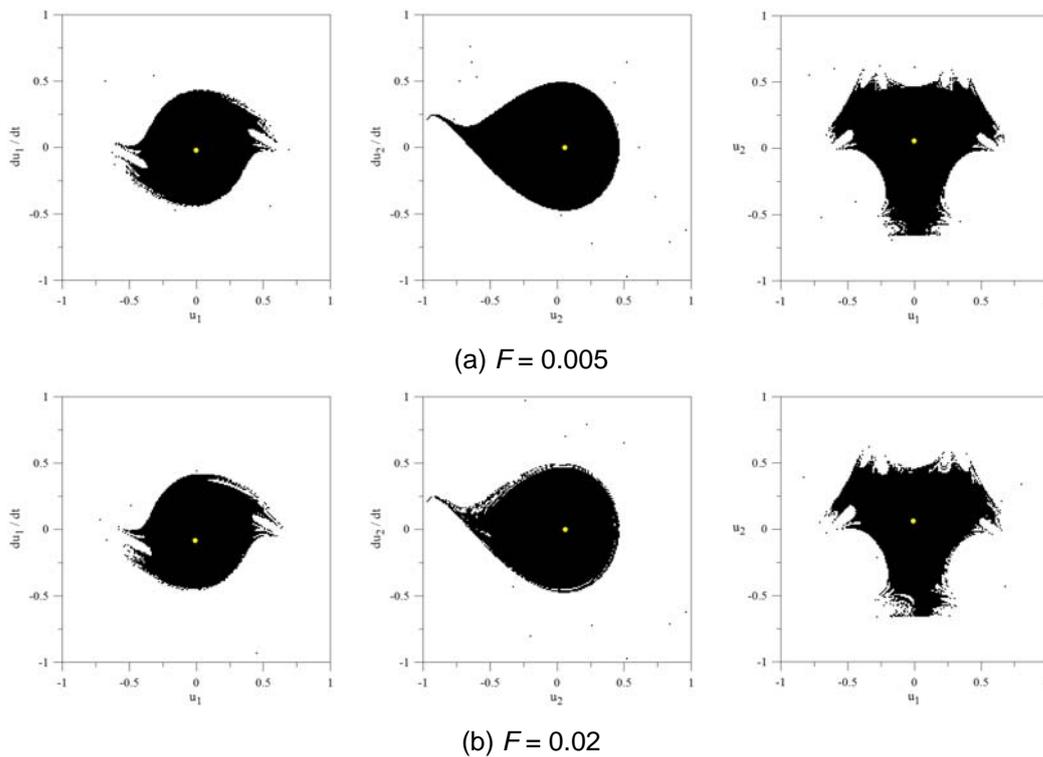


Figura 5.82: Seções das bacias de atração nos planos  $u_1 \times du_1/dt$ ,  $u_2 \times du_2/dt$  e  $u_1 \times u_2$ , para  $\Omega = 0.6967$ ,  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\phi = 1^\circ$ ,  $\psi = 90^\circ$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de torre estaiada com imperfeição geométrica.

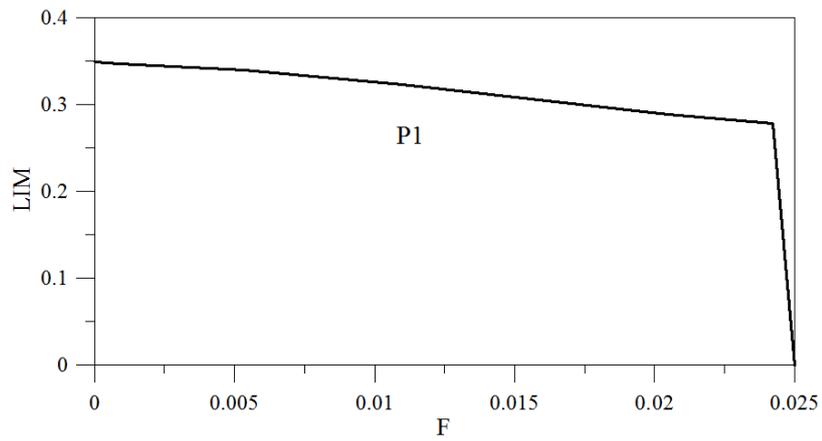


Figura 5.83: Medida de integridade local da bacia de atração, LIM, modelo acoplado, para  $\Omega = 0.6967$ ,  $\varphi = 45^\circ$ ,  $\phi = 1^\circ$ ,  $\psi = 90^\circ$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ . Modelo de torre estaiada com imperfeição geométrica.