

## 4 Análise Dinâmica – Vibração Livre

A análise dinâmica em vibração livre permite compreender o comportamento não-linear e a estabilidade global das estruturas aqui analisadas, fornecendo informações fundamentais para o entendimento do comportamento das mesmas sob vibração forçada.

### 4.1. Modelo de Augusti

Partindo da expressão (2.15), considerando que  $\ddot{u}_b = \ddot{v}_b = 0$  e que as constantes de amortecimento são nulas, têm-se as equações de movimento, em termos das coordenadas generalizadas  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , que regem o comportamento do modelo de Augusti em vibração livre, a saber:

$$\begin{aligned}
 & \left( \ddot{\theta}_1 (-\cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 + \cos^4 \theta_1 \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_1 \cos^4 \theta_2) \right. \\
 & + \ddot{\theta}_2 (-\cos \theta_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2 + \cos^3 \theta_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2 \\
 & + \cos \theta_1 \sin \theta_1 \cos^3 \theta_2 \sin \theta_2) + \dot{\theta}_1^2 (-\cos \theta_1 \sin \theta_1 \cos^4 \theta_2 \\
 & + \cos \theta_1 \sin \theta_1 \cos^2 \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 (\cos \theta_1 \sin \theta_1 - 2 \cos \theta_1 \sin \theta_1 \cos^2 \theta_2 \\
 & - \cos^3 \theta_1 \sin \theta_1 + 2 \cos^3 \theta_1 \cos^2 \theta_2 \sin \theta_1 + \cos \theta_1 \cos^4 \theta_2 \sin \theta_1) \\
 & \left. + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (2 \cos^2 \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2 - 2 \cos^4 \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2) \right) \\
 & + \left( \alpha \frac{\omega_p^2}{\lambda} (\theta_1 - \phi_1) - \omega_p^2 \frac{\cos \theta_1 \sin \theta_1}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_2}} \right) (1 - 2 \cos^2 \theta_1 \\
 & - 2 \cos^2 \theta_2 + \cos^4 \theta_1 + \cos^4 \theta_2 + 2 \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2) = 0
 \end{aligned} \tag{4.1a}$$

$$\begin{aligned}
& (\ddot{\theta}_2(-\cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 + \cos^4 \theta_1 \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_1 \cos^4 \theta_2) \\
& + \ddot{\theta}_1(-\cos \theta_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2 + \cos^3 \theta_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2 \\
& + \cos \theta_1 \sin \theta_1 \cos^3 \theta_2 \sin \theta_2) + \dot{\theta}_2^2(-\cos^4 \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2 \\
& + \cos^2 \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2) + \dot{\theta}_1^2(\cos \theta_2 \sin \theta_2 - 2 \cos^2 \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2 \\
& - \cos^3 \theta_2 \sin \theta_2 + 2 \cos^2 \theta_1 \cos^3 \theta_2 \sin \theta_2 + \cos^4 \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2) \\
& + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2(2 \cos \theta_1 \sin \theta_1 \cos^2 \theta_2 - 2 \cos \theta_1 \sin \theta_1 \cos^4 \theta_2)) \\
& + \left( \frac{\omega_p^2}{\lambda} (\theta_2 - \phi_2) - \omega_p^2 \frac{\cos \theta_2 \sin \theta_2}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_2}} \right) (1 - 2 \cos^2 \theta_1 \\
& - 2 \cos^2 \theta_2 + \cos^4 \theta_1 + \cos^4 \theta_2 + 2 \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2) = 0
\end{aligned} \tag{4.1b}$$

onde se adotam as seguintes variáveis auxiliares:  $\lambda = P/Pcr_2$ ,  $P = mg$ ,  $\alpha = k_1/k_2$ ,  $k_1/ml^2 = \alpha(\omega_p^2/\lambda)$ ,  $k_2/ml^2 = \omega_p^2/\lambda$  e  $\omega_p^2 = g/l$ , sendo  $\omega_p$  a frequência natural de um pêndulo simples. As equações de movimento são adimensionalizadas em função de  $Pcr_2 = k_2/l$ .

#### 4.1.1. Frequências Naturais

Para se obter as frequências naturais do sistema é necessário utilizar como referência a configuração de equilíbrio estático do sistema imperfeito (imperfeição geométrica), tomando-se como coordenadas generalizadas os deslocamentos dinâmicos,  $\theta_{Di}$ . Assim, precisa-se obter a variação das parcelas de energia entre a configuração estática e a perturbada. A Figura 4.1 apresenta as configurações do sistema e suas principais variáveis.

Da Figura 4.1 têm-se as relações:

$$\text{Rotação estática} \rightarrow \theta_{est1} = \phi_1 + \theta_{S1} \text{ e } \theta_{est2} = \phi_2 + \theta_{S2} \tag{4.2a}$$

$$\text{Rotação total} \rightarrow \theta_{T1} = \phi_1 + \theta_{S1} + \theta_{D1} \text{ e } \theta_{T2} = \phi_2 + \theta_{S2} + \theta_{D2} \tag{4.2b}$$

onde  $\theta_{S1}$  e  $\theta_{S2}$  são as deformações das molas sob carregamento estático e  $\theta_{D1}$  e  $\theta_{D2}$  são as deformações devidas ao movimento.

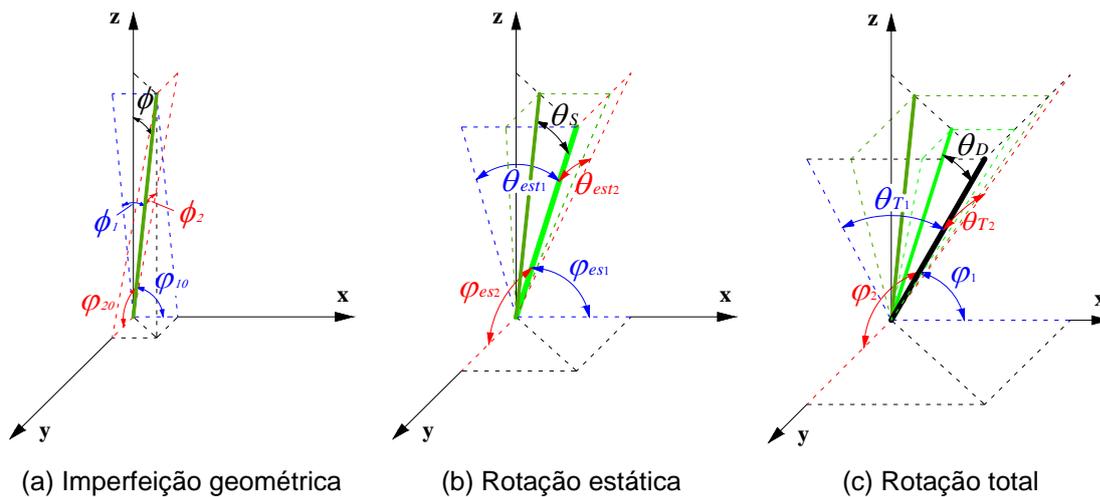


Figura 4.1: Configurações do modelo de Augusti.

Tomando como coordenadas generalizadas os deslocamentos dinâmicos  $\theta_{D1}$  e  $\theta_{D2}$ , a parcela de energia cinética toma a forma:

$$T = \frac{1}{2} ml^2 \left( \dot{\theta}_{D1}^2 \cos^2(\theta_{est1} + \theta_{D1}) + \dot{\theta}_{D2}^2 \cos^2(\theta_{est2} + \theta_{D2}) + \frac{(\dot{\theta}_{D1} \cos(\theta_{est1} + \theta_{D1}) \text{sen}(\theta_{est1} + \theta_{D1}) + \dot{\theta}_{D2} \cos(\theta_{est2} + \theta_{D2}) \text{sen}(\theta_{est2} + \theta_{D2}))^2}{\cos^2(\theta_{est1} + \theta_{D1}) + \cos^2(\theta_{est2} + \theta_{D2}) - 1} \right) \quad (4.3)$$

pois  $T = 1/2 ml^2 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$  e  $x = l \text{sen}(\theta_{est1} + \theta_{D1})$ ,  $y = l \text{sen}(\theta_{est2} + \theta_{D2})$  e  $z = l \sqrt{1 - \text{sen}^2(\theta_{est1} + \theta_{D1}) - \text{sen}^2(\theta_{est2} + \theta_{D2})}$ .

A variação da energia potencial total é dada pela diferença entre a energia potencial da configuração de equilíbrio estático e da configuração perturbada. Assim, com base na Figura 4.1 e observando as expressões (4.2), tem-se que a variação da energia interna de deformação,  $\Delta U$ , e a variação do potencial gravitacional das cargas externas,  $\Delta L_p$ , são dados por:

$$\Delta U = \frac{k_1}{2} ((\theta_{S1} + \theta_{D1})^2 - (\theta_{S1})^2) + \frac{k_2}{2} ((\theta_{S2} + \theta_{D2})^2 - (\theta_{S2})^2) \quad (4.4a)$$

$$\Delta L_p = Pl \left( \sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta_{est1} - \text{sen}^2 \theta_{est2}} - \sqrt{1 - \text{sen}^2(\theta_{est1} + \theta_{D1}) - \text{sen}^2(\theta_{est2} + \theta_{D2})} \right) \quad (4.4b)$$

A partir das equações não-lineares de movimento, expressão (2.15), em termos das coordenadas generalizadas  $\theta_{Di}$ , e utilizando os dois primeiros termos das séries de Taylor das equações não-lineares, chega-se ao sistema de equações de movimento linearizado:

$$\begin{aligned}
& ml^2 \frac{\cos^2 \theta_{est1} \cos^2 \theta_{est2}}{\cos^2 \theta_{est1} + \cos^2 \theta_{est2} - 1} \ddot{\theta}_{D1} + ml^2 \frac{\cos \theta_{est1} \sin \theta_{est1} \cos \theta_{est2} \sin \theta_{est2}}{\cos^2 \theta_{est1} + \cos^2 \theta_{est2} - 1} \ddot{\theta}_{D2} \\
& + k_1(\theta_{S1} + \theta_{D1}) - Pl \left\{ \frac{\sin \theta_{est1} \cos \theta_{est1}}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_{est1} - \sin^2 \theta_{est2}}} \right. \\
& + \theta_{D1} \left( \frac{\cos^2 \theta_{est1} - \sin^2 \theta_{est1}}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_{est1} - \sin^2 \theta_{est2}}} + \frac{\cos^2 \theta_{est1} \sin^2 \theta_{est1}}{\left(\sqrt{1 - \sin^2 \theta_{est1} - \sin^2 \theta_{est2}}\right)^3} \right) \\
& \left. + \theta_{D2} \frac{\cos \theta_{est1} \sin \theta_{est1} \cos \theta_{est2} \sin \theta_{est2}}{\left(\sqrt{1 - \sin^2 \theta_{est1} - \sin^2 \theta_{est2}}\right)^3} \right\} = 0
\end{aligned} \tag{4.5a}$$

$$\begin{aligned}
& ml^2 \frac{\cos^2 \theta_{est1} \cos^2 \theta_{est2}}{\cos^2 \theta_{est1} + \cos^2 \theta_{est2} - 1} \ddot{\theta}_{D2} + ml^2 \frac{\cos \theta_{est1} \sin \theta_{est1} \cos \theta_{est2} \sin \theta_{est2}}{\cos^2 \theta_{est1} + \cos^2 \theta_{est2} - 1} \ddot{\theta}_{D1} \\
& + k_2(\theta_{S2} + \theta_{D2}) - Pl \left\{ \frac{\sin \theta_{est2} \cos \theta_{est2}}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_{est1} - \sin^2 \theta_{est2}}} \right. \\
& + \theta_{D2} \left( \frac{\cos^2 \theta_{est2} - \sin^2 \theta_{est2}}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_{est1} - \sin^2 \theta_{est2}}} + \frac{\cos^2 \theta_{est2} \sin^2 \theta_{est2}}{\left(\sqrt{1 - \sin^2 \theta_{est1} - \sin^2 \theta_{est2}}\right)^3} \right) \\
& \left. + \theta_{D1} \frac{\cos \theta_{est1} \sin \theta_{est1} \cos \theta_{est2} \sin \theta_{est2}}{\left(\sqrt{1 - \sin^2 \theta_{est1} - \sin^2 \theta_{est2}}\right)^3} \right\} = 0
\end{aligned} \tag{4.5b}$$

Vale destacar que as parcelas das equações de movimento (4.5) referentes às parcelas das equações de equilíbrio estático são nulas, pois se toma como referência a configuração de equilíbrio do modelo imperfeito. As equações de equilíbrio estático do modelo imperfeito são:

$$k_1 \theta_{S1} - Pl \left( \frac{\sin(\phi_1 + \theta_{S1}) \cos(\phi_1 + \theta_{S1})}{\sqrt{1 - \sin^2(\phi_1 + \theta_{S1}) - \sin^2(\phi_2 + \theta_{S2})}} \right) = 0 \tag{4.6a}$$

$$k_2 \theta_{s2} - Pl \left( \frac{\sin(\phi_2 + \theta_{s2}) \cos(\phi_2 + \theta_{s2})}{\sqrt{1 - \sin^2(\phi_1 + \theta_{s1}) - \sin^2(\phi_2 + \theta_{s2})}} \right) = 0 \quad (4.6b)$$

A partir das equações (4.5) e (4.6), chega-se às equações de movimento linearizadas finais, que são:

$$aux_{11} \ddot{\theta}_{D1} + aux_{21} \theta_{D1} + aux_{31} \ddot{\theta}_{D2} + aux_{41} \theta_{D2} = 0 \quad (4.7a)$$

$$aux_{11} \ddot{\theta}_{D2} + aux_{51} \theta_{D2} + aux_{31} \ddot{\theta}_{D1} + aux_{41} \theta_{D1} = 0 \quad (4.7b)$$

onde,

$$aux_{11} = \frac{\cos^2 \theta_{est1} \cos^2 \theta_{est2}}{\cos^2 \theta_{est1} + \cos^2 \theta_{est2} - 1} \quad (4.8a)$$

$$aux_{21} = \omega_p^2 \left( \frac{\alpha}{\lambda} - \left( \frac{\cos^2 \theta_{est1} - \sin^2 \theta_{est1}}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_{est1} - \sin^2 \theta_{est2}}} + \frac{\cos^2 \theta_{est1} \sin^2 \theta_{est1}}{\left( \sqrt{1 - \sin^2 \theta_{est1} - \sin^2 \theta_{est2}} \right)^3} \right) \right) \quad (4.8b)$$

$$aux_{31} = \frac{\cos \theta_{est1} \sin \theta_{est1} \cos \theta_{est2} \sin \theta_{est2}}{\cos^2 \theta_{est1} + \cos^2 \theta_{est2} - 1} \quad (4.8c)$$

$$aux_{41} = -\omega_p^2 \frac{\cos \theta_{est1} \sin \theta_{est1} \cos \theta_{est2} \sin \theta_{est2}}{\left( \sqrt{1 - \sin^2 \theta_{est1} - \sin^2 \theta_{est2}} \right)^3} \quad (4.8d)$$

$$aux_{51} = \omega_p^2 \left( \frac{1}{\lambda} - \left( \frac{\cos^2 \theta_{est2} - \sin^2 \theta_{est2}}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_{est1} - \sin^2 \theta_{est2}}} + \frac{\cos^2 \theta_{est2} \sin^2 \theta_{est2}}{\left( \sqrt{1 - \sin^2 \theta_{est1} - \sin^2 \theta_{est2}} \right)^3} \right) \right) \quad (4.8e)$$

Os deslocamentos estáticos,  $\theta_{est1}$  e  $\theta_{est2}$ , são as coordenadas dos pontos de mínimo obtidos na análise estática para o modelo com imperfeição geométrica. As parcelas  $\theta_{s1}$  e  $\theta_{s2}$  são calculadas a partir das expressões (4.2).

Admitindo como soluções para as coordenadas generalizadas  $\theta_{Dj} = \bar{\theta}_{Dj} e^{-i\omega_j t}$ , tem-se que as frequências naturais do modelo de Augusti são dadas, considerando a influência da rigidez relativa das molas e a imperfeição geométrica, por:

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{2}}{2(aux_{11}^2 - aux_{31}^2)} \left\{ (aux_{11}^2 - aux_{31}^2)(aux_{11}aux_{51} - 2aux_{41}aux_{31} + aux_{21}aux_{11}) + (\text{var}_1)^{1/2} \right\}^{1/2} \quad (4.9a)$$

$$\omega_2 = \frac{\sqrt{2}}{2(aux_{11}^2 - aux_{31}^2)} \left\{ (aux_{11}^2 - aux_{31}^2)(aux_{11}aux_{51} - 2aux_{41}aux_{31} + aux_{21}aux_{11}) - (\text{var}_1)^{1/2} \right\}^{1/2} \quad (4.9b)$$

onde,

$$\begin{aligned} \text{var}_1 = & aux_{11}^2 aux_{51}^2 - 4aux_{11}aux_{51}aux_{41}aux_{31} - 2aux_{11}^2 aux_{51}aux_{21} \\ & - 4aux_{41}aux_{31}aux_{21}aux_{11} + aux_{11}^2 aux_{21}^2 + 4aux_{11}^2 aux_{41}^2 \\ & + 4aux_{31}^2 aux_{21}aux_{51} \end{aligned} \quad (4.10)$$

A Tabela 4.1 apresenta as freqüências naturais e os modos lineares de vibração para o modelo perfeito, para o modelo considerando a influência da rigidez relativa das molas e para o modelo com imperfeição geométrica. Para o modelo perfeito têm-se duas freqüências naturais iguais, enquanto que no modelo que considera a influência da rigidez relativa das molas as freqüências naturais são distintas e dependem do parâmetro  $\alpha$ . Verifica-se que, para o modelo perfeito e aquele que considera a influência da rigidez relativa das molas, o sistema linear é desacoplado. Para o caso perfeito, a multiplicidade dos autovalores é igual ao número de variáveis independentes. Portanto pode-se construir uma base com dois autovetores unitários ortogonais coincidindo com os eixos  $x$  e  $y$ , como acontece também no caso em que se considera o modelo com a influência da rigidez relativa das molas (Figura 4.1). Assim, ao vibrar em um dado modo, apenas uma das molas sofre deformação. Quando se tem uma imperfeição geométrica e se considera  $\theta_{est1}$  ou  $\theta_{est2}$  nulo, ou seja, quando se adota  $\psi = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ , tem-se que na direção da imperfeição o modo é desacoplado e na outra direção o modo é acoplado. Para o modelo com imperfeição geométrica e valores de  $\psi$  diferentes dos citados acima, o sistema apresenta autovetores ortogonais que formam um dado ângulo com os eixos  $x$  e  $y$ , ocorrendo deformação das duas molas quando a estrutura vibra em um dado modo.

Tabela 4.1: Frequências naturais e modos lineares de vibração. Modelo de Augusti.

Modelo de Augusti	Frequências Naturais	Modos
Perfeito	$\omega_1 = \omega_p \left( \frac{1}{\lambda} - 1 \right)^{1/2} \rightarrow$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
	$\omega_2 = \omega_p \left( \frac{1}{\lambda} - 1 \right)^{1/2} \rightarrow$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
Considerando a influência da rigidez relativa das molas	$\omega_1 = \omega_p \left( \frac{1}{\lambda} - 1 \right)^{1/2} \rightarrow$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
	$\omega_2 = \omega_p \left( \frac{\alpha}{\lambda} - 1 \right)^{1/2} \rightarrow$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
Imperfeição Geométrica	Expressão (4.9b) $\rightarrow$	$\begin{bmatrix} 1 \\ \text{mod}_{21} \end{bmatrix}$
	Expressão (4.9a) $\rightarrow$	$\begin{bmatrix} 1 \\ \text{mod}_{11} \end{bmatrix}$

onde

$$\text{mod}_{11} = - \left( \text{aux}_{11}^2 \text{aux}_{51} - 2 \text{aux}_{11} \text{aux}_{41} \text{aux}_{31} - \text{aux}_{11}^2 \text{aux}_{21} + \text{aux}_{11} \sqrt{\text{var}_1} + 2 \text{aux}_{21} \text{aux}_{31}^2 \right) / \left( \text{aux}_{31} \text{aux}_{11} \text{aux}_{51} + \text{aux}_{31} \text{aux}_{21} \text{aux}_{11} + \text{aux}_{31} \sqrt{\text{var}_1} - 2 \text{aux}_{41} \text{aux}_{11}^2 \right) \quad (4.11a)$$

$$\text{mod}_{21} = - \left( - \text{aux}_{11}^2 \text{aux}_{51} + 2 \text{aux}_{11} \text{aux}_{41} \text{aux}_{31} + \text{aux}_{11}^2 \text{aux}_{21} + \text{aux}_{11} \sqrt{\text{var}_1} - 2 \text{aux}_{11} \text{aux}_{31}^2 \right) / \left( - \text{aux}_{31} \text{aux}_{11} \text{aux}_{51} - \text{aux}_{31} \text{aux}_{21} \text{aux}_{11} + \text{aux}_{31} \sqrt{\text{var}_1} + 2 \text{aux}_{41} \text{aux}_{11}^2 \right) \quad (4.11b)$$

Considerando  $\theta_{est1} = \theta_{est2} = 0$  e  $\alpha = 1$  em (4.9), têm-se as frequências naturais do modelo perfeito, que são iguais, pois  $k_1 = k_2 = k$  e  $Pcr_1 = Pcr_2 = Pcr = k/l$ . Tem-se, portanto, uma ressonância interna 1:1.

Quando se considera a influência da rigidez relativa das molas,  $\theta_{est1} = \theta_{est2} = 0$  e  $\alpha \neq 1$ , verifica-se que o sistema passa a apresentar duas frequências naturais distintas. Uma das frequências (a maior) passa a depender

diretamente de  $\alpha$ , relação entre as constantes das molas, e a outra se mantém constante e igual à frequência do modelo perfeito. A variação da maior frequência com  $\alpha$  é apresentada na Figura 4.2. Observa-se que as duas frequências se distanciam gradativamente com o aumento de  $\alpha$ .

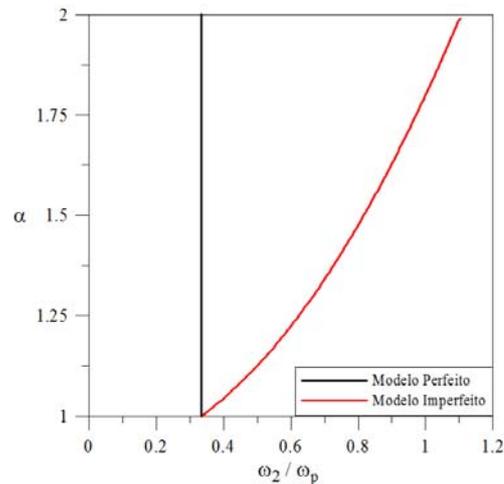
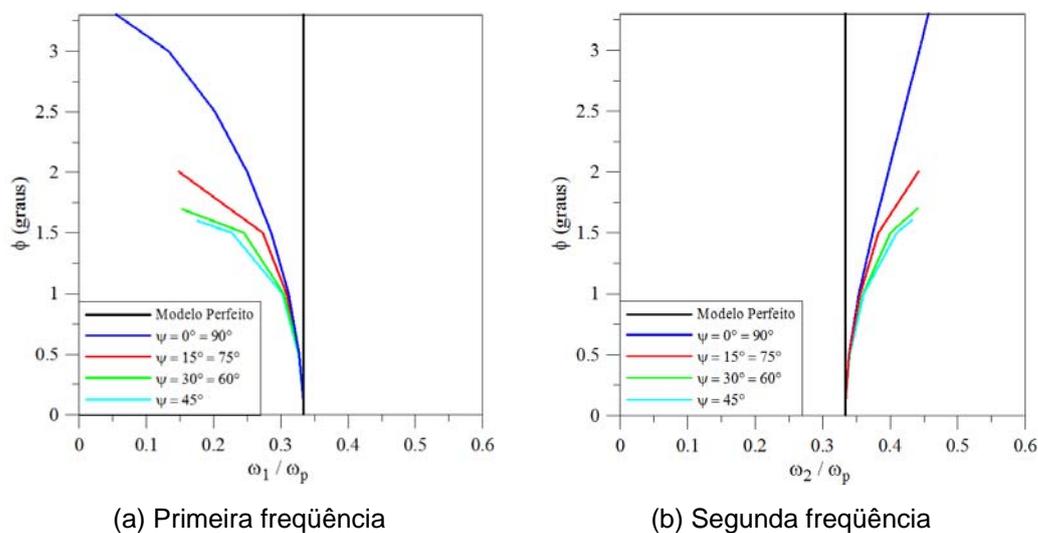


Figura 4.2: Variação da maior frequência natural com o parâmetro de rigidez  $\alpha$ , para  $\lambda = 0.9$ . Modelo de Augusti considerando a influência da rigidez relativa das molas.



(a) Primeira frequência

(b) Segunda frequência

Figura 4.3: Variação das frequências naturais com os parâmetros  $\psi$  e  $\phi$ , para  $\lambda = 0.9$ . Modelo de Augusti com imperfeição geométrica.

Ao se considerar uma imperfeição geométrica inicial,  $\theta_{est1}, \theta_{est2} \neq 0$  e  $\alpha = 1$ , verifica-se que o sistema apresenta duas frequências naturais distintas e dependentes diretamente da imperfeição. A Figura 4.3 mostra a variação das frequências naturais do modelo imperfeito com a magnitude da imperfeição

(inclinação da coluna),  $\phi$ , e sua direção,  $\psi$ . Observa-se que uma das frequências (expressão (4.9a)) torna-se maior que a frequência do sistema perfeito à medida que  $\phi$  cresce e que a maior variação ocorre para  $\psi = 45^\circ$ , Figura 4.3(b). Já a outra frequência (expressão (4.9b)) é sempre menor que a frequência do modelo perfeito, porém com uma variação mais acentuada em relação à primeira para um dado valor de  $\psi$ , Figura 4.3(a).

#### 4.1.2. Princípio da Conservação de Energia

Adimensionalizando as expressões da energia cinética (2.9) e da energia potencial total (2.12), tem-se:

$$\bar{T} = \frac{T}{ml^2} = \frac{1}{2} \left( \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_1 + \dot{\theta}_2^2 \cos^2 \theta_2 + \frac{(\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \sin \theta_2)^2}{\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 - 1} \right) \quad (4.12a)$$

$$\bar{V} = \frac{V}{ml^2} = \frac{1}{2} \alpha \frac{\omega_p^2}{\lambda} (\theta_1 - \phi_1)^2 + \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\lambda} (\theta_2 - \phi_2)^2 - \omega_p^2 \left( \sqrt{1 - \sin^2 \phi_1 - \sin^2 \phi_2} - \sqrt{1 - \sin^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_2} \right) \quad (4.12b)$$

Assim a função de Lagrange ou Lagrangiano adimensional é dada por:

$$L(\theta_i, \dot{\theta}_i) = \bar{T} - \bar{V} = \frac{1}{2} \left( \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_1 + \dot{\theta}_2^2 \cos^2 \theta_2 + \frac{(\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \sin \theta_2)^2}{\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 - 1} \right) - \frac{1}{2} \alpha \frac{\omega_p^2}{\lambda} (\theta_1 - \phi_1)^2 - \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\lambda} (\theta_2 - \phi_2)^2 + \omega_p^2 \left( \sqrt{1 - \sin^2 \phi_1 - \sin^2 \phi_2} - \sqrt{1 - \sin^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_2} \right) \quad (4.13)$$

onde  $\theta_i$  são as coordenadas generalizadas,  $\dot{\theta}_i$  as velocidades generalizadas,  $\partial L / \partial \theta_i = \dot{p}_i$ , as forças generalizadas e  $\partial L / \partial \dot{\theta}_i = p_i$  as quantidades de movimento generalizadas.

O sistema de equações de Lagrange (4.1) é equivalente ao sistema de  $2n$  equações de primeira ordem, conhecidas como equações de Hamilton, a saber:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial \theta_i}, \quad \dot{\theta}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, 2 \quad (4.14)$$

onde  $H$  é o Hamiltoniano, que, com base na dupla transformação de Legendre, pode ser escrito como

$$H = p_1 \dot{\theta}_1 + p_2 \dot{\theta}_2 - L \quad (4.15)$$

Assim, para o modelo de Augusti, obtém-se:

$$\begin{aligned} H = & p_1 \left( p_2 - p_1 \frac{\text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_2}{\cos \theta_1 \cos \theta_2} \right) + p_2 \left( p_1 - p_2 \frac{\text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_2}{\cos \theta_1 \cos \theta_2} \right) \\ & - \frac{1}{2} \left\{ \left( p_2 - p_1 \frac{\text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_2}{\cos \theta_1 \cos \theta_2} \right)^2 \cos^2 \theta_1 + \left( p_1 - p_2 \frac{\text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_2}{\cos \theta_1 \cos \theta_2} \right)^2 \cos^2 \theta_2 \right. \\ & + \left[ \left( p_2 - p_1 \frac{\text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_2}{\cos \theta_1 \cos \theta_2} \right) \cos \theta_1 \text{sen} \theta_1 \right. \\ & \left. \left. + \left( p_1 - p_2 \frac{\text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_2}{\cos \theta_1 \cos \theta_2} \right) \cos \theta_2 \text{sen} \theta_2 \right]^2 / (\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 - 1) \right\} \\ & + \frac{1}{2} \alpha \frac{\omega_p^2}{\lambda} (\theta_1 - \phi_1)^2 + \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\lambda} (\theta_2 - \phi_2)^2 \\ & - \omega_p^2 \left( \sqrt{1 - \text{sen}^2 \phi_1 - \text{sen}^2 \phi_2} - \sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta_1 - \text{sen}^2 \theta_2} \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Esta expressão mostra a equivalência das equações de Lagrange e Hamilton (Arnold, 1989). Para um sistema mecânico onde o Lagrangiano é dado pela equação (4.13), e  $T$  é uma função quadrática das velocidades generalizadas, o Hamiltoniano,  $H$ , é a energia total do sistema, isto é,  $H = 2\bar{T} - (\bar{T} - \bar{V}) = \bar{T} + \bar{V}$ .

Se o sistema mecânico é um sistema conservativo, isto é, se todas as forças generalizadas são obtidas pela derivação de uma função potencial que é uma função das coordenadas generalizadas e não apenas uma função explícita do tempo, então a energia total do sistema é constante.

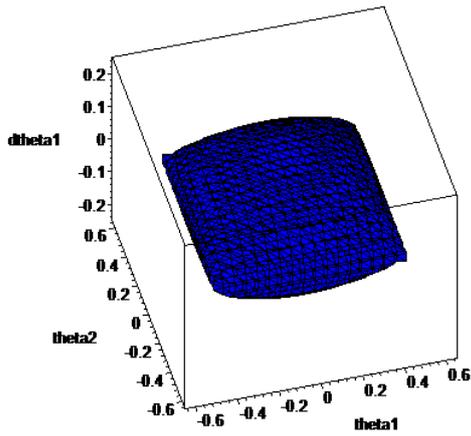
Partindo dessas definições, tem-se que o princípio da conservação de energia é dado por:

$$\bar{T}(\theta_i, \dot{\theta}_i) + \bar{V}(\theta_i) = C \quad (4.17)$$

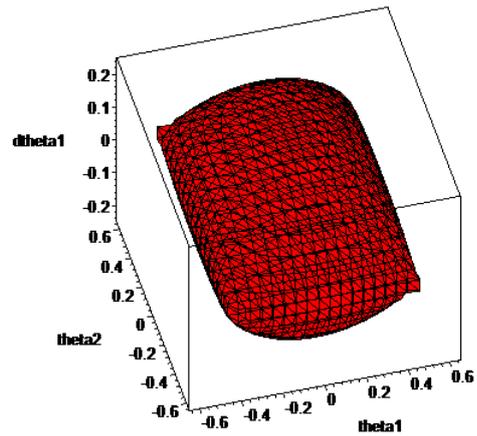
Tomando-se a constante  $C$  igual à energia associada aos pontos de sela que se encontram na fronteira do vale potencial, obtém-se a solução analítica da superfície que define a fronteira da região de estabilidade da posição de equilíbrio pré-crítica no espaço de fase. O hipervolume de quatro dimensões delimitado por esta superfície é denominado “bacia de atração conservativa”. Este hipervolume decresce em todos os planos com o aumento da carga e torna-se nulo quando a carga atinge o valor crítico. Qualquer conjunto de condições iniciais no interior desta superfície leva o sistema a uma resposta oscilatória não amortecida em torno do ponto fixo estável (solução pré-crítica), sendo, portanto, estável no sentido de Liapunov. Esta superfície define as amplitudes máximas de vibração dos deslocamentos e das velocidades que o sistema pode suporta sem que a resposta divirja para o infinito.

Na impossibilidade de se visualizar a geometria desta região de quatro dimensões, apresentam-se na Figura 4.4 seções em 3D ( $\theta_1 \times \theta_2 \times d\theta_1/dt$ ), considerando  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . A Figura 4.5 apresenta outras seções em 3D.

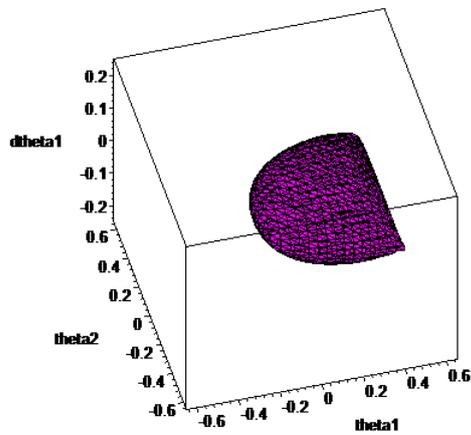
A bacia de atração conservativa do modelo perfeito, Figura 4.4(a), mostra a superfície conservativa claramente delimitada pelos quatro pontos de sela. Verifica-se nesta região a presença de várias simetrias. Alterando a rigidez relativa das molas,  $\alpha = 1.15$ , tem-se uma quebra da simetria entre as coordenadas generalizadas, porém a bacia segura continua sendo delimitada por quatros pontos de sela, Figura 4.4(b). A introdução da imperfeição geométrica no sistema provoca diversos efeitos em seu comportamento. Verifica-se que a região segura diminui consideravelmente, reduzindo significativamente o conjunto de condições iniciais que levam o sistema a oscilar no entorno do ponto fixo estável, solução pré-crítica. Outro efeito marcante é a alteração das conexões entre os pontos de sela. Quando  $\psi = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$  e  $\phi \neq 0$ , a região segura passa a ser delimitada por dois pontos de sela. Quando  $\psi \neq 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$  e  $\phi \neq 0$  (ver Figura 4.4(d) para  $\psi = 45^\circ$  e  $\phi = 1^\circ$ ), a bacia segura é delimitada por um único ponto de sela.



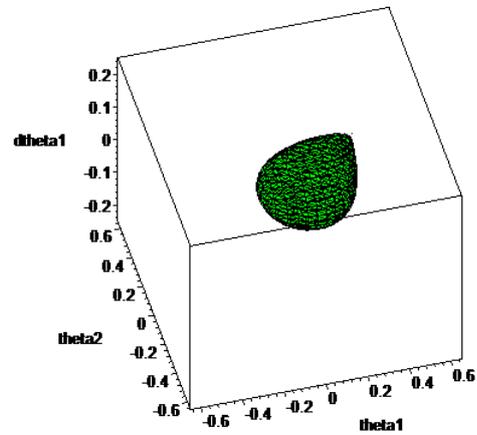
(a) Modelo perfeito



(b) Modelo considerando a influência da rigidez relativa das molas  $\alpha = 1.15$

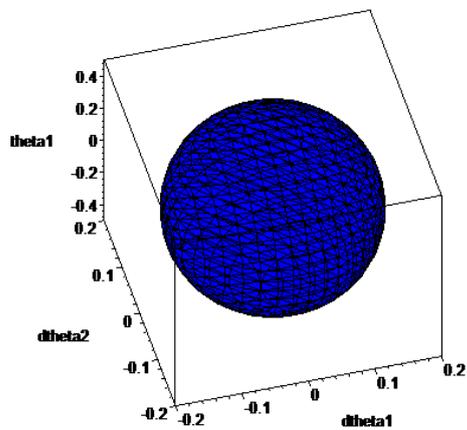


(c) Modelo com imperfeição geométrica  $\psi = 0^\circ$  e  $\phi = 1^\circ$

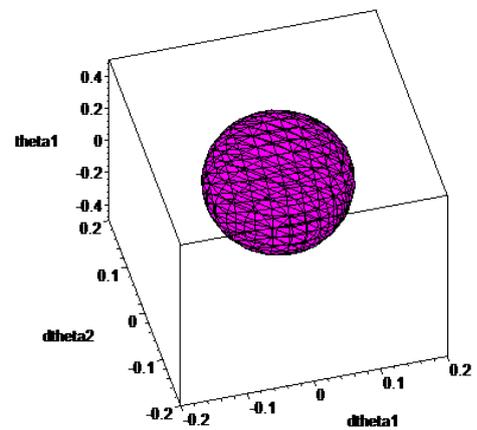


(d) Modelo com imperfeição geométrica  $\psi = 45^\circ$  e  $\phi = 1^\circ$

Figura 4.4: Seções das bacias de atração conservativas em 3D  $(\theta_1 \times \theta_2 \times d\theta_1/dt)$ , para  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de Augusti.



(a) Modelo perfeito



(b) Modelo com imperfeição geométrica  $\psi = 0^\circ$  e  $\phi = 1^\circ$

Figura 4.5: Seções das bacias de atração conservativas em 3D  $(d\theta_1/dt \times d\theta_2/dt \times \theta_1)$ , para  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de Augusti.

Várias seções em 2D considerando  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$  são apresentadas na Figura 4.6. Observa-se claramente o decréscimo sensível da região segura com o tipo e nível das imperfeições iniciais.

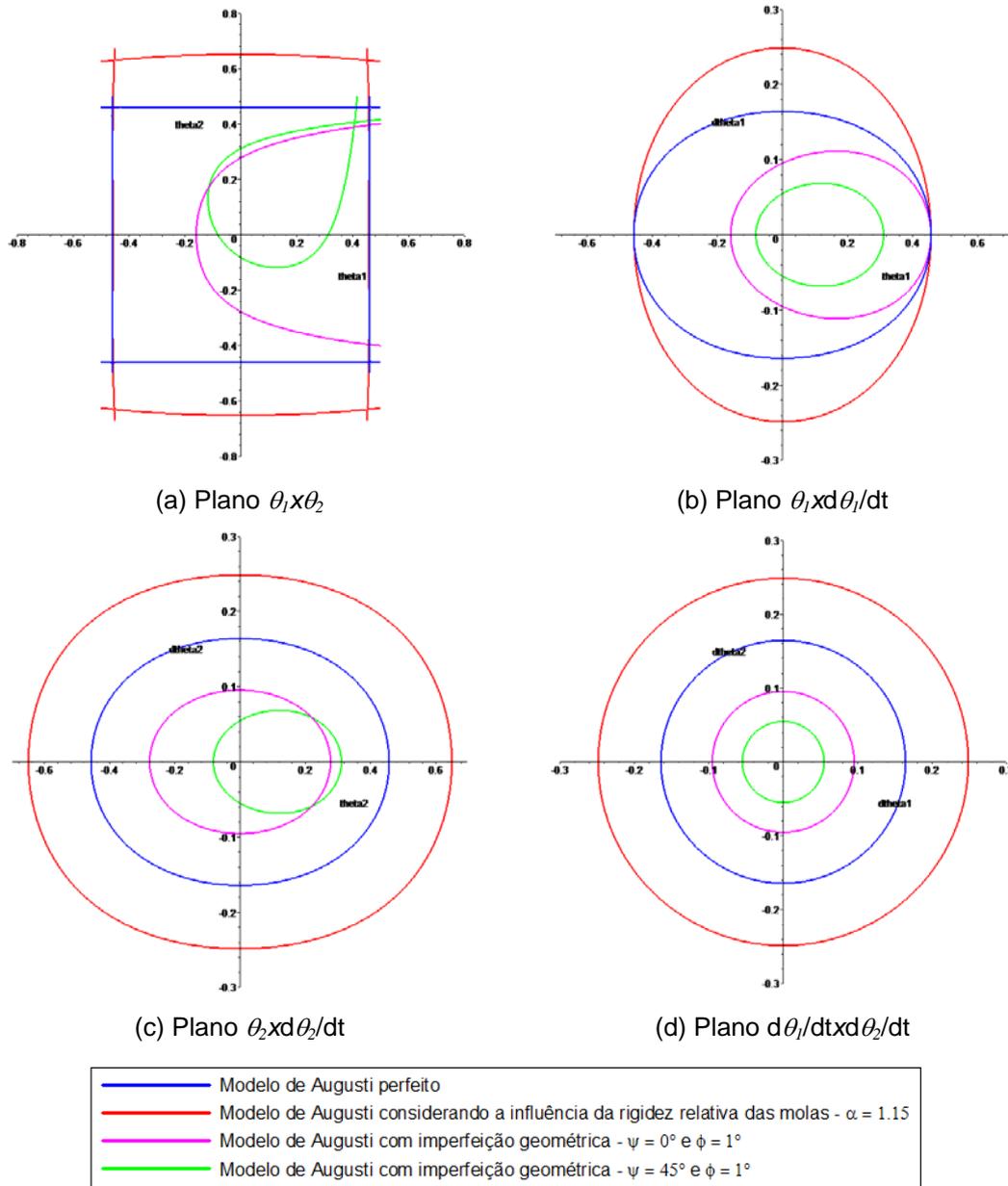


Figura 4.6: Seções das bacias de atração conservativas em 2D, para  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de Augusti.

### 4.1.3. Variedades Invariantes dos Pontos de Sela

As fronteiras de estabilidade são definidas pelas variedades invariantes dos pontos de sela com menor nível de energia, ou seja, pelos autovalores e autovetores associados a cada ponto de sela que delimita a bacia de atração conservativa.

O traçado das variedades invariantes é possível através da identificação dos pontos fixos instáveis no espaço fase. O ponto fixo instável é denominado ponto de sela e as duas curvas que o interceptam são as chamadas variedades invariantes, estáveis e instáveis. A variedade estável fornece a fronteira das bacias de atração e a variedade instável fornece o caminho até o ponto atrator, no caso de sistema amortecido.

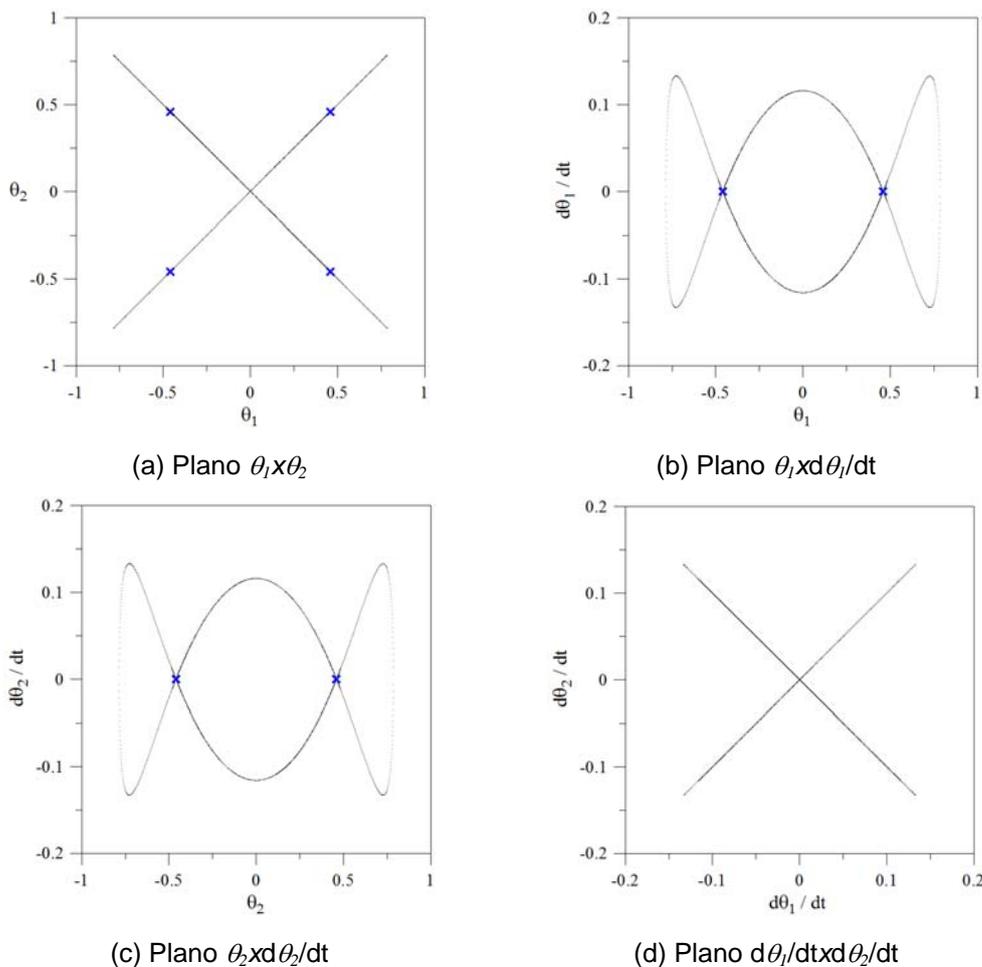


Figura 4.7: Projeções das variedades invariantes dos pontos de sela, para  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de Augusti perfeito.

Partindo das coordenadas dos pontos de sela do modelo perfeito e utilizando o critério dinâmico de estabilidade, obtêm-se seus respectivos autovalores e autovetores. A Figura 4.7 mostra projeções em diversos planos das variedades invariantes de cada ponto de sela para o modelo perfeito considerando  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ .

Observa-se nessas figuras que as variedades invariantes apresentam variações lineares no plano dos deslocamentos e no plano das velocidades. Observam-se dois conjuntos independentes de variedades contidos em planos simétricos a  $45^\circ$  e  $-45^\circ$  do eixo  $\theta_1$ . Os pontos de sela localizados ao longo dos eixos a  $45^\circ$  e  $-45^\circ$  do eixo  $\theta_1$  são conectados por órbitas heteroclínicas. Um ponto é dito heteroclínico se ele está na variedade instável de um ponto de sela e essa variedade é tangente à variedade estável de outro ponto de sela. A órbita percorrida pelo ponto heteroclínico conecta dois pontos de sela e é denominada órbita heteroclínica.

Tomando as coordenadas do primeiro ponto de sela do sistema perfeito (aquele que possui os deslocamentos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  positivos) com uma pequena perturbação na direção do autovetor que define a variedade instável como condição inicial e integrando as equações de movimento, obtém-se a resposta do sistema no domínio do tempo, Figura 4.8. Verifica-se, pela Figura 4.8(a), que as oscilações se restringem ao plano das variedades dos pontos de selas.

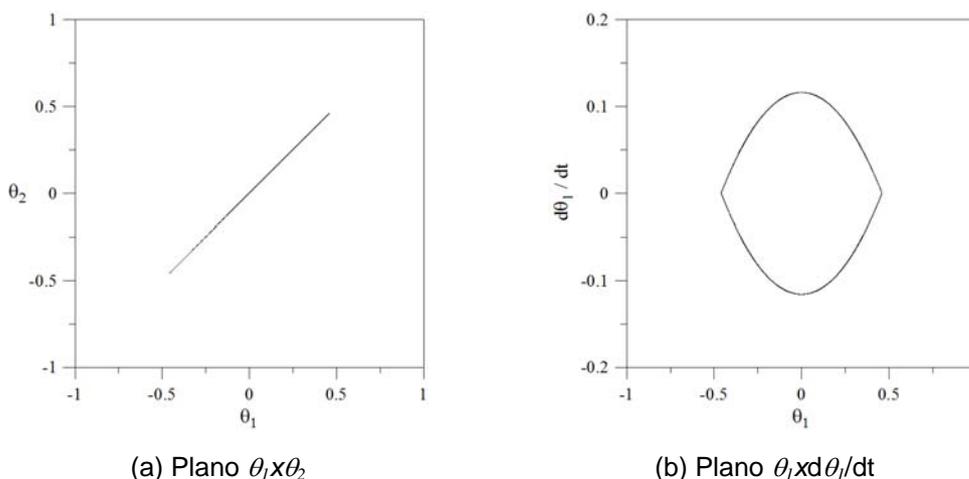


Figura 4.8: Projeções em planos de fase da resposta no tempo do primeiro ponto sela perturbado, para  $\lambda=0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de Augusti perfeito.

Considerando a influência da rigidez relativa das molas ( $\alpha = 1.15$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ ) verifica-se a quebra de simetria do sistema, isso faz com que as variedades não mais fiquem contidas em um plano, como mostra a Figura 4.9(a), e a resposta no tempo obtida impondo-se uma pequena perturbação a um dos pontos de sela mostra um comportamento extremamente complexo, como mostra a Figura 4.9(b).

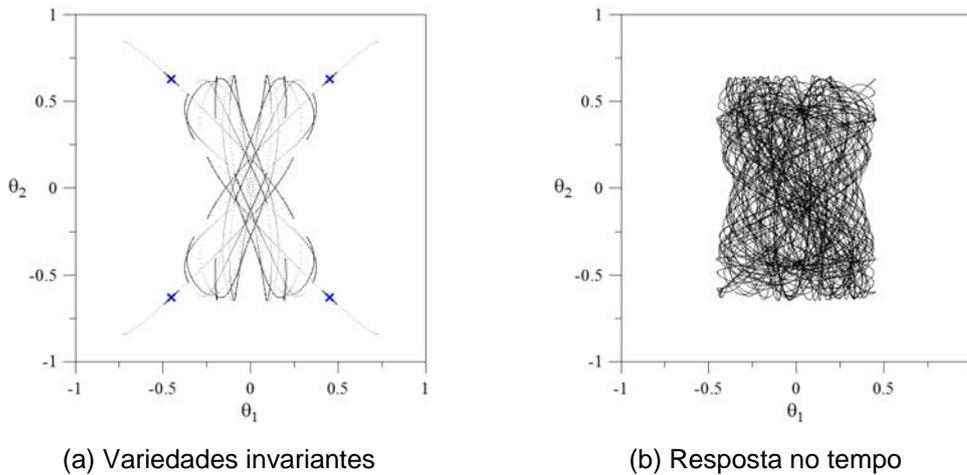


Figura 4.9: Projeções das variedades invariantes e da resposta no tempo no plano  $\theta_1 \times \theta_2$ , para  $\alpha = 1.15$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de Augusti considerando a influência da rigidez relativa das molas.

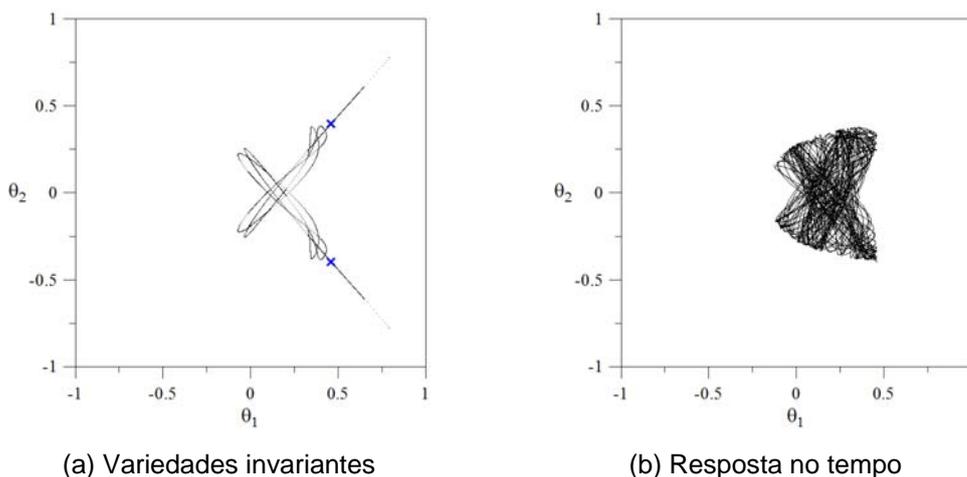


Figura 4.10: Projeções das variedades invariantes e da resposta no tempo no plano  $\theta_1 \times \theta_2$ , para  $\psi = 0^\circ$ ,  $\phi = 1^\circ$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de Augusti com imperfeição geométrica.

O mesmo se observa quando se considera o efeito de uma imperfeição geométrica inicial. Mostram-se na Figura 4.10(a) as variedades dos dois pontos de

sela que definem a bacia de atração conservativa para  $\psi = 0^\circ$  e  $\phi = 1^\circ$ . Na Figura 4.10(b) verifica-se que as oscilações provenientes de uma pequena perturbação dada a um ponto de sela desenvolvem-se na região do espaço definida pelas variedades.

Na Figura 4.11 mostra-se o comportamento das variedades invariantes para o sistema considerando uma imperfeição geométrica inicial com  $\psi = 45^\circ$  e  $\phi = 1^\circ$ . Observa-se, como mostrado na Figura 4.6(a), que nesse caso apenas um ponto de sela delimita a bacia conservativa através de suas variedades. Verifica-se que as variedades apresentam uma variação linear no plano dos deslocamentos e das velocidades e que a órbita definida pelas variedades é homoclínica. Uma órbita é dita homoclínica quando uma variedade instável que parte de um ponto de sela coincide com a variedade estável neste ponto, formando uma órbita fechada.

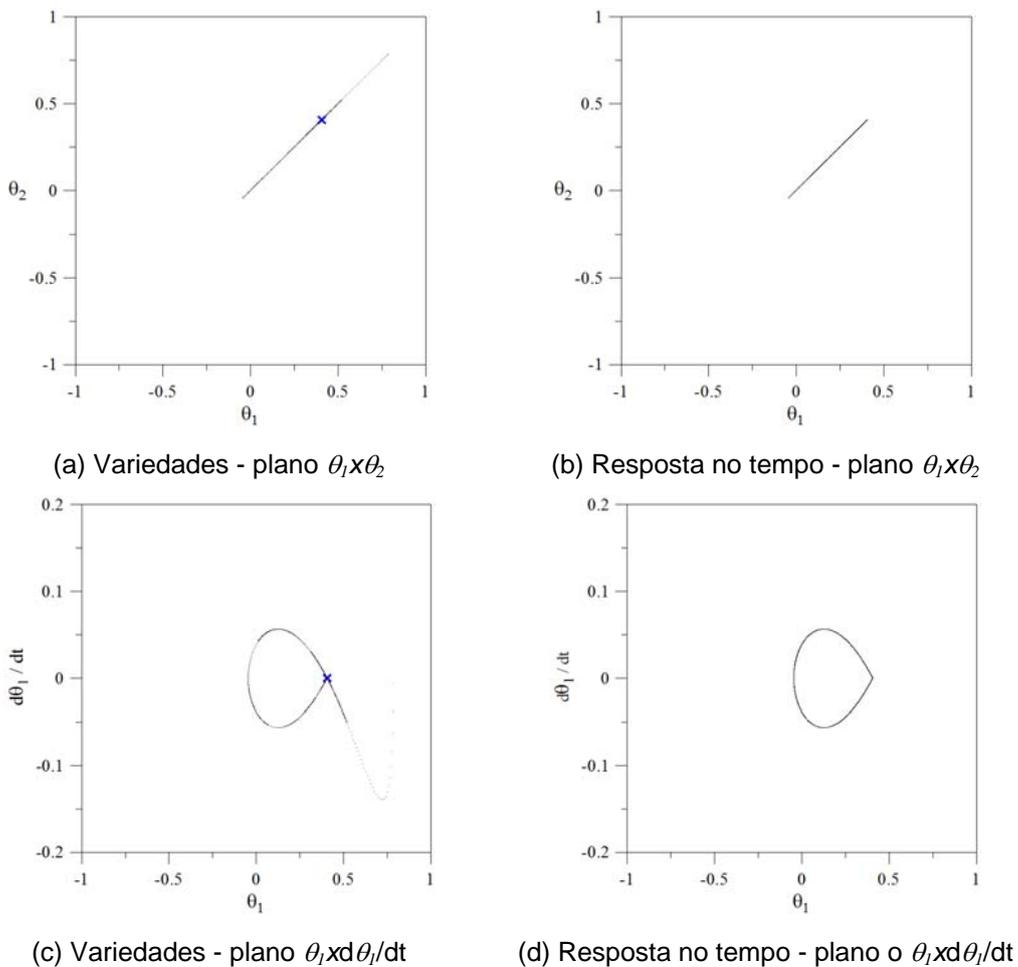


Figura 4.11: Projeções das variedades invariantes e da resposta no tempo, para  $\psi = 45^\circ$ ,  $\phi = 1^\circ$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de Augusti com imperfeição geométrica.

#### 4.1.4. Modos Não-Lineares de Vibração

O teorema da superposição é a pedra fundamental da teoria de sistemas lineares (Boivin *et al.*, 1995). Este teorema permite a análise modal em sistemas dinâmicos lineares com base no conceito de modos lineares de vibração. Em contrapartida, é precisamente esta forma de recombinação das coordenadas modais que falta para os sistemas dinâmicos não-lineares. Conseqüentemente, uma superposição das repostas modais individuais não pode ser feita para um sistema estrutural não-linear.

Em sistemas lineares, pelo princípio de superposição, um modelo dinâmico em larga escala pode ser reduzido a um modelo de menor dimensão, representado pelos modos de vibração dominantes, utilizando as ferramentas usuais da análise modal, pois os modos são dinamicamente independentes. Porém, para sistemas não-lineares, estas ferramentas não são diretamente aplicáveis e deve-se usar outra forma para compreender e analisar a dinâmica dos sistemas não-lineares.

O conceito apresentado por Rosenberg (1961) de modos não-lineares é considerado como uma extensão dos modos lineares, e tem se tornado uma ferramenta útil na análise de vibrações não-lineares. De acordo com Rosenberg, os modos não-lineares são movimentos síncronos que apresentam uma relação bem definida entre as coordenadas generalizadas, isto é, todas as coordenadas generalizadas executam movimentos de mesmo período, passando pela posição de equilíbrio e alcançando seus deslocamentos máximos simultaneamente. Esses conceitos são formalizados segundo as definições:

Definição 1 (Rosenberg 1962, 1966)

*Um sistema conservativo autônomo discreto de  $n$  graus de liberdade descrito por um conjunto de equações na forma*

$$\ddot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.18)$$

*onde  $x_i$  representa os deslocamentos medidos a partir de um estado de equilíbrio, e as funções não-lineares  $f_i$  são as forças que agem sobre o sistema, está oscilando em um modo, se ele está vibrando em uníssono, ou seja:*

1) *O movimento de todas as coordenadas é periódico e de mesmo período, isto é:*

$$x_i(t) = x_i(t+T), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.19)$$

onde o período  $T$  é uma constante;

2) *Existe um tempo  $t = t_0$  em que todas as massas passam pela posição de equilíbrio, ou seja:*

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.20)$$

3) *Todas as coordenadas alcançam seus valores extremos no mesmo instante de tempo, ou seja, existe um tempo  $t = t_1 \neq t_0$  no qual todas as velocidades tornam-se nulas, isto é:*

$$\dot{x}_i(t_1) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.21)$$

4) *Para um  $r \in [1, 2, \dots, n]$  fixo, em qualquer instante de tempo as coordenadas do sistema devem ser relacionadas por equações funcionais da forma:*

$$x_i = P_i(x_r), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad i \neq r \quad (4.22)$$

onde  $P_i$  é chamado de função modal para o modo não-linear  $r$ .

Sendo assim, em um modo, as oscilações de todas as coordenadas podem ser parametrizadas por uma única coordenada, já que, segundo o conceito de Rosenberg (1962), (a) todas elas executam movimentos periódicos (não necessariamente harmônico) com o mesmo período; (b) todas elas passam por suas posições de equilíbrio estático ao mesmo tempo, e (c) todas elas atingem seus deslocamentos máximos ao mesmo tempo. Assim, a possibilidade de definir as posições de todas as massas por meio de qualquer uma delas permite uma redução de ordem muito eficiente para o problema como um todo.

O modo linear pode ser, por essa definição, visto como um caso particular do modo não-linear, onde as funções modais na expressão (4.22) são funções lineares.

Rosenberg também define dois tipos de modos não-lineares, similar e não-similar:

Definição 2 (Rosenberg 1962, 1966)

*Se as linhas modais correspondentes ao modo não-linear forem retas tem-se que o modo é similar. No caso geral onde as linhas modais são curvas, o modo é não-similar.*

Portanto, quando um sistema se movimenta em um modo similar, esse movimento ocorre ao longo de uma linha reta passando pela posição de equilíbrio no espaço  $n$ -dimensional do sistema, ao passo que o movimento não-similar ocorre ao longo de uma curva no mesmo espaço.

O movimento do modo similar que ocorre em um sistema em vibração livre pode ser matematicamente reescrito como:

$$x_i = c_{ir} x_r, \quad i = 1, 2, \dots, n; i \neq r; c_{rr} = 1 \quad (4.23)$$

sendo que essas relações lineares devem ser satisfeitas pelas coordenadas  $x_i$  para todos os tempos, onde  $c_{ir}$  são  $n - 1$  quantidades escalares desconhecidas. Tem-se, ainda que as equações (4.23) caracterizam um autovetor que define a forma planar das variedades (manifold) invariantes. O modo linear é um caso particular de modo similar.

Esse conceito original de modos não-lineares foi modificado nos últimos anos. Shaw e Pierre (1991) propuseram uma definição dos modos não-lineares, na qual não somente os deslocamentos generalizados, mas também as velocidades devem ser consideradas. De acordo com eles um modo não-linear é um movimento em vibração livre que se realiza em uma variedade bidimensional invariante inserida no espaço de fase do sistema. Como as variedades são invariantes, isso significa que, se as condições iniciais estão em uma dessas variedades, o movimento correspondente permanece nesta variedade. A vantagem dessa definição é que ela incorpora a definição de Rosenberg como um caso

particular e é apropriada para sistemas conservativos e não-conservativos. Formalmente estes conceitos podem ser expressos por:

Definição 3 (Shaw e Pierre, 1994)

*Uma variedade invariante de um sistema dinâmico é um subconjunto  $S$  do espaço de fase, tal que se um conjunto de condições iniciais for dado em  $S$ , a solução permanece em  $S$  ao longo de todo o tempo.*

De acordo com a definição 3, a variedade invariante de um modo não-linear é uma superfície bidimensional no espaço de fase do sistema. Esta variedade deve conter o ponto de equilíbrio e ser tangente ao correspondente auto-espaço do sistema linearizado (Jiang *et al.*, 2005). Nessa formulação um par de coordenadas, deslocamento-velocidade, é escolhido como coordenadas governantes, caracterizando o movimento modal não-linear individual que ocorre em tal variedade. Assim todos os graus de liberdade restantes são descritos como coordenadas dependentes, compostas da mesma forma por pares de coordenadas, deslocamento-velocidade. Estes conceitos podem ser reescritos formalmente pela definição:

Definição 4 (Shaw e Pierre, 1994, e Shaw *et al.*, 1999)

*Um modo para um sistema não-linear é um movimento que ocorre em uma variedade bidimensional invariante no espaço de fase do sistema. Esta variedade passa através do ponto de equilíbrio estável de interesse e, nesse ponto, é tangente ao auto-espaço bidimensional do sistema linearizado. Nesta variedade, o sistema dinâmico é governado por uma equação de movimento envolvendo um par de variáveis de estado, ou seja, comporta-se como um sistema de um grau de liberdade.*

Uma forma eficiente de se determinar numericamente a existência dos modos não-lineares são os mapas de Poincaré. Segundo Vakakis (1991), a aplicação dos mapas de Poincaré para o estudo da dinâmica não amortecida de sistemas discretos foi apresentada inicialmente por Month (1979, 1980). Nessas referências, técnicas de aproximação dos mapas de Poincaré são apresentadas. Aplicando tais técnicas, pode-se determinar analiticamente o fluxo global do sistema dinâmico suficientemente próximo ao modo, e assim obter-se uma descrição completa e mais detalhada dos modos não-lineares e de sua estabilidade.

Os resultados nas seções anteriores mostram que a energia potencial não-linear dos modelos aqui analisados é altamente distorcida quando comparada com

a do sistema linearizado. Assim o nível de energia, associado a um dado conjunto de condições iniciais tem uma notável influência nas vibrações do sistema perturbado. Na expressão (4.17) pode-se observar que no ponto de equilíbrio estável a energia total é nula. Quando o nível de energia aumenta e aproxima-se do relativo aos pontos de sela associados à fronteira de escape, a complexidade da vibração livre do sistema aumenta consideravelmente.

Fixando a energia total do sistema, pode-se restringir o fluxo do sistema dinâmico a uma fronteira tridimensional isoenergética. Isso é obtido quando se fixa  $H = h$ , expressão (4.17), onde  $h$  é um nível de energia adotado. Se a fronteira tridimensional isoenergético, é cortada por um plano bidimensional (2D) e se o fluxo é transversal a este plano (Guckenheimer e Holmes, 1984; Vakakis, 1991), a seção transversal resultante  $\Sigma$  é bidimensional e define o mapa de Poincaré.

Para compreender o comportamento do sistema, foram escolhidos dois planos para representar os mapas de Poincaré, a saber:  $\theta_1 \times d\theta_1 / dt$  e  $\theta_2 \times d\theta_2 / dt$ . Para obter tais mapas de Poincaré tem-se que os respectivos planos de corte e as respectivas seções de Poincaré,  $\Sigma$ , são definidas por:

$$\Pi = \{\theta_2 = 0\} \rightarrow \Sigma = \{\theta_2 = 0, \dot{\theta}_2 > 0\} \cap \{H = h\} \quad (4.24a)$$

$$\Pi = \{\theta_1 = 0\} \rightarrow \Sigma = \{\theta_1 = 0, \dot{\theta}_1 > 0\} \cap \{H = h\} \quad (4.24b)$$

A restrição quanto ao sinal da velocidade,  $\dot{\theta}_2$  em (4.24a) e  $\dot{\theta}_1$  em (4.24b), se deve ao fato de que o mapa de Poincaré deve preservar a sua orientação (Guckenheimer & Holmes, 1984; Vakakis, 1991).

#### 4.1.4.1. Modelo Perfeito

Considerando o modelo perfeito,  $\psi = \phi = 0^\circ$  e  $\alpha = 1$ , e usando as expressões (4.12) e (4.17), para avaliar  $H = h$ , tem-se que as condições iniciais de  $\dot{\theta}_2$  e  $\dot{\theta}_1$ , correspondentes aos pares iniciais  $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$  e  $(\theta_2, \dot{\theta}_2)$ , são dadas, respectivamente, por:

$$\dot{\theta}_2 = \pm \left( -\dot{\theta}_1^2 - \frac{\omega_p^2}{\lambda} \theta_1^2 + 2\omega_p^2(1 - \cos \theta_1) + 2h \right)^{1/2} \quad (4.25a)$$

$$\dot{\theta}_1 = \pm \left( -\dot{\theta}_2^2 - \frac{\omega_p^2}{\lambda} \theta_2^2 + 2\omega_p^2(1 - \cos \theta_2) + 2h \right)^{1/2} \quad (4.25b)$$

onde somente as velocidades positivas são consideradas.

A região ocupada pela seção de Poincaré nos planos em estudo ( $\theta_1 \times d\theta_1 / dt$  e  $\theta_2 \times d\theta_2 / dt$ ) é definida pelo conjunto de pontos para os quais  $\dot{\theta}_2$  e  $\dot{\theta}_1$  sejam positivos. Os limites destas regiões são obtidos pela condição de que o radicando em (4.25) seja nulo, o que leva a:

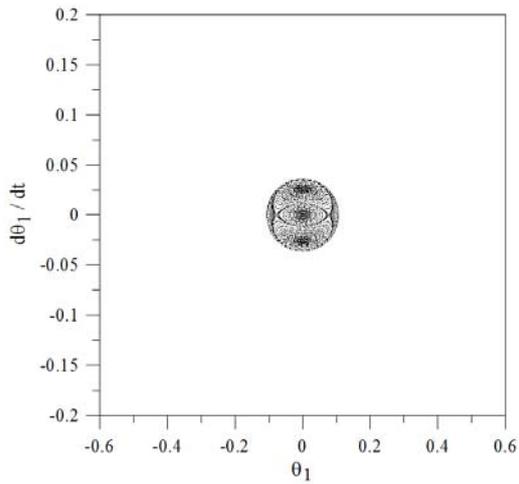
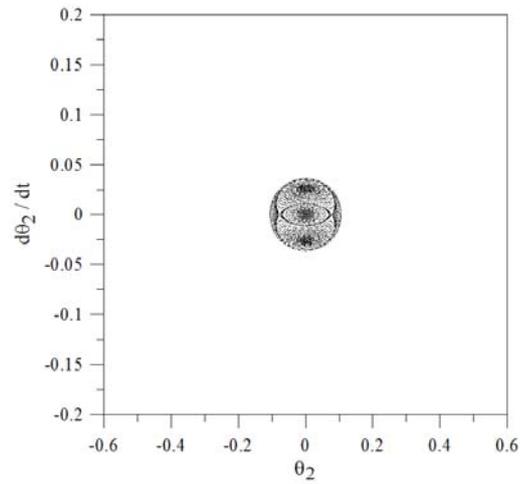
$$h = \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\lambda} \theta_1^2 - \omega_p^2(1 - \cos \theta_1) \quad (4.26a)$$

$$h = \frac{1}{2} \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\lambda} \theta_2^2 - \omega_p^2(1 - \cos \theta_2) \quad (4.26b)$$

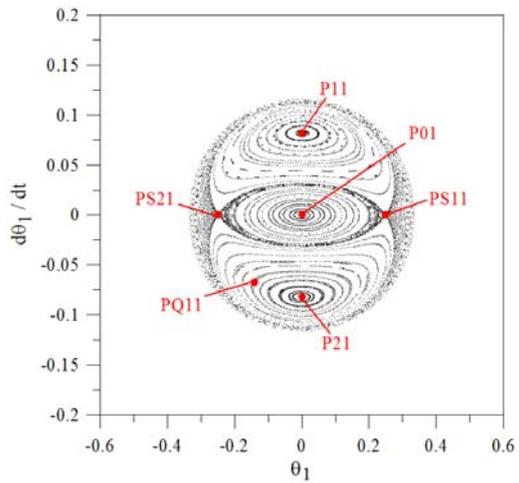
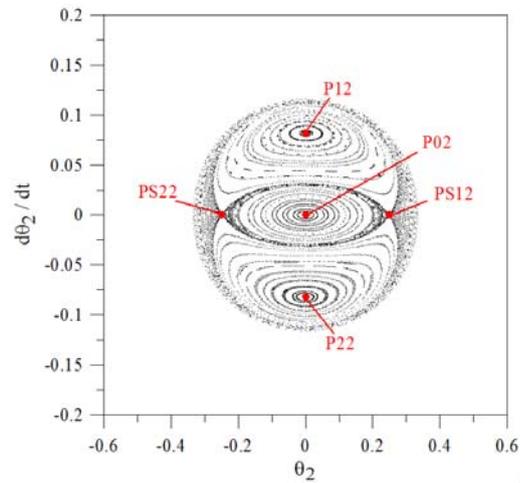
A dinâmica dentro destas regiões é obtida pela integração das equações (4.1) para as condições iniciais de  $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$  que satisfaçam as restrições em  $\theta_2$  e  $\dot{\theta}_2$ , e para as condições iniciais de  $(\theta_2, \dot{\theta}_2)$  que satisfaçam as restrições em  $\theta_1$  e  $\dot{\theta}_1$ .

A vibração livre de um sistema correspondente a um modo é um movimento periódico e, portanto, a seção de Poincaré de um modo é um único ponto e sua estabilidade pode ser determinada examinando-se as trajetórias correspondentes às condições iniciais na vizinhança do ponto. Se o ponto correspondente a um modo aparece como um centro, rodeado de curvas fechadas, o modo é orbitalmente estável. Ao contrário, se o ponto aparenta ser uma sela, então o modo é orbitalmente instável. Uma curva fechada representa a interseção de um toro invariante com a seção de Poincaré.

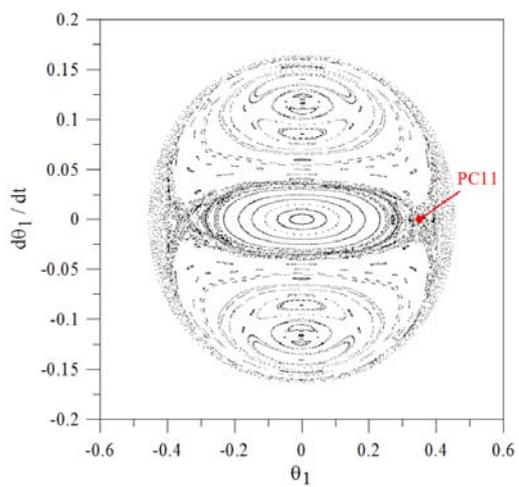
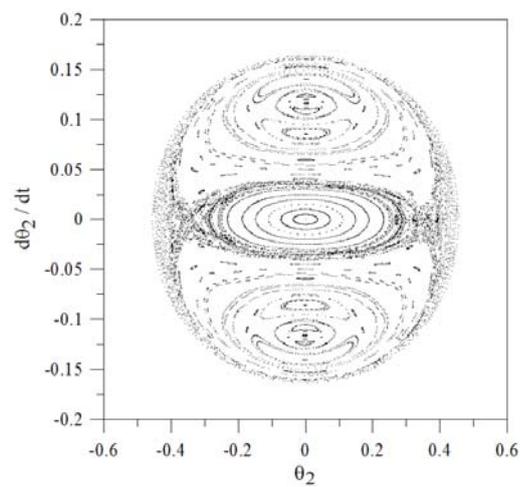
Na Figura 4.12 apresentam-se as seções de Poincaré para um nível de energia igual a 5% da energia dos pontos de sela (baixo), 50% da energia dos pontos de sela (médio) e para o nível de energia dos pontos de sela (alto, valor extremo), considerando  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ .

(a.1) Plano  $\theta_1 x d\theta_1/dt$ (a.2) Plano  $\theta_2 x d\theta_2/dt$ 

(a) 5 % da energia do ponto de sela

(b.1) Plano  $\theta_1 x d\theta_1/dt$ (b.2) Plano  $\theta_2 x d\theta_2/dt$ 

(b) 50 % da energia do ponto de sela

(c.1) Plano  $\theta_1 x d\theta_1/dt$ (c.2) Plano  $\theta_2 x d\theta_2/dt$ 

(c) Energia do ponto de sela

Figura 4.12: Seções de Poincaré para  $\omega_1 = \omega_2 = 1/3$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de Augusti perfeito.

É interessante observar como a região onde a dinâmica esta confinada, Figura 4.12, coincide com as seções bidimensionais da região segura pré-flambagem, Figura 4.6. Para maiores magnitudes de  $h$ , a resposta associada a qualquer conjunto não trivial de condições iniciais diverge para o infinito.

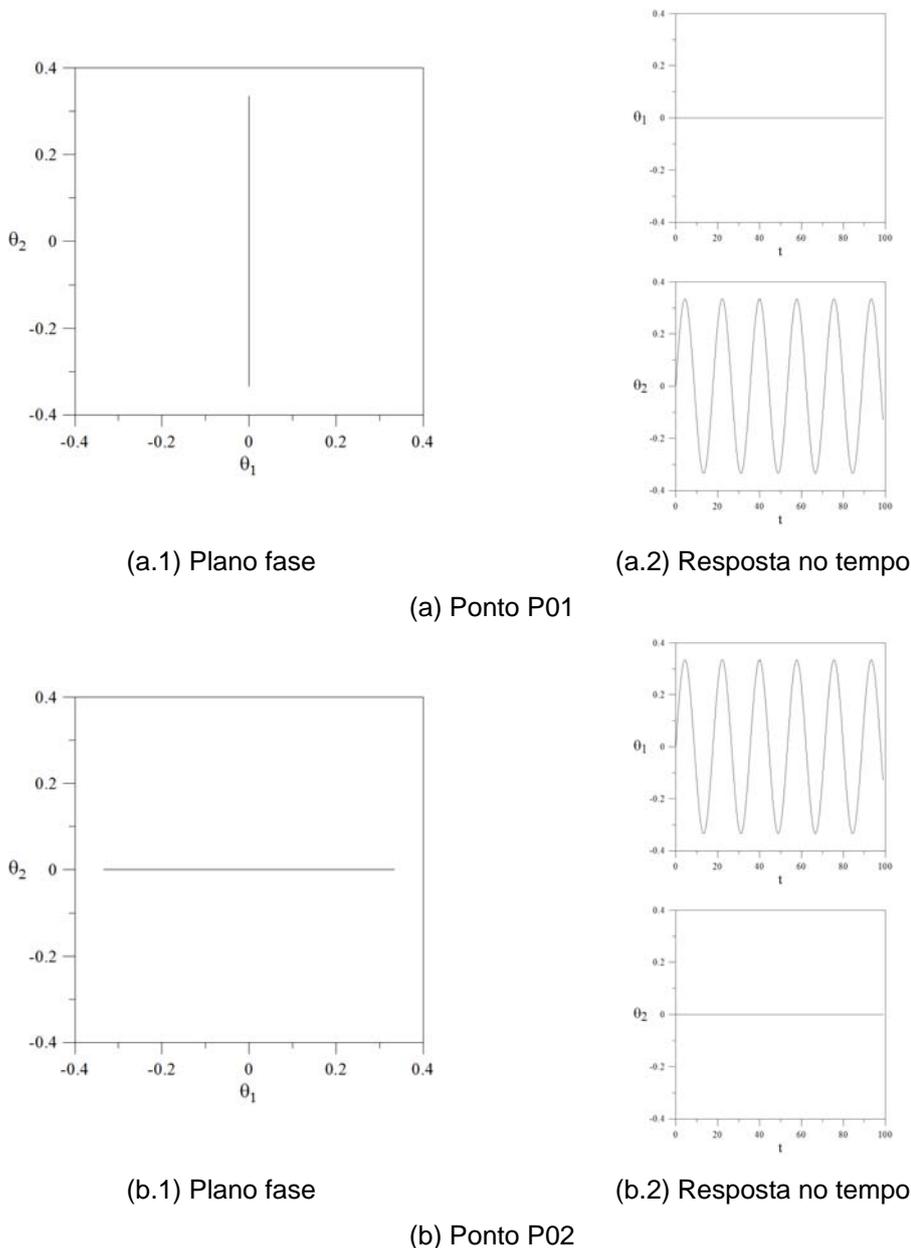


Figura 4.13: Comportamento no domínio do tempo dos pontos P01 e P02, para  $\omega_1 = \omega_2 = 1/3$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de Augusti perfeito.

Quando o nível de energia é nulo as seções de Poincaré nos planos  $\theta_1 \times d\theta_1/dt$  e  $\theta_2 \times d\theta_2/dt$  se reduzem a um ponto. O ponto  $(0.0, 0.0)$  na seção de Poincaré  $\theta_1 \times d\theta_1/dt$  representa o modo de vibração linear desacoplado no plano

$\theta_2 \times d\theta_2 / dt$  e o ponto (0.0, 0.0) na seção de Poincaré  $\theta_2 \times d\theta_2 / dt$  representa o modo de vibração linear desacoplado no plano  $\theta_1 \times d\theta_1 / dt$ .

Para níveis de energia baixos e médios verifica-se a existência de movimentos quase-periódicos representados pelas curvas fechadas em torno da origem, pontos P01 ( $\theta_1 = \dot{\theta}_1 = 0$ ) e P02 ( $\theta_2 = \dot{\theta}_2 = 0$ ), respectivamente Figuras 4.12(a) e 4.12(b), que, correspondem aos modos de vibração não-lineares desacoplados, respectivamente, no plano  $\theta_2 \times d\theta_2 / dt$ , Figura 4.13(a), e no plano  $\theta_1 \times d\theta_1 / dt$ , Figura 4.13(b), que emergem naturalmente dos modos lineares.

Contudo, verifica-se para níveis baixos e médios de energia o surgimento de duas selas e dois novos centros, que correspondem a quatro novos modos de vibração, dois instáveis e dois estáveis. Os dois modos estáveis (pontos P11 e P21 – Figura 4.12(b.1), e pontos P12 e P22 – Figura 4.12(b.2)) correspondem aos modos não-lineares que surgem do acoplamento modal, com o sistema vibrando com  $\theta_1$  e  $\theta_2$  em fase (P11 e P12) e com  $\theta_1$  e  $\theta_2$  fora de fase (pontos P21 e P22), como se pode verificar na Figura 4.14. Já as selas (pontos PS11 e PS21 – Figura 4.12(b.1), e PS12 e PS22 – Figura 4.12(b.2)) representam os dois modos acoplados de vibração instáveis que dividem os centros presentes nas seções de Poincaré. A nomenclatura Pij denota o ponto i da seção em  $\theta_j$ . Em virtude da simetria do modelo de Augusti perfeito, os modos não-lineares aparecem sempre aos pares e representam o mesmo tipo de oscilação.

O terceiro nível de energia corresponde ao nível de energia dos quatro pontos de sela, Figura 4.6(a), e é o maior nível de energia com significado para análise da estabilidade. Na Figura 4.12(c) uma grande complexidade dinâmica é observada no interior dessas regiões, com um conjunto difuso de pontos que indicam uma dinâmica caótica.

Na Figura 5.15 mostra-se o comportamento das seções de Poincaré para alguns pontos específicos, a saber: PS11, PQ11 e PC11. Como mencionado anteriormente o ponto PS11 representa um ponto de sela e sua seção de Poincaré é exatamente a fronteira que delimita as soluções estáveis. O ponto PQ11 representa o comportamento de um movimento quase-periódico em torno de um ponto fixo que corresponde a um modo de vibração e, por fim, o ponto PC11 mostra o comportamento para um ponto pertencente a uma região de caos. Como

observado na literatura sobre sistemas dinâmicos Hamiltonianos (Vakakis, 1991), o caos surge inicialmente na vizinhança de um ponto de sela e, aos poucos, vai preenchendo todo o espaço de fase à medida que cresce o nível de energia.

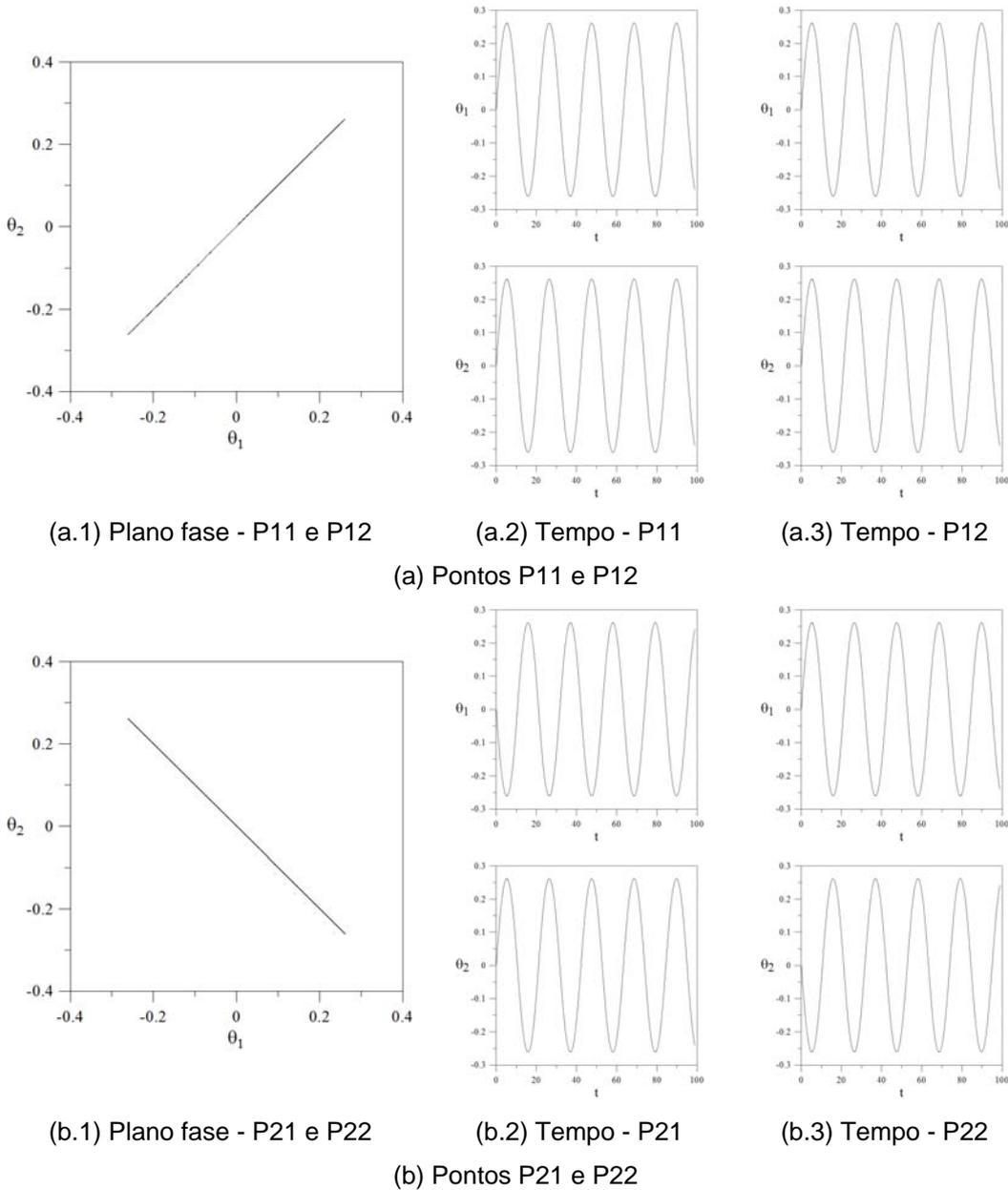


Figura 4.14: Comportamento no domínio do tempo dos pontos P11, P21, P12 e P22, para  $\omega_1 = \omega_2 = 1/3$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de Augusti perfeito.

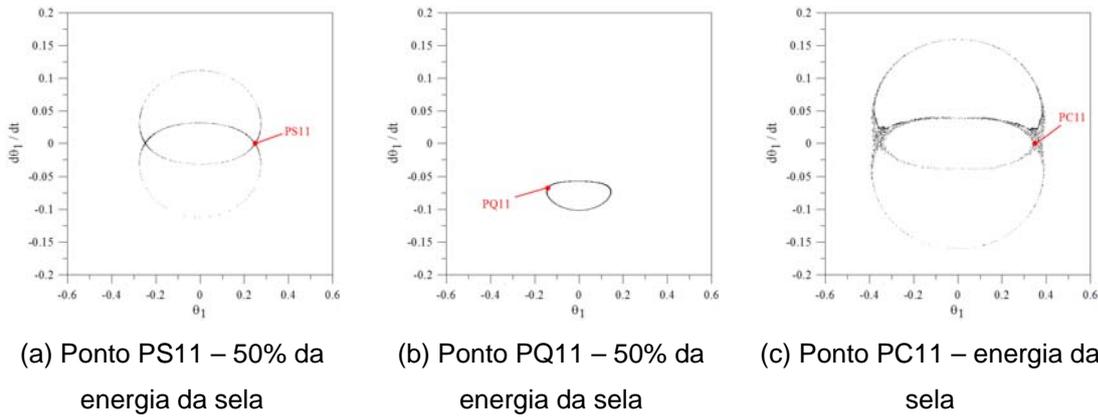


Figura 4.15: Seções de Poincaré dos pontos PS11, PQ11 e PC11, para  $\omega_1 = \omega_2 = 1/3$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de Augusti perfeito.

Os modos não-lineares, decorrentes dos pontos P11 (P12 é igual) e P21 (P22 é igual), que surgem devido ao acoplamento modal do sistema são similares, pois, como se verifica na Figura 4.14, tais modos apresentam uma relação linear entre as coordenadas  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . É importante observar que estes dois modos não-lineares estáveis estão contidos nos planos das variedades dos pontos de sela, Figuras 4.6(a) e 4.7(a).

Nesse contexto, verifica-se que o modelo de Augusti perfeito pode ser desacoplado em um dos planos das variedades dos pontos de sela, ou seja, pode-se representar o modelo perfeito através de um modelo reduzido com um grau de liberdade. Mas, para isso, faz-se necessário obter-se a função linear que representa o modo similar, expressão (4.23). Percebe-se que os pontos de sela que possuem os deslocamentos com sinais iguais localizam-se em uma diagonal a  $45^\circ$  do eixo  $\theta_1$  e que aqueles que possuem sinais opostos ficam sobre a diagonal de  $-45^\circ$  do eixo  $\theta_1$ . A partir dessa observação, pode-se aplicar uma mudança de coordenadas que permite obter as equações de movimento desacopladas, nos eixos auxiliares  $u$  e  $v$ , ou seja, as equações nos planos das variedades dos pontos de sela, como mostra a Figura 4.16.

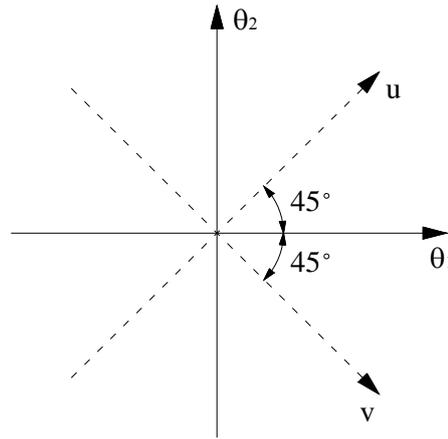


Figura 4.16: Coordenadas auxiliares, Modelo de Augusti perfeito.

Observando a Figura 4.16, pode-se deduzir que as funções lineares que representam os modos similares são:

$$\theta_1 = \frac{u}{\sqrt{2}}, \dot{\theta}_1 = \frac{\dot{u}}{\sqrt{2}}, \theta_2 = \frac{u}{\sqrt{2}} \text{ e } \dot{\theta}_2 = \frac{\dot{u}}{\sqrt{2}}, \text{ considerando } v = \dot{v} = 0. \quad (4.27a)$$

$$\theta_1 = \frac{v}{\sqrt{2}}, \dot{\theta}_1 = \frac{\dot{v}}{\sqrt{2}}, \theta_2 = \frac{-v}{\sqrt{2}} \text{ e } \dot{\theta}_2 = \frac{-\dot{v}}{\sqrt{2}}, \text{ considerando } u = \dot{u} = 0. \quad (4.27b)$$

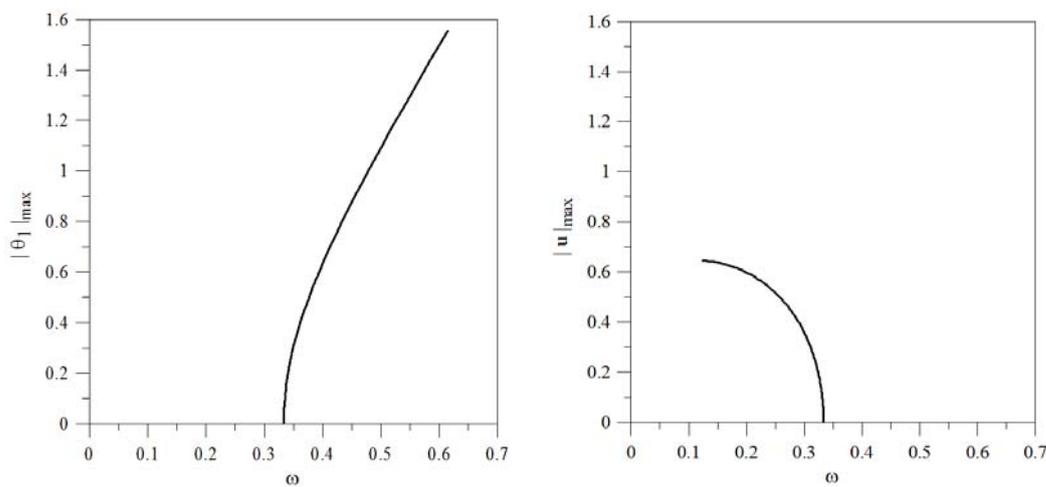
sendo que as expressões (4.27a) fornecem a equação de movimento desacoplada no plano  $u \times du/dt$  e as expressões (4.27b) fornecem a equação de movimento desacoplada no plano  $v \times dv/dt$ .

Assim, substituindo nas parcelas de energia do modelo de Augusti perfeito as expressões (4.27a), e adotando como coordenada generalizada  $u$ , obtém-se a equação de movimento desacoplada no plano  $u \times du/dt$ , a saber:

$$ml^2 \left( \left( \frac{1 + \cos(u\sqrt{2})}{2 \cos(u\sqrt{2})} \right) \ddot{u} + \frac{\sqrt{2} \text{sen}(u\sqrt{2})}{2 + 2 \cos(2u\sqrt{2})} \dot{u}^2 \right) + ku - Pl\sqrt{2} \frac{\text{sen}\left(\frac{u\sqrt{2}}{2}\right) \cos\left(\frac{u\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{1 - 2 \text{sen}^2\left(\frac{u\sqrt{2}}{2}\right)}} = 0 \quad (4.28)$$

De forma similar obtém-se a equação no plano  $v \times dv/dt$ .

Na Figura 4.17 apresentam-se as relações freqüência-amplitude para o modelo de Augusti perfeito. A Figura 4.17(a) mostra a relação não-linear, freqüência-amplitude, que representa o comportamento dos modos não-lineares desacoplados estáveis que surgem dos modos lineares (freqüência linear) e tornam-se não-lineares pelo movimento do sistema, sendo que tais modos apresentam um comportamento *hardening*, ou seja, com ganho de rigidez. O comportamento de  $\theta_2$  é igual ao de  $\theta_1$ . Já a Figura 4.17(b) apresenta a relação não-linear que representa o comportamento dos modos não-lineares similares estáveis que surgem devido ao acoplamento modal do sistema, onde se observa um comportamento *softening*, ou seja, com perda de rigidez. O comportamento de  $v$  é igual ao de  $u$ . Para o modelo perfeito tem-se ressonância interna 1:1, sendo neste exemplo  $\omega_1 = \omega_2 = 1/3$ . Todas as curvas têm início neste valor.



(a) Modo não-linear estável desacoplado para o modelo perfeito com 2GL

(b) Modo não-linear similar estável acoplado para o modelo perfeito com 1GL

Figura 4.17: Relações freqüência-amplitude para  $\omega_1 = \omega_2 = 1/3$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de Augusti perfeito.

Mostra-se na Figura 4.18 as relações freqüência-amplitude geradas pelos pontos de sela (PS11, PS21, PS12 e PS22). Observa-se que os pontos de sela são movimentos periódicos resultantes do acoplamento de dois modos de vibração, decorrente da ressonância interna do sistema. Neste caso, como mostram Jiang *et al.* (2005), o comportamento é bem mais complexo. Neste caso, a dedução da variedade invariante que contém este movimento deve ser obtida usando-se como sementes tantos pares de coordenadas deslocamento-velocidade quantos forem os

modos envolvidos na vibração (*multi-mode invariant manifold*). No presente caso, onde se observa a interação de dois modos, têm-se dois pares de coordenadas e a variedade invariante tem quatro dimensões. Neste caso cada coordenada pode apresentar uma relação frequência-amplitude diferente, bem como diferentes frequências de vibração. Essas relações foram obtidas através da determinação direta da relação frequência-amplitude pela resposta no tempo, tendo como condições iniciais as coordenadas dos pontos de sela da seção de Poincaré para níveis crescentes de energia. Como foram determinados poucos pontos as curvas dos modos instáveis são aproximadas. Estas relações poderiam também ser obtidas através do chamado *shooting method*, juntamente com técnicas de continuação (Silva, 2008).

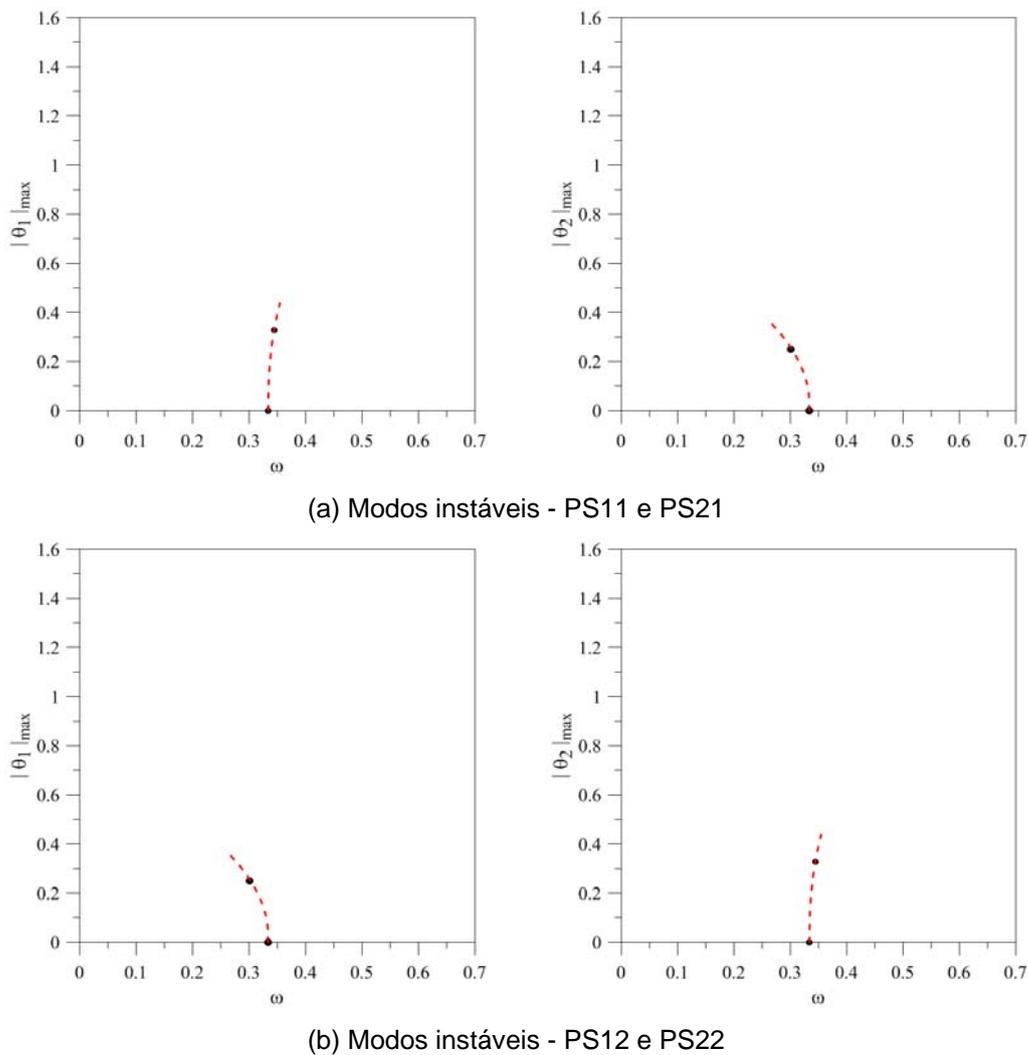


Figura 4.18: Relações frequência-amplitude dos modos acoplados instáveis dos pontos de sela PS11, PS21, PS12 e PS22, para  $\omega_1 = \omega_2 = 1/3$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de Augusti perfeito.

#### 4.1.4.2. Influência da Rigidez Relativa das Molas

Quando se considera a influência da rigidez relativa das molas,  $\phi = \psi = 0^\circ$  e  $\alpha \neq 1$ , tem-se que as condições iniciais  $\dot{\theta}_2$  e  $\dot{\theta}_1$ , referentes, respectivamente, aos pares iniciais  $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$  e  $(\theta_2, \dot{\theta}_2)$ , são dadas por:

$$\dot{\theta}_2 = \pm \left( -\dot{\theta}_1^2 - \frac{\alpha \omega_p^2}{\lambda} \theta_1^2 + 2\omega_p^2(1 - \cos \theta_1) + 2h \right)^{1/2} \quad (4.29a)$$

$$\dot{\theta}_1 = \pm \left( -\dot{\theta}_2^2 - \frac{\omega_p^2}{\lambda} \theta_2^2 + 2\omega_p^2(1 - \cos \theta_2) + 2h \right)^{1/2} \quad (4.29b)$$

e, com isso, tem-se que os limites dessas regiões são dados por:

$$h = \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 + \frac{\alpha \omega_p^2}{2\lambda} \theta_1^2 - \omega_p^2(1 - \cos \theta_1) \quad (4.30a)$$

$$h = \frac{1}{2} \dot{\theta}_2^2 + \frac{\omega_p^2}{2\lambda} \theta_2^2 - \omega_p^2(1 - \cos \theta_2) \quad (4.30b)$$

A Figura 4.19 mostra as seções de Poincaré para 5% da energia dos pontos de sela associados a essa situação, considerando  $\alpha = 1.3$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . A diferença de rigidez relativa entre as molas causa uma perda de simetria do sistema e, conseqüentemente, faz o sistema apresentar duas cargas críticas e duas frequências naturais distintas, ou seja, desaparece o acoplamento que gera os modos similares. Neste caso as frequências naturais são:  $\omega_1 = 1/3$  e  $\omega_2 = 2/3$ . Tem-se pois uma ressonância interna 1:2.

Para um nível de energia baixo verifica-se, como no modelo perfeito, a existência de movimentos quase-periódicos no entorno da origem, pontos P01 ( $\theta_1 = \dot{\theta}_1 = 0$ ) e P02 ( $\theta_2 = \dot{\theta}_2 = 0$ ), Figuras 4.19(a) e 4.19(b). O ponto P01 corresponde ao modo de vibração não-linear desacoplado no plano  $\theta_2 \times d\theta_2/dt$ , Figura 4.20(a), e o ponto P02 corresponde ao modo não-linear desacoplado no

plano  $\theta_1 \times d\theta_1/dt$ , Figura 4.20(b), ambos os modos emergem naturalmente dos modos lineares.

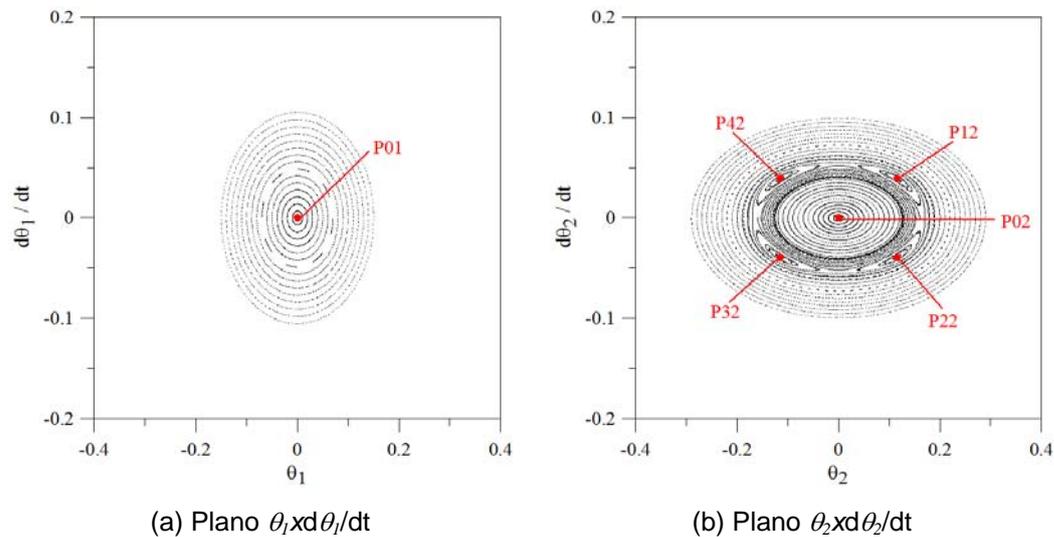


Figura 4.19: Seções de Poincaré com 5 % da energia do ponto de sela, para  $\alpha = 1.3$ ,  $\omega_1 = 1/3$ ,  $\omega_2 = 2/3$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de Augusti considerando a influência da rigidez relativa das molas.

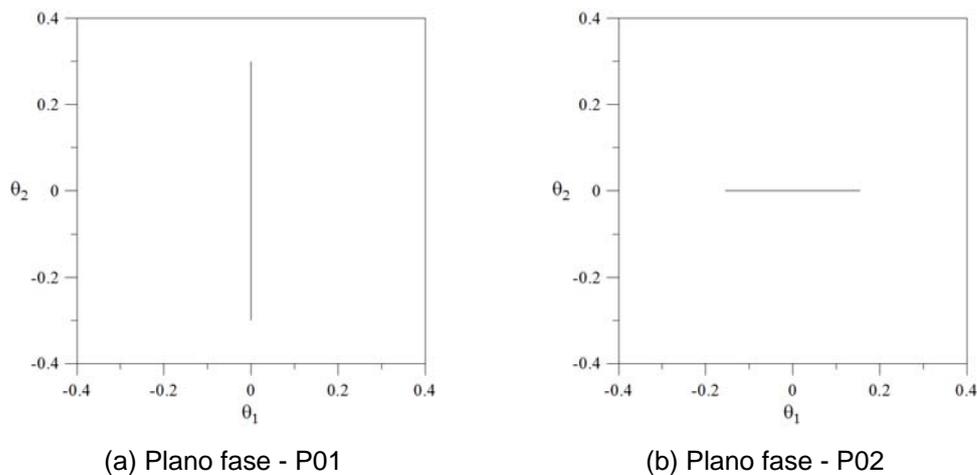


Figura 4.20: Comportamento no domínio do tempo dos pontos P01 e P02, para  $\alpha = 1.3$ ,  $\omega_1 = 1/3$ ,  $\omega_2 = 2/3$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de Augusti considerando a influência da rigidez relativa das molas.

Observando a Figura 4.19(b), verifica-se o surgimento de quatro selas e novos quatro centros, que se referem a novos modos de vibração: quatro modos estáveis (centros P12, P22, P32 e P42), que correspondem aos modos acoplados não-lineares que surgem do acoplamento modal, e quatro selas, que se referem aos modos acoplados instáveis. Para níveis mais altos de energia (acima de 50% do

nível de energia dos pontos de sela) o centro desaparece e toda a região delimitada pelo princípio de conservação de energia é tomada pelo caos, verificando-se uma grande complexidade dinâmica.

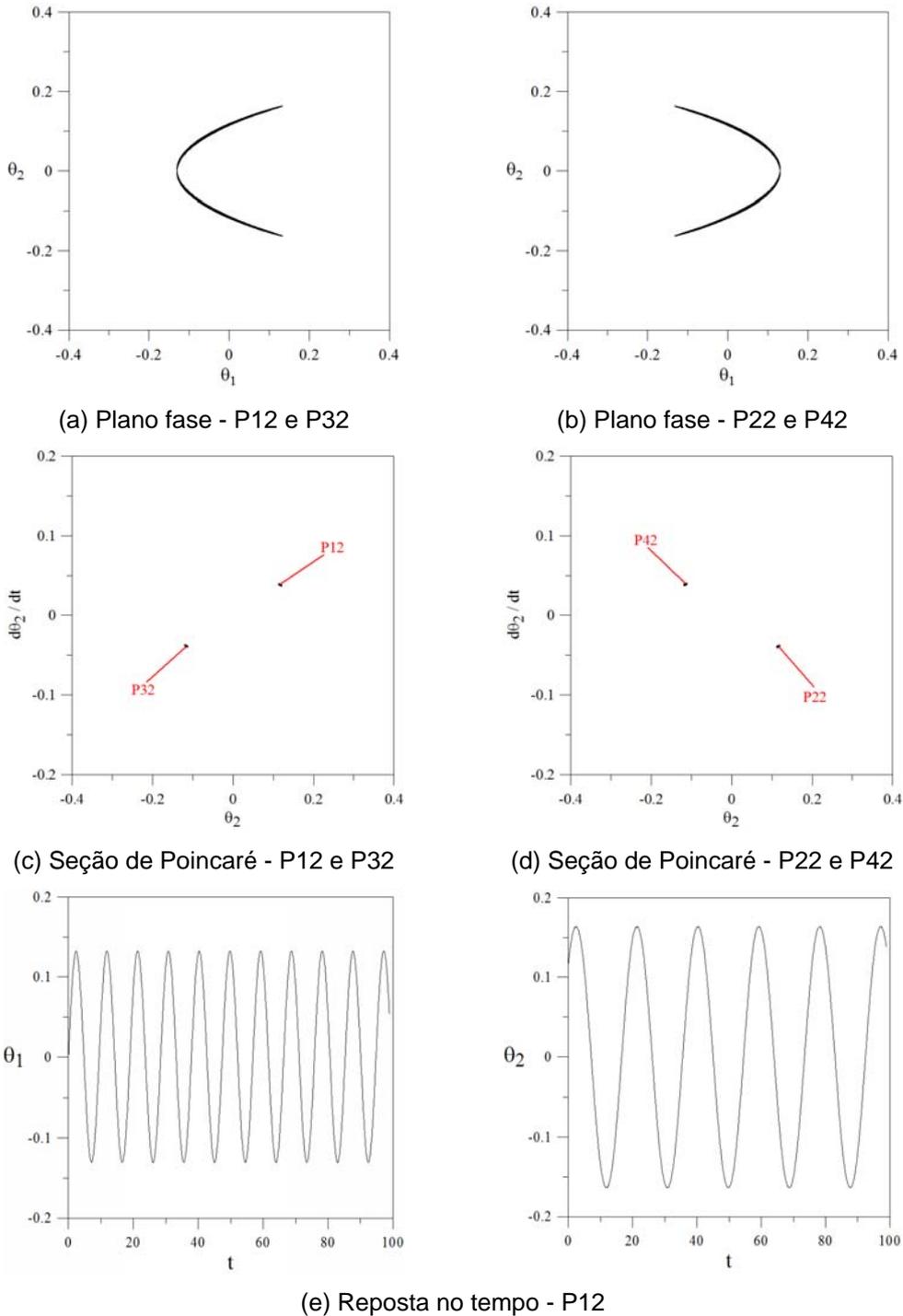


Figura 4.21: Comportamento dos pontos P12, P22, P32 e P42, para  $\alpha = 1.3$ ,  $\omega_1 = 1/3$ ,  $\omega_2 = 2/3$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de Augusti considerando a influência da rigidez relativa das molas.

Os modos não-lineares gerados pelos pontos P12, P22, P32 e P42 são acoplados, e, como se constata nas Figuras 4.21(a) e 4.21(b), exibem uma variação não-linear entre as coordenadas  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . Observa-se pelas Figuras 4.21(c) e 4.21(d) que os pontos P12 e P32 e os pontos P22 e P42 são soluções sub-harmônicas de ordem 2. A partir da resposta no tempo do ponto P12, Figura 4.21(e), verifica-se que a coordenada  $\theta_1$  vibra com a frequência  $\omega_2 = 2/3$  e a coordenada  $\theta_2$  vibra com a frequência  $\omega_1 = 1/3$ , o mesmo comportamento se observa para os pontos P22, P32 e P42. Neste caso o movimento periódico é regado pela ressonância 1:2, e o movimento ocorre em uma variedade invariante com quatro dimensões.

Apresentam-se na Figura 4.22 as relações frequência-amplitude para o modelo considerando a influência da rigidez relativa das molas. Verifica-se que as relações não-lineares, que representam o comportamento dos modos não-lineares desacoplados, apresentam um comportamento *hardening*, ou seja, ganho de rigidez. A pequena diferença no grau de não-linearidade entre os modos associados a  $\theta_1$  e  $\theta_2$  é devida à magnitude de  $\alpha$ . A relação frequência-amplitude associada à menor frequência ( $\omega_1 = 1/3$ ) permanece igual à do modelo perfeito, enquanto a relação associada a  $\omega_2 = 2/3$ , apresenta um menor grau de não-linearidade.

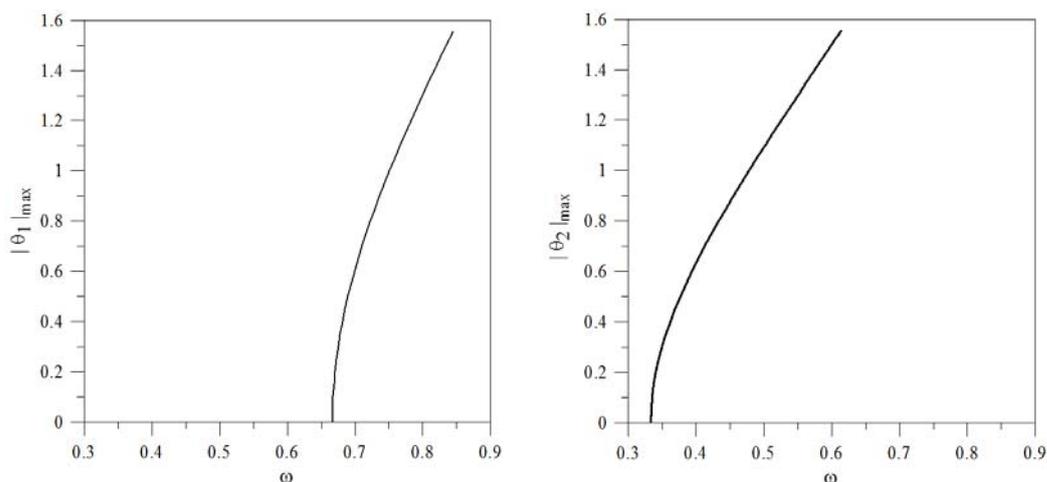


Figura 4.22: Relações frequência-amplitude dos modos não-lineares estáveis desacoplados, para  $\alpha = 1.3$ ,  $\omega_1 = 1/3$ ,  $\omega_2 = 2/3$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de Augusti considerando a influência da rigidez relativa das molas.

### 4.1.4.3.

#### Modelo com Imperfeição Geométrica

Quando se introduz a imperfeição geométrica deve-se partir das expressões (4.3) e (4.4), assim, tem-se que as condições iniciais  $\dot{\theta}_{D2}$  e  $\dot{\theta}_{D1}$ , correspondentes aos pares iniciais  $(\theta_{D1}, \dot{\theta}_{D1})$  e  $(\theta_{D2}, \dot{\theta}_{D2})$ , são dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{D2} = & \frac{-1 + \cos^2(\theta_{D1} + \theta_{est1}) + \cos^2(\theta_{est2})}{\cos^2(\theta_{D1} + \theta_{est1}) \cos^2(\theta_{est2})} \\ & \left( \frac{\cos(\theta_{D1} + \theta_{est1}) \text{sen}(\theta_{D1} + \theta_{est1}) \cos(\theta_{est2}) \text{sen}(\theta_{est2}) \dot{\theta}_{D1}}{-1 + \cos^2(\theta_{D1} + \theta_{est1}) + \cos^2(\theta_{est2})} \right. \\ & \pm \left\{ \frac{\cos^2(\theta_{D1} + \theta_{est1}) \text{sen}^2(\theta_{D1} + \theta_{est1}) \cos^2(\theta_{est2}) \text{sen}^2(\theta_{est2}) \dot{\theta}_{D1}^2}{(-1 + \cos^2(\theta_{D1} + \theta_{est1}) + \cos^2(\theta_{est2}))^2} \right. \\ & - \frac{2 \cos^2(\theta_{D1} + \theta_{est1}) \cos^2(\theta_{est2})}{-1 + \cos^2(\theta_{D1} + \theta_{est1}) + \cos^2(\theta_{est2})} \left( -h + \frac{1}{2} \cos^2(\theta_{D1} + \theta_{est1}) \dot{\theta}_{D1}^2 \right. \\ & + \frac{1}{2} \frac{\cos^2(\theta_{D1} + \theta_{est1}) \text{sen}^2(\theta_{D1} + \theta_{est1}) \dot{\theta}_1^2}{-1 + \cos^2(\theta_{D1} + \theta_{est1}) + \cos^2(\theta_{est2})} + \frac{\omega_p^2}{2\lambda} ((\theta_{D1} + \theta_{S1})^2 - \theta_{S1}^2) \\ & \left. \left. - \omega_p^2 \left( \sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta_{est1} - \text{sen}^2 \theta_{est2}} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \sqrt{1 - \text{sen}^2(\theta_{D1} + \theta_{est1}) - \text{sen}^2(\theta_{est2})} \right) \right) \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (4.31a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{D1} = & \frac{-1 + \cos^2(\theta_{est1}) + \cos^2(\theta_{D2} + \theta_{est2})}{\cos^2(\theta_{est1}) \cos^2(\theta_{D2} + \theta_{est2})} \\ & \left( \frac{\cos(\theta_{est1}) \text{sen}(\theta_{est1}) \cos(\theta_{D2} + \theta_{est2}) \text{sen}(\theta_{D2} + \theta_{est2}) \dot{\theta}_{D2}}{-1 + \cos^2(\theta_{est1}) + \cos^2(\theta_{D2} + \theta_{est2})} \right. \\ & \pm \left\{ \frac{\cos^2(\theta_{est1}) \text{sen}^2(\theta_{est1}) \cos^2(\theta_{D2} + \theta_{est2}) \text{sen}^2(\theta_{D2} + \theta_{est2}) \dot{\theta}_{D2}^2}{(-1 + \cos^2(\theta_{est1}) + \cos^2(\theta_{D2} + \theta_{est2}))^2} \right. \\ & - \frac{2 \cos^2(\theta_{est1}) \cos^2(\theta_{D2} + \theta_{est2})}{-1 + \cos^2(\theta_{est1}) + \cos^2(\theta_{D2} + \theta_{est2})} \left( -h + \frac{1}{2} \cos^2(\theta_{D2} + \theta_{est2}) \dot{\theta}_{D2}^2 \right. \\ & + \frac{1}{2} \frac{\cos^2(\theta_{D2} + \theta_{est2}) \text{sen}^2(\theta_{D2} + \theta_{est2}) \dot{\theta}_2^2}{-1 + \cos^2(\theta_{est1}) + \cos^2(\theta_{D2} + \theta_{est2})} + \frac{\omega_p^2}{2\lambda} ((\theta_{D2} + \theta_{S2})^2 - \theta_{S2}^2) \\ & \left. \left. - \omega_p^2 \left( \sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta_{est1} - \text{sen}^2 \theta_{est2}} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \sqrt{1 - \text{sen}^2(\theta_{est1}) - \text{sen}^2(\theta_{D2} + \theta_{est2})} \right) \right) \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (4.31b)$$

As seções de Poincaré são delimitadas por:

$$\begin{aligned}
 h = & \frac{1}{2} \cos^2(\theta_{D1} + \theta_{est1}) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\cos^2(\theta_{D1} + \theta_{est1}) \sin^2(\theta_{D1} + \theta_{est1}) \dot{\theta}_{D1}^2}{-1 + \cos^2(\theta_{D1} + \theta_{est1}) + \cos^2 \theta_{est2}} \\
 & + \frac{\omega_p^2}{2\lambda} \left( (\theta_{D1} + \theta_{S1})^2 - \theta_{S1}^2 \right) - \omega_p^2 \left( \sqrt{1 - \sin^2 \theta_{est1} - \sin^2 \theta_{est2}} \right. \\
 & \left. - \sqrt{1 - \sin^2(\theta_{D1} + \theta_{est1}) - \sin^2(\theta_{est2})} \right)
 \end{aligned} \tag{4.32a}$$

$$\begin{aligned}
 h = & \frac{1}{2} \cos^2(\theta_{D2} + \theta_{est2}) \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} \frac{\cos^2(\theta_{D2} + \theta_{est2}) \sin^2(\theta_{D2} + \theta_{est2}) \dot{\theta}_{D2}^2}{-1 + \cos^2(\theta_{est1}) + \cos^2(\theta_{D2} + \theta_{est2})} \\
 & + \frac{\omega_p^2}{2\lambda} \left( (\theta_{D2} + \theta_{S2})^2 - \theta_{S2}^2 \right) - \omega_p^2 \left( \sqrt{1 - \sin^2 \theta_{est1} - \sin^2 \theta_{est2}} \right. \\
 & \left. - \sqrt{1 - \sin^2(\theta_{est1}) - \sin^2(\theta_{D2} + \theta_{est2})} \right)
 \end{aligned} \tag{4.32b}$$

As seções de Poincaré para diferentes níveis de energia, considerando  $\psi = 0^\circ$ ,  $\phi = 1^\circ$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ , são apresentadas na Figura 4.23. Neste caso as frequências naturais são:  $\omega_1 = 0.311$  e  $\omega_2 = 0.353$ . Verifica-se, quando se observa a seção de Poincaré 4.23(a) considerando 20% da energia dos respectivos pontos de sela, a existência do ponto P01 no plano  $\theta_{D1} \times d\theta_{D1}/dt$ , que representa um modo acoplado estável. Neste caso, as coordenadas  $\theta_{D1}$  e  $\theta_{D2}$  vibram com diferentes frequências, sendo a frequência  $\theta_{D1}$  aproximadamente igual ao dobro da frequência de  $\theta_{D2}$ . O plano de fase da resposta para 20% da energia do ponto de sela é mostrado na Figura 4.24(a). Este modo surge da presença da imperfeição inicial  $\phi = 1^\circ$  na direção de  $\theta_1$  ( $\psi = 0^\circ$ ), e converge para o modo desacoplado no plano  $\theta_{D2} \times d\theta_{D2}/dt$  quando  $\phi \rightarrow 0$ . Na seção de Poincaré no plano  $\theta_{D2} \times d\theta_{D2}/dt$  observa-se a existência do ponto P02, que representa o modo não-linear desacoplado estável no plano  $\theta_{D1} \times d\theta_{D1}/dt$ , proveniente do modo linear em virtude do fato de  $\psi = 0^\circ$ , como mostra as Figuras 4.24(b).

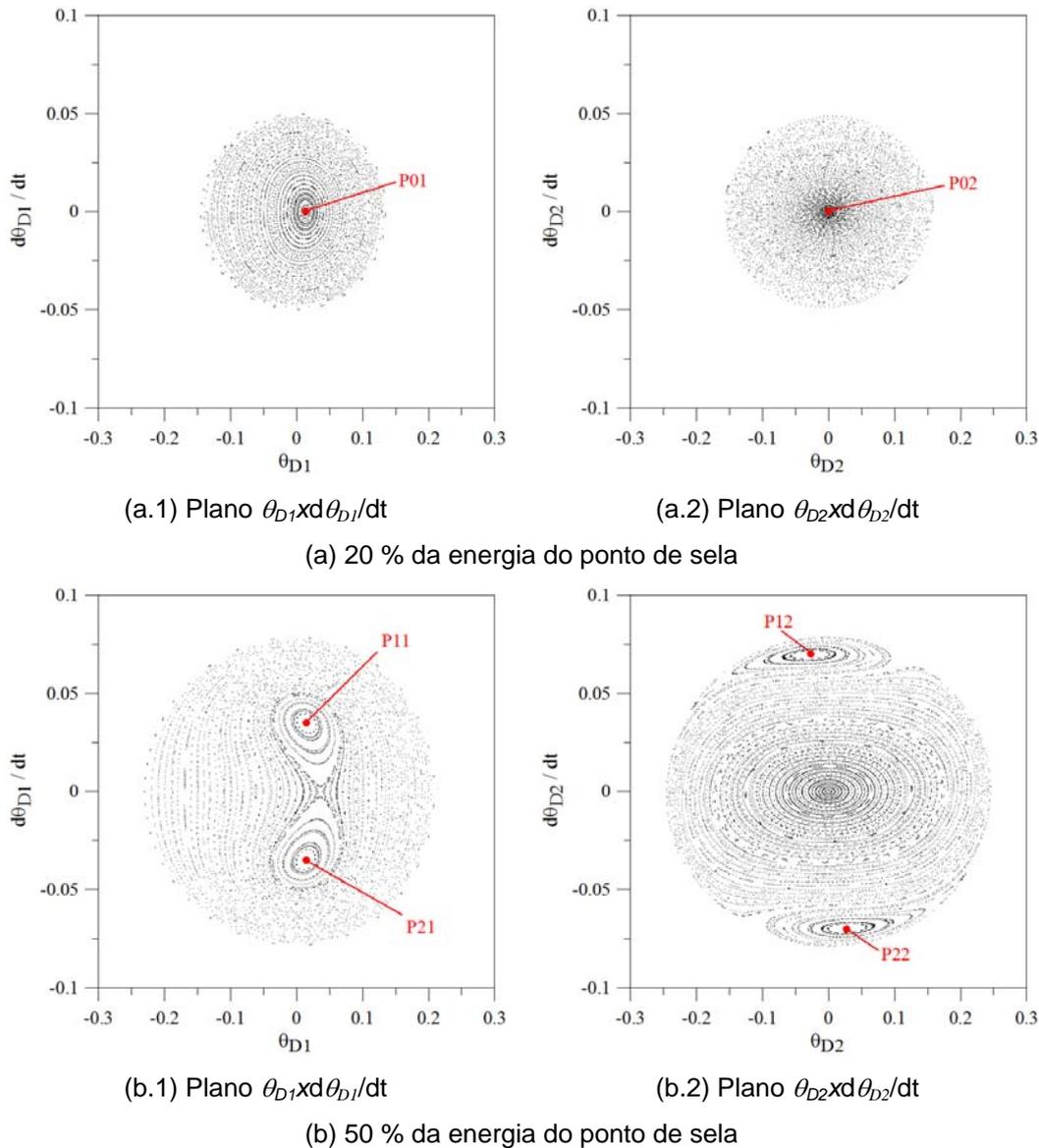


Figura 4.23: Seções de Poincaré para  $\psi = 0^\circ$ ,  $\phi = 1^\circ$ ,  $\omega_1 = 0.311$ ,  $\omega_2 = 0.353$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de Augusti com imperfeição geométrica.

Para 50% da energia do ponto de sela, Figura 4.23(b.1), observa-se o surgimento de uma sela e dois centros (modos acoplados, P11 e P21). A sela surge de uma bifurcação *pitchfork* Hamiltoniana do modo acoplado P01, dando origem aos dois modos acoplados P11 e P21. Na seção de Poincaré do plano  $\theta_{D2} \times d\theta_{D2}/dt$  verifica-se que o modo não-linear desacoplado P02 continua estável para esse nível de energia e que as duas novas soluções presentes, P12 e P22, se referem aos modos acoplados P11 e P21, oriundos da bifurcação de P01.

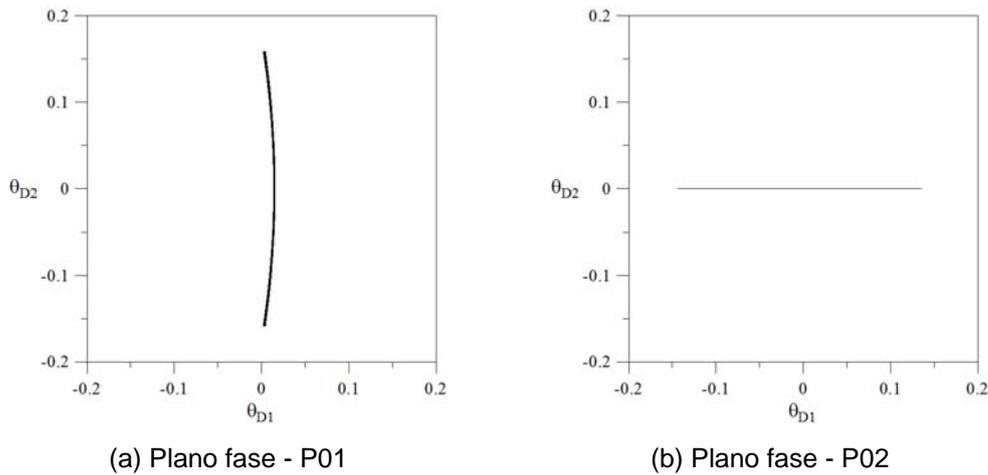


Figura 4.24: Comportamento no domínio do tempo dos pontos P01 e P02, para  $\psi = 0^\circ$ ,  $\phi = 1^\circ$ ,  $\omega_1 = 0.311$ ,  $\omega_2 = 0.353$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de Augusti com imperfeição geométrica.

As Figuras 4.25 e 4.26 mostram as relações frequência-amplitude para o modelo com imperfeição geométrica, considerando  $\psi = 0^\circ$ ,  $\phi = 1^\circ$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Verifica-se na Figura 4.25 que o modo não-linear desacoplado no plano  $\theta_{D1} \times d\theta_{D1}/dt$ , proveniente do ponto P02, apresenta um comportamento *hardening*. Este modo está associado à frequência natural  $\omega_2 = 0.353$ . A Figura 4.26 mostra o comportamento do modo não-linear acoplado referente ao ponto P01. Verifica-se que o comportamento é do tipo *hardening* e que a relação entre a coordenada  $\theta_{D1}$  e a coordenada  $\theta_{D2}$  apresenta uma grande não-linearidade.

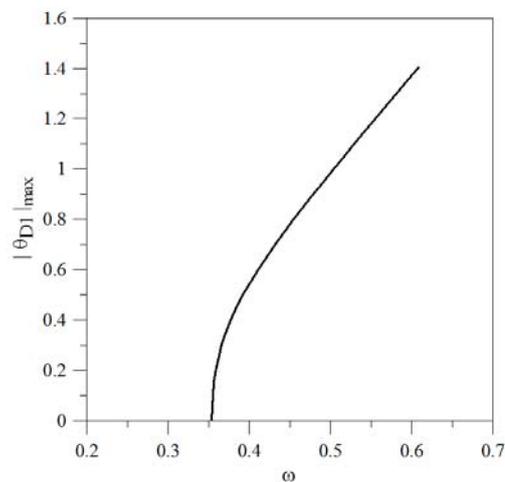


Figura 4.25: Relação frequência-amplitude do modo não-linear estável desacoplado no plano  $\theta_{D1} \times d\theta_{D1}/dt$ , para  $\psi = 0^\circ$ ,  $\phi = 1^\circ$ ,  $\omega_1 = 0.311$ ,  $\omega_2 = 0.353$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de Augusti com imperfeição geométrica.

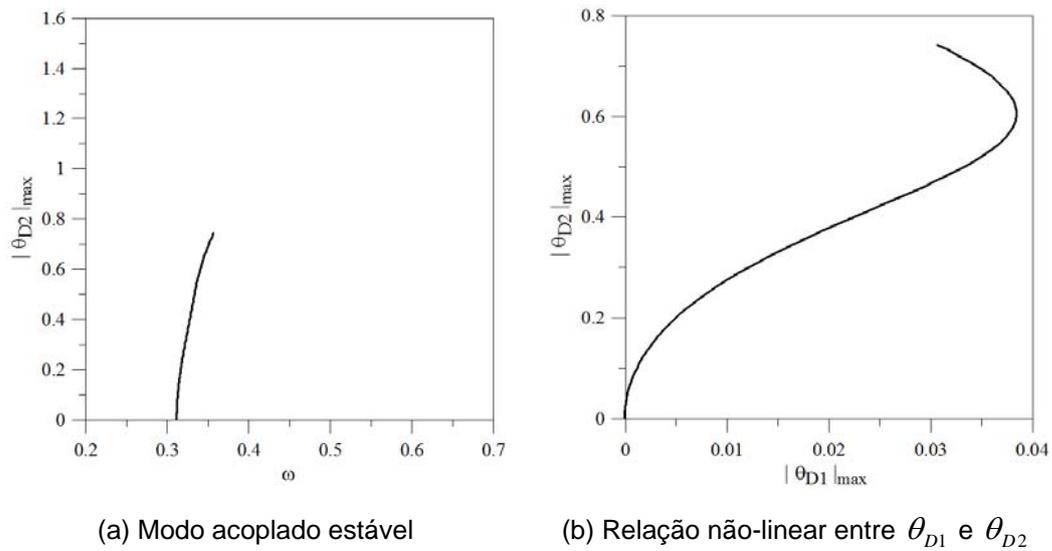


Figura 4.26: Relação freqüência-amplitude do modo acoplado estável do ponto P01, para  $\psi = 0^\circ$ ,  $\phi = 1^\circ$ ,  $\omega_1 = 0.311$ ,  $\omega_2 = 0.353$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de Augusti com imperfeição geométrica.

Na Figura 4.27 mostram-se as seções de Poincaré para uma imperfeição geométrica inicial com  $\psi = 45^\circ$  e  $\phi = 1^\circ$ , considerando 50% da energia do respectivo ponto sela. Nessa situação o sistema não apresenta nenhum modo não-linear desacoplado. Neste caso tem-se que  $\omega_1 = 0.302$  e  $\omega_2 = 0.361$ .

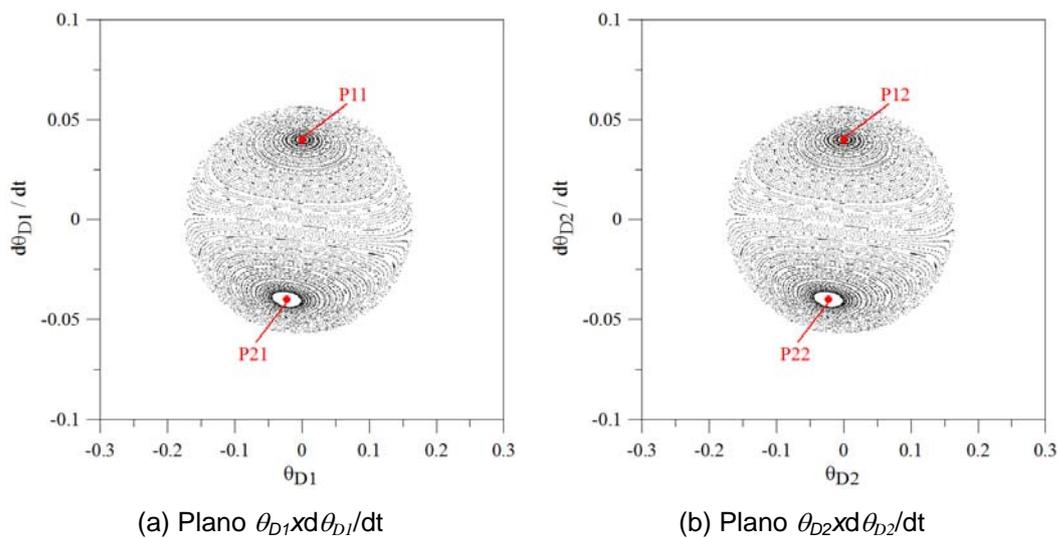


Figura 4.27: Seções de Poincaré com 50 % da energia do ponto de sela, para  $\psi = 45^\circ$ ,  $\phi = 1^\circ$ ,  $\omega_1 = 0.302$ ,  $\omega_2 = 0.361$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de Augusti com imperfeição geométrica.

Para este nível de energia e em níveis inferiores verifica-se a existência de dois centros, que correspondem a dois modos estáveis, P11 e P21 (Figura 4.27(a)), e P12 e P22 (Figura 4.27(b)). Os modos estáveis correspondem aos modos normais não-lineares que ocorrem devido ao acoplamento modal com o sistema vibrando com  $\theta_{D1}$  e  $\theta_{D2}$  em fase, pontos P11 e P12 – Figura 4.29(a), e com  $\theta_{D1}$  e  $\theta_{D2}$  fora de fase, pontos P21 e P22 – Figura 4.29(b).

A sela que divide as soluções P11 e P21 na seção de Poincaré do plano  $\theta_{D1} \times d\theta_{D1}/dt$  e as soluções P12 e P22 na seção de Poincaré do plano  $\theta_{D2} \times d\theta_{D2}/dt$  pode ser observada na seção de Poincaré do plano  $\theta_{D1} \times \theta_{D2}$ , Figura 4.28. Para esta seção se considera  $\Pi = \{\dot{\theta}_1 = 0\}$  com  $\Sigma = \{\dot{\theta}_1 = 0, \dot{\theta}_2 > 0\} \cap \{H = h\}$ . O ponto PS1 refere-se à sela que divide os pontos P1, P2, P3 e P4 que são referentes aos quatro centros presentes na Figura 4.27, ou seja, os pontos P11, P21, P21 e P22 (há uma sela similar na seção oposta, as duas selas são conectadas por quatro órbitas heteroclínicas). Para níveis superiores de energia verifica-se uma grande complexidade dinâmica, com um conjunto difuso de pontos que indicam uma dinâmica caótica.

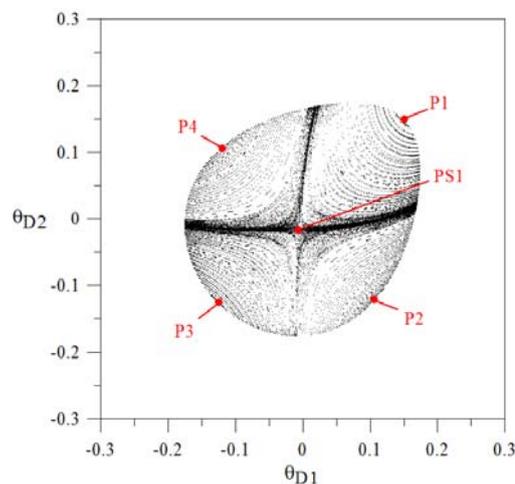


Figura 4.28: Seção de Poincaré com 50 % da energia do ponto de sela no plano  $\theta_{D1} \times \theta_{D2}$ , para  $\psi = 45^\circ$ ,  $\phi = 1^\circ$ ,  $\omega_1 = 0.302$ ,  $\omega_2 = 0.361$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de Augusti com imperfeição geométrica.

O modo não-linear denotado pelos pontos P11 (Figura 4.27(a)) e P12 (Figura 4.27(b)) é similar como se observa na Figura 4.29(a), ou seja, possui uma variação linear no plano dos deslocamentos, sendo este o plano das variedades

invariantes do ponto sela, Figura 4.11(a). Já o modo não-linear associado aos P21 e P22 é não-similar, como se verifica na Figura 4.29(b). Este modo provém do modo similar do modelo perfeito apresentado na Figura 4.14(b.1), e converge para este modo quando  $\phi \rightarrow 0$ .

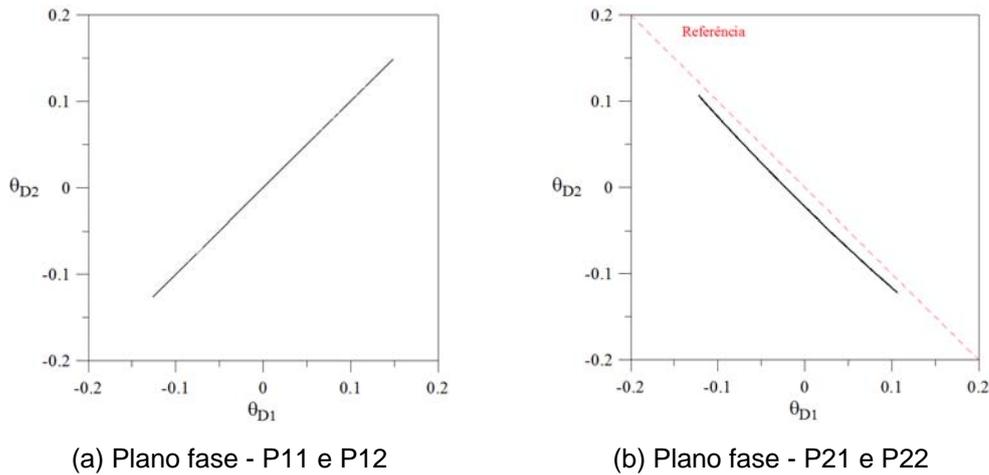


Figura 4.29: Comportamento no domínio do tempo dos pontos P11, P21, P12 e P22, para  $\psi = 45^\circ$ ,  $\phi = 1^\circ$ ,  $\omega_1 = 0.302$ ,  $\omega_2 = 0.361$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de Augusti com imperfeição geométrica.

Partindo-se das constatações anteriores, tem-se que o modelo de Augusti com imperfeição geométrica, considerando  $\psi = 45^\circ$ , pode ser desacoplado no plano relativo ao modo similar (plano que contém a imperfeição), ou seja, pode ser reduzido a um modelo de 1 grau de liberdade. Mas, para isso, faz-se necessário obter a função linear que representa o modo similar, expressão (4.23). Percebe-se que o ponto de sela e suas variedades, Figura 4.6(a), estão localizadas em uma diagonal a  $45^\circ$  do eixo  $\theta_1$ . Assim, pode-se aplicar uma mudança de coordenadas que permite obter a equação de movimento desacoplada no plano auxiliar  $u \times du/dt$ , como mostra a Figura 4.30.

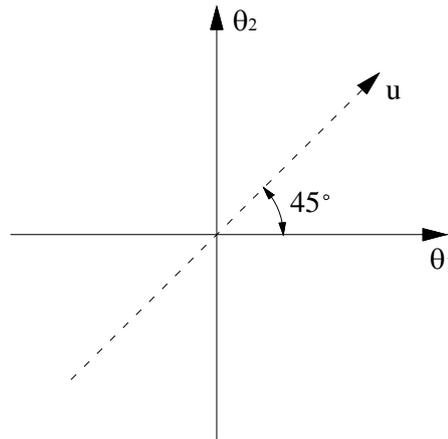


Figura 4.30: Coordenadas auxiliares considerando  $\psi = 45^\circ$ . Modelo de Augusti com imperfeição geométrica.

Observando a Figura 4.30, pode-se deduzir que as funções lineares que representam o modo similar são:

$$\theta_1 = \frac{u}{\sqrt{2}}, \dot{\theta}_1 = \frac{\dot{u}}{\sqrt{2}}, \theta_2 = \frac{u}{\sqrt{2}} \text{ e } \dot{\theta}_2 = \frac{\dot{u}}{\sqrt{2}} \quad (4.33a)$$

$$\theta_{est1} = \frac{u_{est}}{\sqrt{2}}, \theta_{est2} = \frac{u_{est}}{\sqrt{2}}, \theta_{s1} = \frac{u_s}{\sqrt{2}}, \theta_{s2} = \frac{u_s}{\sqrt{2}}, \phi_1 = \frac{u_{10}}{\sqrt{2}} \text{ e } \phi_2 = \frac{u_{10}}{\sqrt{2}} \quad (4.33b)$$

Assim, substituindo nas parcelas de energia do modelo de Augusti com imperfeição geométrica, referência original, às expressões (4.33a), e adotando como coordenada generalizada  $u$ , obtém-se a equação de movimento desacoplada no plano  $u \times du/dt$ , a saber:

$$ml^2 \left( \left( \frac{1 + \cos(u\sqrt{2})}{2 \cos(u\sqrt{2})} \right) \ddot{u} + \frac{\sqrt{2} \operatorname{sen}(u\sqrt{2})}{2 + 2 \cos(2u\sqrt{2})} \dot{u}^2 \right) + k(u - u_{10}) - Pl\sqrt{2} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{u\sqrt{2}}{2}\right) \cos\left(\frac{u\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{1 - 2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{u\sqrt{2}}{2}\right)}} = 0 \quad (4.34)$$

Para se obter a equação de movimento desacoplada tendo como referência a configuração de equilíbrio estático do sistema imperfeito, devem-se substituir as relações (4.33b) juntamente com as relações

$$\theta_{D1} = \frac{u_D}{\sqrt{2}}, \dot{\theta}_{D1} = \frac{\dot{u}_D}{\sqrt{2}}, \theta_{D2} = \frac{u_D}{\sqrt{2}} \text{ e } \dot{\theta}_{D2} = \frac{\dot{u}_D}{\sqrt{2}} \quad (4.35)$$

nas parcelas de energia do modelo de Augusti com imperfeição geométrica e, adotando como coordenada generalizada  $u_D$ , obter a equação de movimento desacoplada no plano  $u_D \times du_D / dt$ .

A Figura 4.31 apresenta a relação frequência-amplitude relativa ao modo não-linear não-similar estável (pontos P21 e P22). Verifica-se que devido à simetria do sistema as coordenadas  $\theta_{D1}$  e  $\theta_{D2}$  mostram o mesmo comportamento, ou seja, estão oscilando com a mesma frequência. Este modo está associado à frequência natural  $\omega_2 = 0.361$ .

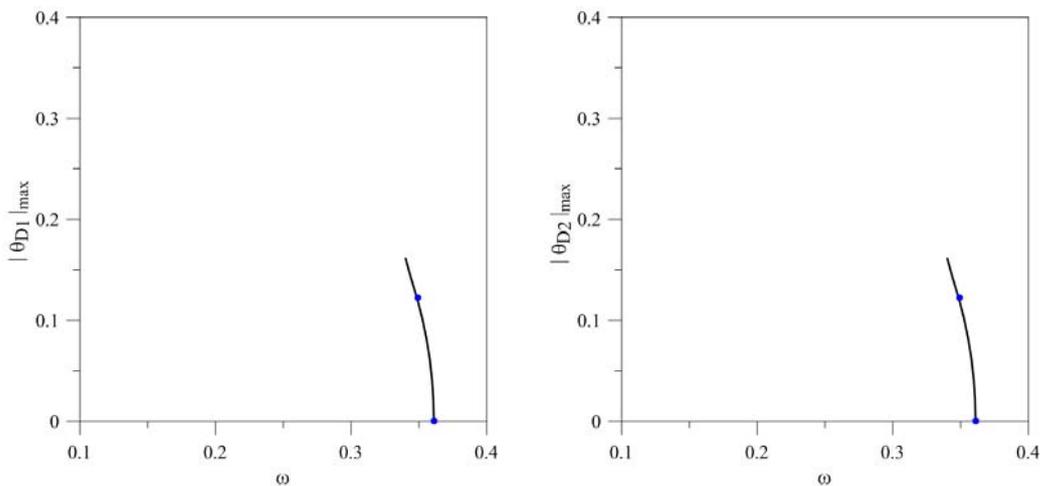


Figura 4.31: Relações frequência-amplitude dos modos não-lineares não-similares estáveis acoplados dos pontos P21 e P12, para  $\psi = 45^\circ$ ,  $\phi = 1^\circ$ ,  $\omega_1 = 0.302$ ,  $\omega_2 = 0.361$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de Augusti com imperfeição geométrica.

A Figura 4.32 mostra a relação não-linear frequência-amplitude que representa o comportamento do modo não-linear similar que surge no devido ao acoplamento modal do sistema (pontos P11 e P12), obtida a partir do modelo com 1GL, expressão (4.34). Ambos os modos apresentam um comportamento

*softening*, em concordância com o sistema perfeito, Figura 4.17(b). Este modo está associado à frequência natural  $\omega_1 = 0.302$ .

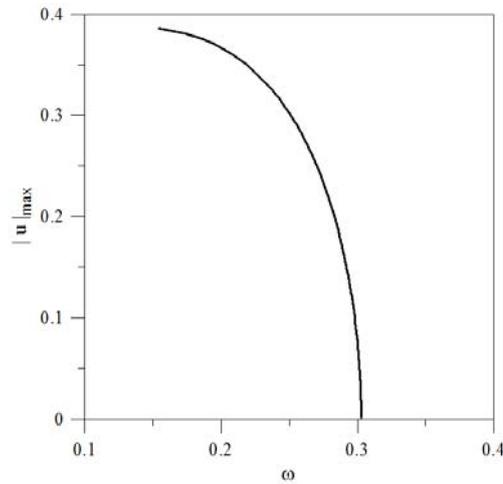


Figura 4.32: Relação frequência-amplitude dos modos não-lineares similares estáveis acoplados dos pontos P11 e P12, para  $\psi = 45^\circ$ ,  $\phi = 1^\circ$ ,  $\omega_1 = 0.302$ ,  $\omega_2 = 0.361$ ,  $\lambda = 0.9$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de Augusti com imperfeição geométrica.

## 4.2. Modelo de Torre Estaiada

Partindo das equações (2.15), assumindo que  $\ddot{u}_b = \ddot{v}_b = 0$  e que as constantes de amortecimento são nulas, têm-se as equações de movimento, em termos das coordenadas generalizadas  $u_1$  e  $u_2$ , que regem o comportamento do modelo de torre estaiada apresentadas na seqüência. Considera-se que  $k_2 = k_3$ ,  $k_2 = \nu K$  e  $k_1 = (1 - 2\nu)K$ . As equações estão adimensionalizadas em função da carga crítica do sistema perfeito,  $P_{cr} = Kl/4$ . Além disso, adotam-se as variáveis auxiliares:  $\nu = \alpha/4\text{sen}^2\beta$ ,  $\lambda = P/P_{cr}$ ,  $P = mg$ ,  $\alpha = k_1/k_2$ ,  $K/ml^2 = \omega_p^2/\lambda$  e  $\omega_p^2 = g/l$ .

$$\begin{aligned}
& \ddot{u}_1(1-u_1^2-2u_2^2+u_1^2u_2^2+u_2^4)+\ddot{u}_2(u_1u_2-u_1^3u_2-u_1u_2^3) \\
& +\dot{u}_1^2(u_1-u_1u_2^2)+\dot{u}_2^2(u_1-u_1^3)+2u_1^2u_2\dot{u}_1\dot{u}_2+\left[\frac{\alpha\omega_p^2}{\lambda\text{sen}\beta}\left\{\right. \right. \\
& \left. \left. \left(\left(\sqrt{(\text{sen}\beta-u_{10})^2+(\cos\beta-u_{20})^2+1-u_{10}^2-u_{20}^2}\right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. -\sqrt{(\text{sen}\beta-u_1)^2+(\cos\beta-u_2)^2+1-u_1^2-u_2^2}\right)\right)/ \right. \\
& \left. \sqrt{(\text{sen}\beta-u_1)^2+(\cos\beta-u_2)^2+1-u_1^2-u_2^2}\right) \\
& -\left(\left(\sqrt{(-\text{sen}\beta-u_{10})^2+(\cos\beta-u_{20})^2+1-u_{10}^2-u_{20}^2}\right. \right. \\
& \left. \left. -\sqrt{(-\text{sen}\beta-u_1)^2+(\cos\beta-u_2)^2+1-u_1^2-u_2^2}\right)\right)/ \\
& \left. \sqrt{(-\text{sen}\beta-u_1)^2+(\cos\beta-u_2)^2+1-u_1^2-u_2^2}\right)\left. \right\} \\
& \left. -\frac{u_1\omega_p^2}{\sqrt{1-u_1^2-u_2^2}}\right](-1+u_1^2+u_2^2)^2=0
\end{aligned} \tag{4.36a}$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{u}_2(1-u_2^2-2u_1^2+u_1^2u_2^2+u_1^4)+\ddot{u}_1(u_1u_2-u_1^3u_2-u_1u_2^3) \\
& +\dot{u}_2^2(u_2-u_1^2u_2)+\dot{u}_1^2(u_2-u_2^3)+2u_1u_2^2\dot{u}_1\dot{u}_2+\left[\frac{\alpha\omega_p^2\cos\beta}{\lambda\text{sen}^2\beta}\left\{\right. \right. \\
& \left. \left. \left(\left(\sqrt{(\text{sen}\beta-u_{10})^2+(\cos\beta-u_{20})^2+1-u_{10}^2-u_{20}^2}\right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. -\sqrt{(\text{sen}\beta-u_1)^2+(\cos\beta-u_2)^2+1-u_1^2-u_2^2}\right)\right)/ \right. \\
& \left. \sqrt{(\text{sen}\beta-u_1)^2+(\cos\beta-u_2)^2+1-u_1^2-u_2^2}\right) \\
& -\left(\left(\sqrt{(-\text{sen}\beta-u_{10})^2+(\cos\beta-u_{20})^2+1-u_{10}^2-u_{20}^2}\right. \right. \\
& \left. \left. -\sqrt{(-\text{sen}\beta-u_1)^2+(\cos\beta-u_2)^2+1-u_1^2-u_2^2}\right)\right)/ \\
& \left. \sqrt{(-\text{sen}\beta-u_1)^2+(\cos\beta-u_2)^2+1-u_1^2-u_2^2}\right)\left. \right\} \\
& +\frac{4\omega_p^2(\sqrt{2-2u_{20}}-\sqrt{2-2u_2})}{\lambda\sqrt{2-2u_2}}-\frac{2\alpha\omega_p^2(\sqrt{2-2u_{20}}-\sqrt{2-2u_2})}{\lambda\text{sen}^2\beta\sqrt{2-2u_2}} \\
& \left. -\frac{u_2\omega_p^2}{\sqrt{1-u_1^2-u_2^2}}\right](-1+u_1^2+u_2^2)^2=0
\end{aligned} \tag{4.36b}$$

### 4.2.1. Frequências Naturais

Como no modelo anterior, para se obter as frequências naturais é necessário utilizar como referência a configuração de equilíbrio estático do sistema imperfeito, tomando-se como coordenadas generalizadas os deslocamentos dinâmicos,  $u_{Di}$ .

Assim, pode-se definir em termos das variáveis do problema:

$$\text{Rotação estática} \rightarrow u_{est1} = u_{10}\sqrt{1-u_{S1}^2} + u_{S1}\sqrt{1-u_{10}^2} \text{ e} \quad (4.37a)$$

$$u_{est2} = u_{20}\sqrt{1-u_{S2}^2} + u_{S2}\sqrt{1-u_{20}^2}$$

$$\text{Rotação total} \rightarrow u_{T1} = u_{est1}\sqrt{1-u_{D1}^2} + u_{D1}\sqrt{1-u_{est1}^2} \text{ e} \quad (4.37b)$$

$$u_{T2} = u_{est2}\sqrt{1-u_{D2}^2} + u_{D2}\sqrt{1-u_{est2}^2}$$

onde  $u_{S1}$  e  $u_{S2}$  são as deformações estáticas, e  $u_{D1}$  e  $u_{D2}$  são as deformações dinâmicas.

A parcela de energia cinética é dada por

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2}ml^2 \left( \left( \dot{u}_{D1}\sqrt{1-u_{est1}^2} - \frac{u_{est1}u_{D1}\dot{u}_{D1}}{\sqrt{1-u_{D1}^2}} \right)^2 + \left( \dot{u}_{D2}\sqrt{1-u_{est2}^2} - \frac{u_{est2}u_{D2}\dot{u}_{D2}}{\sqrt{1-u_{D2}^2}} \right)^2 \right. \\ & - \left( \left( u_{D1}\sqrt{1-u_{est1}^2} + u_{est1}\sqrt{1-u_{D1}^2} \right) \left( \dot{u}_{D1}\sqrt{1-u_{est1}^2} - \frac{u_{est1}u_{D1}\dot{u}_{D1}}{\sqrt{1-u_{D1}^2}} \right) \right. \\ & \left. \left. + \left( u_{D2}\sqrt{1-u_{est2}^2} + u_{est2}\sqrt{1-u_{D2}^2} \right) \left( \dot{u}_{D2}\sqrt{1-u_{est2}^2} - \frac{u_{est2}u_{D2}\dot{u}_{D2}}{\sqrt{1-u_{D2}^2}} \right) \right)^2 \right) / \\ & \left( 1 - \left( u_{D1}\sqrt{1-u_{est1}^2} + u_{est1}\sqrt{1-u_{D1}^2} \right)^2 - \left( u_{D2}\sqrt{1-u_{est2}^2} + u_{est2}\sqrt{1-u_{D2}^2} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (4.38)$$

pois

$$T = 1/2 ml^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (4.39a)$$

$$x = l \operatorname{sen}(\theta_{est1} + \theta_{D1}) = l \left( u_{D1} \sqrt{1 - u_{est1}^2} + u_{est1} \sqrt{1 - u_{D1}^2} \right) \quad (4.39b)$$

$$y = l \operatorname{sen}(\theta_{est2} + \theta_{D2}) = l \left( u_{D2} \sqrt{1 - u_{est2}^2} + u_{est2} \sqrt{1 - u_{D2}^2} \right) \quad (4.39c)$$

$$z = l \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\theta_{est1} + \theta_{D1}) - \operatorname{sen}^2(\theta_{est2} + \theta_{D2})} = l \sqrt{1 - \left( u_{D1} \sqrt{1 - u_{est1}^2} + u_{est1} \sqrt{1 - u_{D1}^2} \right)^2 - \left( u_{D2} \sqrt{1 - u_{est2}^2} + u_{est2} \sqrt{1 - u_{D2}^2} \right)^2} \quad (4.39d)$$

Com base na Figura 4.1 e observando as expressões (4.37), tem-se que a variação da energia interna de deformação,  $\Delta U$ , e a variação do potencial gravitacional das cargas externas,  $\Delta L_p$ , são:

$$\Delta U = \frac{k_1 l^2}{2} (rig_1) + \frac{k_2 l^2}{2} (rig_2) + \frac{k_3 l^2}{2} (rig_3) \quad (4.40a)$$

$$\Delta L_p = Pl \left( \sqrt{1 - (u_{est1})^2} - (u_{est2})^2 - z \right) \quad (4.40b)$$

onde

$$\begin{aligned} rig_2 = & \left\{ \left( (\operatorname{sen} \beta - u_{10})^2 + (\cos \beta - u_{20})^2 + 1 - u_{10}^2 - u_{20}^2 \right)^{1/2} \right. \\ & - \left[ \left( \operatorname{sen} \beta - u_{D1} \sqrt{1 - u_{est1}^2} - u_{est1} \sqrt{1 - u_{D1}^2} \right)^2 \right. \\ & + \left( \cos \beta - u_{D2} \sqrt{1 - u_{est2}^2} - u_{est2} \sqrt{1 - u_{D2}^2} \right)^2 + 1 \\ & - \left( u_{D1} \sqrt{1 - u_{est1}^2} + u_{est1} \sqrt{1 - u_{D1}^2} \right)^2 \\ & \left. \left. - \left( u_{D2} \sqrt{1 - u_{est2}^2} + u_{est2} \sqrt{1 - u_{D2}^2} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}^2 \\ & - \left\{ \left( (\operatorname{sen} \beta - u_{10})^2 + (\cos \beta - u_{20})^2 + 1 - u_{10}^2 - u_{20}^2 \right)^{1/2} \right. \\ & \left. - \left( (\operatorname{sen} \beta - u_{est1})^2 + (\cos \beta - u_{est2})^2 + 1 - u_{est1}^2 - u_{est2}^2 \right)^{1/2} \right\}^2 \end{aligned} \quad (4.41a)$$

$$\begin{aligned}
rig_3 = & \left\{ \left( (-\text{sen}\beta - u_{10})^2 + (\cos\beta - u_{20})^2 + 1 - u_{10}^2 - u_{20}^2 \right)^{1/2} \right. \\
& - \left[ \left( -\text{sen}\beta - u_{D1} \sqrt{1 - u_{est1}^2} - u_{est1} \sqrt{1 - u_{D1}^2} \right)^2 \right. \\
& + \left( \cos\beta - u_{D2} \sqrt{1 - u_{est2}^2} - u_{est2} \sqrt{1 - u_{D2}^2} \right)^2 + 1 \\
& - \left( u_{D1} \sqrt{1 - u_{est1}^2} + u_{est1} \sqrt{1 - u_{D1}^2} \right)^2 \\
& \left. \left. - \left( u_{D2} \sqrt{1 - u_{est2}^2} + u_{est2} \sqrt{1 - u_{D2}^2} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}^2 \\
& - \left\{ \left( (-\text{sen}\beta - u_{10})^2 + (\cos\beta - u_{20})^2 + 1 - u_{10}^2 - u_{20}^2 \right)^{1/2} \right. \\
& \left. - \left( (-\text{sen}\beta - u_{est1})^2 + (\cos\beta - u_{est2})^2 + 1 - u_{est1}^2 - u_{est2}^2 \right)^{1/2} \right\}^2
\end{aligned} \tag{4.41b}$$

$$\begin{aligned}
rig_1 = & \left( \sqrt{2 - 2u_{20}} - \sqrt{2 - 2 \left( u_{D2} \sqrt{1 - u_{est2}^2} + u_{est2} \sqrt{1 - u_{D2}^2} \right)} \right)^2 \\
& - \left( \sqrt{2 - 2u_{20}} - \sqrt{2 - 2u_{est2}} \right)^2
\end{aligned} \tag{4.41c}$$

A variação da energia potencial total é dada por  $\Delta V = \Delta U - \Delta L_p$ .

Utilizando a equação de Lagrange em termos das coordenadas generalizadas  $u_{Di}$ , obtêm-se as equações de movimento. Linearizando o sistema, tem-se:

$$aux_{12} \ddot{u}_{D1} + aux_{22} u_{D1} + aux_{32} \ddot{u}_{D2} + aux_{42} u_{D2} = 0 \tag{4.42a}$$

$$aux_{12} \ddot{u}_{D2} + aux_{52} u_{D2} + aux_{32} \ddot{u}_{D1} + aux_{42} u_{D1} = 0 \tag{4.42b}$$

onde,

$$aux_{12} = \frac{(-1 + u_{est1}^2)(-1 + u_{est2}^2)}{1 - u_{est1}^2 - u_{est2}^2} \tag{4.43a}$$

$$\begin{aligned}
aux_{22} = & \frac{\omega_p^2}{\lambda} \left( - \frac{u_{est1} \sqrt{2 - 2u_{10} \text{sen} \beta - 2u_{20} \cos \beta}}{\text{sen} \beta \sqrt{2 - 2u_{est1} \text{sen} \beta - 2u_{est2} \cos \beta}} \right. \\
& + \frac{\sqrt{2 - 2u_{10} \text{sen} \beta - 2u_{20} \cos \beta}}{(2 - 2u_{est1} \text{sen} \beta - 2u_{est2} \cos \beta)^{3/2}} - \frac{u_{est1}^2 \sqrt{2 - 2u_{10} \text{sen} \beta - 2u_{20} \cos \beta}}{(2 - 2u_{est1} \text{sen} \beta - 2u_{est2} \cos \beta)^{3/2}} \\
& + \frac{u_{est1} \sqrt{2 + 2u_{10} \text{sen} \beta - 2u_{20} \cos \beta}}{\text{sen} \beta \sqrt{2 + 2u_{est1} \text{sen} \beta - 2u_{est2} \cos \beta}} \\
& \left. + \frac{\sqrt{2 + 2u_{10} \text{sen} \beta - 2u_{20} \cos \beta}}{(2 + 2u_{est1} \text{sen} \beta - 2u_{est2} \cos \beta)^{3/2}} - \frac{u_{est1}^2 \sqrt{2 + 2u_{10} \text{sen} \beta - 2u_{20} \cos \beta}}{(2 + 2u_{est1} \text{sen} \beta - 2u_{est2} \cos \beta)^{3/2}} \right) \quad (4.43b) \\
& - \omega_p^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - u_{est1}^2 - u_{est2}^2}} - \frac{2u_{est1}^2}{\sqrt{1 - u_{est1}^2 - u_{est2}^2}} \right. \\
& \left. + \frac{u_{est1}^2}{(1 - u_{est1}^2 - u_{est2}^2)^{3/2}} - \frac{u_{est1}^4}{(1 - u_{est1}^2 - u_{est2}^2)^{3/2}} \right)
\end{aligned}$$

$$aux_{32} = \frac{u_{est1} \sqrt{1 - u_{est1}^2} u_{est2} \sqrt{1 - u_{est2}^2}}{1 - u_{est1}^2 - u_{est2}^2} \quad (4.43c)$$

$$\begin{aligned}
aux_{42} = & \frac{\omega_p^2}{\lambda} \left( - \frac{\cos \beta \sqrt{2 + 2u_{10} \text{sen} \beta - 2u_{20} \cos \beta} \sqrt{1 - u_{est1}^2} \sqrt{1 - u_{est2}^2}}{\text{sen} \beta \sqrt{2 + 2u_{est1} \text{sen} \beta - 2u_{est2} \cos \beta}} \right. \\
& \left. + \frac{\cos \beta \sqrt{2 - 2u_{10} \text{sen} \beta - 2u_{20} \cos \beta} \sqrt{1 - u_{est1}^2} \sqrt{1 - u_{est2}^2}}{\text{sen} \beta \sqrt{2 - 2u_{est1} \text{sen} \beta - 2u_{est2} \cos \beta}} \right) \quad (4.43d) \\
& - \omega_p^2 \frac{u_{est1} \sqrt{1 - u_{est1}^2} u_{est2} \sqrt{1 - u_{est2}^2}}{(1 - u_{est1}^2 - u_{est2}^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
aux_{s_2} = & \frac{4\omega_p^2}{\lambda} \left( - \frac{\left(1 - \frac{1}{2\text{sen}^2\beta}\right) \left(\sqrt{2-2u_{10}} - \sqrt{2-2u_{est2}}\right) u_{est2}}{\sqrt{2-2u_{est2}}} \right. \\
& + \left( \frac{\left(1 - \frac{1}{2\text{sen}^2\beta}\right) \left(\sqrt{2-2u_{10}} - \sqrt{2-2u_{est2}}\right) \sqrt{1-u_{est2}^2}}{(2-2u_{est2})^{3/2}} \right. \\
& \left. \left. + \frac{\left(1 - \frac{1}{2\text{sen}^2\beta}\right) \sqrt{1-u_{est2}^2}}{2-2u_{est2}} \right) \sqrt{1-u_{est2}^2} \right) \\
& + \frac{\omega_p^2 \cos\beta}{\lambda \text{sen}^2\beta} \left( - \frac{u_{est2} \sqrt{2-2u_{10}\text{sen}\beta - 2u_{20}\cos\beta}}{\sqrt{2-2u_{est1}\text{sen}\beta - 2u_{est2}\cos\beta}} + 2u_{est2} \right. \\
& + \frac{\cos\beta \sqrt{2-2u_{10}\text{sen}\beta - 2u_{20}\cos\beta}}{(2-2u_{est1}\text{sen}\beta - 2u_{est2}\cos\beta)^{3/2}} \\
& - \frac{u_{est2}^2 \cos\beta \sqrt{2-2u_{10}\text{sen}\beta - 2u_{20}\cos\beta}}{(2-2u_{est1}\text{sen}\beta - 2u_{est2}\cos\beta)^{3/2}} \\
& + \frac{u_{est2} \sqrt{2+2u_{10}\text{sen}\beta - 2u_{20}\cos\beta}}{\sqrt{2+2u_{est1}\text{sen}\beta - 2u_{est2}\cos\beta}} \\
& + \frac{\cos\beta \sqrt{2+2u_{10}\text{sen}\beta - 2u_{20}\cos\beta}}{(2+2u_{est1}\text{sen}\beta - 2u_{est2}\cos\beta)^{3/2}} \\
& \left. - \frac{u_{est2}^2 \cos\beta \sqrt{2+2u_{10}\text{sen}\beta - 2u_{20}\cos\beta}}{(2+2u_{est1}\text{sen}\beta - 2u_{est2}\cos\beta)^{3/2}} \right) \\
& - \omega_p^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-u_{est1}^2 - u_{est2}^2}} - \frac{2u_{est2}^2}{\sqrt{1-u_{est1}^2 - u_{est2}^2}} \right. \\
& \left. + \frac{u_{est2}^2}{(1-u_{est1}^2 - u_{est2}^2)^{3/2}} - \frac{u_{est2}^4}{(1-u_{est1}^2 - u_{est2}^2)^{3/2}} \right)
\end{aligned} \tag{4.43e}$$

Os deslocamentos estáticos,  $u_{est1}$  e  $u_{est2}$ , são as coordenadas dos pontos de mínimo obtidos na análise estática para o modelo com imperfeição geométrica. As parcelas  $u_{s1}$  e  $u_{s2}$  são calculadas a partir das expressões (4.37).

Admitindo como soluções para as coordenadas generalizadas  $u_{Dj} = \bar{u}_{Dj} e^{-ti\omega_j}$ , as duas frequências naturais do modelo são dadas por:

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{2}}{2(aux_{12}^2 - aux_{32}^2)} \left\{ (aux_{12}^2 - aux_{32}^2)(aux_{12}aux_{52} - 2aux_{42}aux_{32} + aux_{22}aux_{12}) + (\text{var}_2)^{1/2} \right\}^{1/2} \quad (4.44a)$$

$$\omega_2 = \frac{\sqrt{2}}{2(aux_{12}^2 - aux_{32}^2)} \left\{ (aux_{12}^2 - aux_{32}^2)(aux_{12}aux_{52} - 2aux_{42}aux_{32} + aux_{22}aux_{12}) - (\text{var}_2)^{1/2} \right\}^{1/2} \quad (4.44b)$$

onde,

$$\begin{aligned} \text{var}_2 = & aux_{12}^2 aux_{52}^2 - 4aux_{12}aux_{52}aux_{42}aux_{32} - 2aux_{12}^2 aux_{52}aux_{22} \\ & - 4aux_{42}aux_{32}aux_{22}aux_{12} + aux_{12}^2 aux_{22}^2 + 4aux_{12}^2 aux_{42}^2 \\ & + 4aux_{32}^2 aux_{22}aux_{52} \end{aligned} \quad (4.45)$$

As frequências naturais e os modos lineares de vibração para o modelo perfeito, para o modelo considerando a influência da rigidez relativa das molas e para o modelo com imperfeição geométrica são apresentados na Tabela 4.2. Admitindo  $u_{est1} = u_{est2} = 0$  e  $\alpha = 1$  obtêm-se as frequências naturais do modelo perfeito, que são iguais, pois  $k_2 = k_3$ ,  $k_2 = \nu K$ ,  $k_1 = (1 - 2\nu)K$ ,  $\nu = \alpha/4 \sin^2 \beta$  e  $\beta = 120^\circ$ , e com isso  $Pcr_1 = Pcr_2 = Pcr = Kl/4$ . Considerando a influência da rigidez relativa das molas, ou seja,  $u_{est1} = u_{est2} = 0$  e  $\alpha \neq 1$ , o modelo passa a apresentar duas frequências naturais distintas, dependentes diretamente da magnitude de  $\alpha$ . Na Figura 4.33 apresenta-se a variação das frequências naturais em função do parâmetro que representa a rigidez relativa das molas,  $\alpha$ . Os valores extremos de  $\alpha$ , mínimo e máximo, são ditados pela magnitude de  $\lambda$ , como se constata na Tabela 4.2. Fora deste intervalo não há frequências reais. Os autovetores são similares a aqueles derivados para o modelo de Augusti.

Tabela 4.2: Freqüências naturais e modos lineares de vibração. Modelo de torre estaiada.

Modelo de torre estaiada	Freqüências Naturais	Modos
Perfeito	$\omega_1 = \omega_p \left( \frac{1}{\lambda} - 1 \right)^{1/2} \rightarrow$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
	$\omega_2 = \omega_p \left( \frac{1}{\lambda} - 1 \right)^{1/2} \rightarrow$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
Considerando a influência da rigidez relativa das molas	$\omega_1 = \omega_p \left( \frac{\alpha}{\lambda} - 1 \right)^{1/2} \rightarrow$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
	$\omega_2 = \omega_p \left( \frac{(2-\alpha)}{\lambda} - 1 \right)^{1/2} \rightarrow$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
Imperfeição Geométrica	Expressão (4.44b) $\rightarrow$	$\begin{bmatrix} 1 \\ \text{mod}_{22} \end{bmatrix}$
	Expressão (4.44a) $\rightarrow$	$\begin{bmatrix} 1 \\ \text{mod}_{12} \end{bmatrix}$

onde:

$$\text{mod}_{12} = - \left( \text{aux}_{12}^2 \text{aux}_{52} - 2 \text{aux}_{12} \text{aux}_{42} \text{aux}_{32} - \text{aux}_{12}^2 \text{aux}_{22} + \text{aux}_{12} \sqrt{\text{var}_2} + 2 \text{aux}_{22} \text{aux}_{32}^2 \right) / \left( \text{aux}_{32} \text{aux}_{12} \text{aux}_{52} + \text{aux}_{32} \text{aux}_{22} \text{aux}_{12} + \text{aux}_{32} \sqrt{\text{var}_2} - 2 \text{aux}_{42} \text{aux}_{12}^2 \right) \quad (4.46a)$$

$$\text{mod}_{22} = - \left( - \text{aux}_{12}^2 \text{aux}_{52} + \text{aux}_{12} \text{aux}_{42} \text{aux}_{32} + \text{aux}_{12}^2 \text{aux}_{22} + \text{aux}_{12} \sqrt{\text{var}_2} - 2 \text{aux}_{12} \text{aux}_{32}^2 \right) / \left( - \text{aux}_{32} \text{aux}_{12} \text{aux}_{52} - \text{aux}_{32} \text{aux}_{22} \text{aux}_{12} + \text{aux}_{32} \sqrt{\text{var}_2} + 2 \text{aux}_{42} \text{aux}_{12}^2 \right) \quad (4.46b)$$

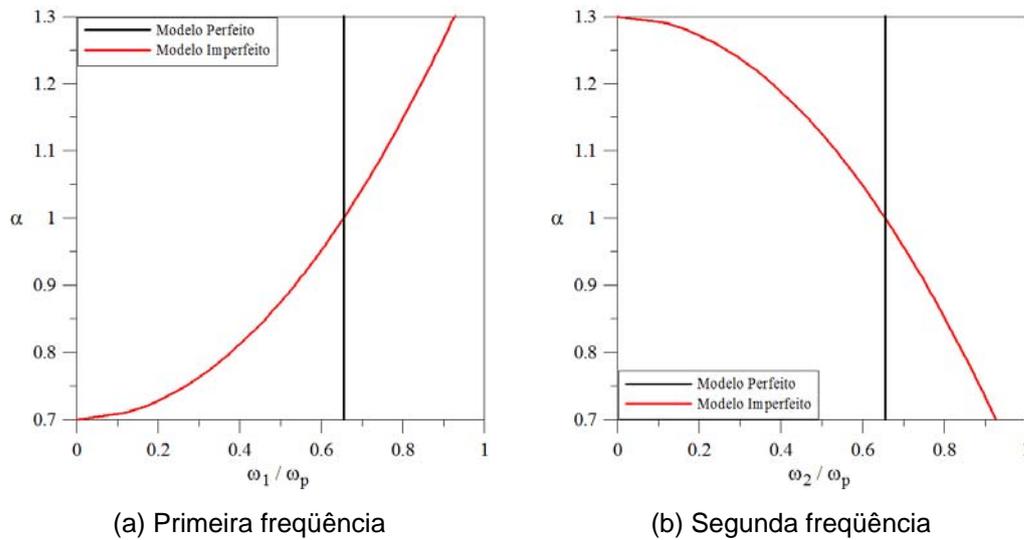


Figura 4.33: Variação das freqüências naturais em função de rigidez  $\alpha$ , para  $\lambda = 0.7$  e  $\beta = 120^\circ$ . Modelo de torre estaiada considerando a influência da rigidez relativa das molas.

Considerando agora uma imperfeição geométrica inicial,  $u_{est1} = u_{est2} \neq 0$  e  $\alpha = 1$ , verifica-se que o sistema apresenta duas freqüências naturais distintas e dependentes diretamente da magnitude e direção da imperfeição. Mostra-se na Figura 4.34 a variação das freqüências naturais do modelo imperfeito em função dos dois parâmetros que caracterizam a imperfeição, a magnitude  $\phi$  e direção  $\psi$ .

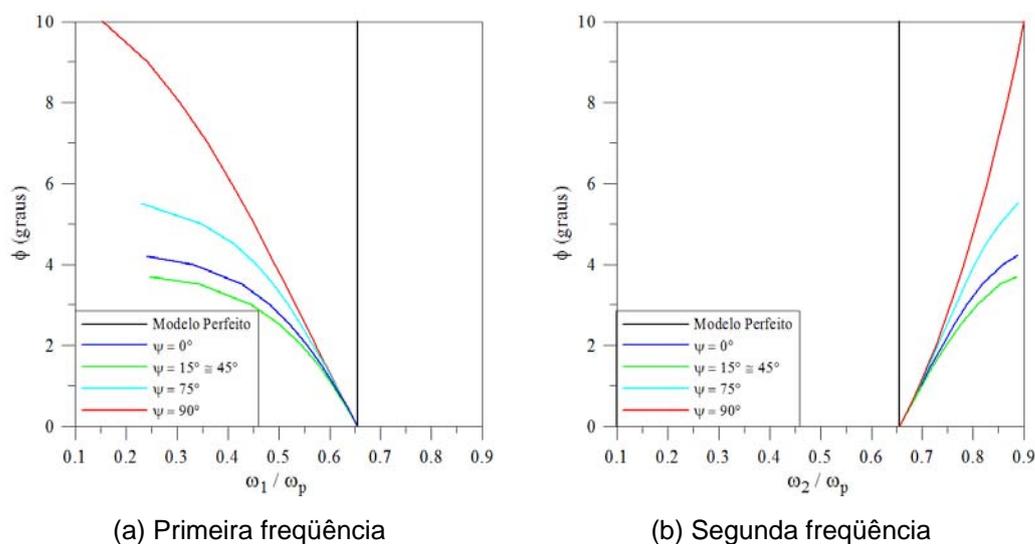


Figura 4.34: Variação das freqüências naturais com os parâmetros  $\psi$  e  $\phi$ , para  $\lambda = 0.7$  e  $\beta = 120^\circ$ . Modelo de torre estaiada com imperfeição geométrica.

Observa-se que uma das frequências (expressão (4.44a)) torna-se maior que a frequência do sistema perfeito quando  $\phi$  cresce, para qualquer valor de  $\psi$ , apresentando a maior variação para  $\psi = 45^\circ$ . A outra frequência (expressão (4.44b)) é sempre menor que a frequência do modelo perfeito, decrescendo com  $\phi$ , ocorrendo à maior variação para  $\psi = 45^\circ$ . O modelo imperfeito só apresenta frequências reais quando o valor da carga  $\lambda$  é menor que o valor de  $\lambda_{\text{lim}}$  associado aos valores de  $\phi$  e  $\psi$ , como ilustra a Figura 3.29.

#### 4.2.2. Princípio da Conservação de Energia

Adimensionalizando as expressões da energia cinética (2.17) e da energia potencial total (2.21), tem-se:

$$\bar{T} = \frac{T}{ml^2} = \frac{1}{2} \left( \dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 - \frac{(\dot{u}_1 u_1 + \dot{u}_2 u_2)^2}{u_1^2 + u_2^2 - 1} \right) \quad (4.47a)$$

$$\begin{aligned} \bar{V} = \frac{V}{ml^2} = & \frac{2\omega_p^2}{\lambda} \left( 1 - \frac{\alpha}{2\text{sen}^2 \beta} \right) \left( \sqrt{2 - 2u_{20}} - \sqrt{2 - 2u_2} \right)^2 \\ & + \frac{\alpha\omega_p^2}{2\lambda\text{sen}^2 \beta} \left( \left( \sqrt{(\text{sen}\beta - u_{10})^2 + (\cos\beta - u_{20})^2 + 1 - u_{10}^2 - u_{20}^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \sqrt{(\text{sen}\beta - u_1)^2 + (\cos\beta - u_2)^2 + 1 - u_1^2 - u_2^2} \right)^2 \right. \\ & \left. + \left( \sqrt{(-\text{sen}\beta - u_{10})^2 + (\cos\beta - u_{20})^2 + 1 - u_{10}^2 - u_{20}^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \sqrt{(-\text{sen}\beta - u_1)^2 + (\cos\beta - u_2)^2 + 1 - u_1^2 - u_2^2} \right)^2 \right) \\ & - \omega_p^2 \left( \sqrt{1 - u_{10}^2 - u_{20}^2} - \sqrt{1 - u_1^2 - u_2^2} \right) \end{aligned} \quad (4.47b)$$

A função de Lagrange do modelo de torre estaiada é apresentada na seqüência,  $u_i$  são as coordenadas generalizadas,  $\dot{u}_i$  as velocidades generalizadas,  $\partial L/\partial u_i = \dot{p}_i$ , as forças generalizadas e  $\partial L/\partial \dot{u}_i = p_i$  as quantidades de movimento generalizadas.

$$\begin{aligned}
L(\theta_i, \dot{\theta}_i) = \bar{T} - \bar{V} = & \frac{1}{2} \left( \dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \frac{(\dot{u}_1 u_1 + \dot{u}_2 u_2)^2}{u_1^2 + u_2^2 - 1} \right) \\
& - \left\{ \frac{2\omega_p^2}{\lambda} \left( 1 - \frac{\alpha}{2\text{sen}^2 \beta} \right) \left( \sqrt{2 - 2u_{20}} - \sqrt{2 - 2u_2} \right)^2 \right. \\
& + \frac{\alpha\omega_p^2}{2\lambda\text{sen}^2 \beta} \left( \left( \sqrt{(\text{sen} \beta - u_{10})^2 + (\cos \beta - u_{20})^2 + 1 - u_{10}^2 - u_{20}^2} \right. \right. \\
& \left. \left. - \sqrt{(\text{sen} \beta - u_1)^2 + (\cos \beta - u_2)^2 + 1 - u_1^2 - u_2^2} \right)^2 \right. \\
& + \left( \sqrt{(-\text{sen} \beta - u_{10})^2 + (\cos \beta - u_{20})^2 + 1 - u_{10}^2 - u_{20}^2} \right. \\
& \left. \left. - \sqrt{(-\text{sen} \beta - u_1)^2 + (\cos \beta - u_2)^2 + 1 - u_1^2 - u_2^2} \right)^2 \right) \\
& \left. - \omega_p^2 \left( \sqrt{1 - u_{10}^2 - u_{20}^2} - \sqrt{1 - u_1^2 - u_2^2} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{4.48}$$

A função de Hamilton tem a forma:

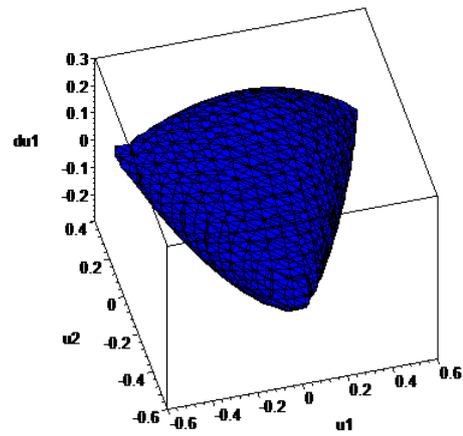
$$\begin{aligned}
H = & p_1(p_2(1 - u_2^2) - p_1 u_1 u_2) + p_2(p_1(1 - u_1^2) - p_2 u_1 u_2) \\
& - \frac{1}{2} \left( (p_2(1 - u_2^2) - p_1 u_1 u_2)^2 + (p_1(1 - u_1^2) - p_2 u_1 u_2)^2 \right. \\
& \left. + \frac{[(p_2(1 - u_2^2) - p_1 u_1 u_2)u_1 + (p_1(1 - u_1^2) - p_2 u_1 u_2)u_2]^2}{u_1^2 + u_2^2 - 1} \right) \\
& + \left\{ \frac{2\omega_p^2}{\lambda} \left( 1 - \frac{\alpha}{2\text{sen}^2 \beta} \right) \left( \sqrt{2 - 2u_{20}} - \sqrt{2 - 2u_2} \right)^2 \right. \\
& + \frac{\alpha\omega_p^2}{2\lambda\text{sen}^2 \beta} \left( \left( \sqrt{(\text{sen} \beta - u_{10})^2 + (\cos \beta - u_{20})^2 + 1 - u_{10}^2 - u_{20}^2} \right. \right. \\
& \left. \left. - \sqrt{(\text{sen} \beta - u_1)^2 + (\cos \beta - u_2)^2 + 1 - u_1^2 - u_2^2} \right)^2 \right. \\
& + \left( \sqrt{(-\text{sen} \beta - u_{10})^2 + (\cos \beta - u_{20})^2 + 1 - u_{10}^2 - u_{20}^2} \right. \\
& \left. \left. - \sqrt{(-\text{sen} \beta - u_1)^2 + (\cos \beta - u_2)^2 + 1 - u_1^2 - u_2^2} \right)^2 \right) \\
& \left. - \omega_p^2 \left( \sqrt{1 - u_{10}^2 - u_{20}^2} - \sqrt{1 - u_1^2 - u_2^2} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Tomando-se a constante  $C$  igual ao nível de energia fornecido pelas coordenadas de um dos pontos de sela associados à fronteira de estabilidade da posição de equilíbrio pré-crítica, obtém-se a solução analítica da superfície que define esta região, expressão (4.17).

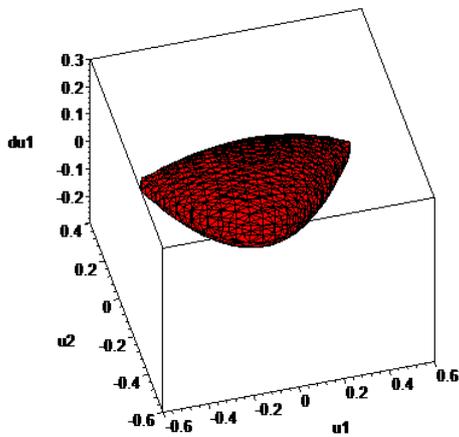
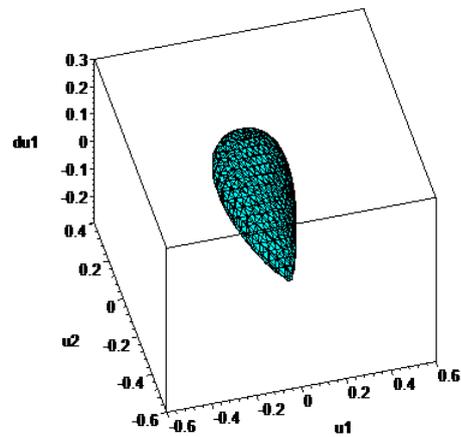
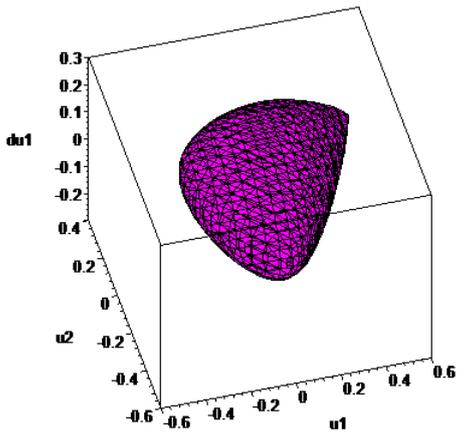
A Figura 4.35 mostra as seções da fronteira de estabilidade em 3D ( $u_1 \times u_2 \times du_1/dt$ ), para  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\omega_p = 1.0/s$ .

Na Figura 4.35(a) observa-se claramente que a bacia de atração conservativa do sistema perfeito é delimitada pelos três pontos de sela. Considerando a influência da rigidez relativa das molas verifica-se uma acentuada redução na região segura do sistema. Para  $\alpha < 1$  ( $\alpha = 0.82$ , Figura 4.35(b)), o sistema apresenta dois pontos de sela delimitando a bacia segura, já para  $\alpha > 1$  ( $\alpha = 1.18$ , Figura 4.35(c)) se verifica que a bacia segura passa a ser delimitada por um ponto de sela. Quando se considera o efeito de uma imperfeição geométrica, constata-se que a região segura diminui consideravelmente, reduzindo significativamente o conjunto de condições iniciais que levam o sistema a oscilar em torno do ponto fixo estável, solução pré-crítica. Para  $\psi = 0^\circ$  e  $\phi = 1^\circ$  a região segura é delimitada por um ponto de sela e para  $\psi = 90^\circ$  e  $\phi = 1^\circ$  a bacia segura é delimitada por dois pontos de sela.

Seções em 2D para diversas condições, considerando  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\omega_p = 1.0/s$ , são apresentadas na Figura 4.36. Verifica-se claramente a erosão da bacia segura em virtude das imperfeições. Essa região segura define as amplitudes máximas dos deslocamentos e das velocidades as quais o sistema pode ser submetido sem que perca a estabilidade.

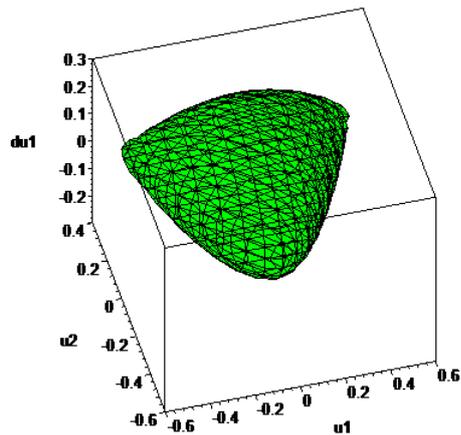


(a) Modelo perfeito

(b) Modelo considerando a influência da rigidez relativa das molas  $\alpha = 0.82$ (c) Modelo considerando a influência da rigidez relativa das molas  $\alpha = 1.18$ 

(d) Modelo com imperfeição geométrica

$$\psi = 0^\circ \text{ e } \phi = 1^\circ$$



(e) Modelo com imperfeição geométrica

$$\psi = 90^\circ \text{ e } \phi = 1^\circ$$

Figura 4.35: Seções das bacias de atração conservativas em 3D ( $u_1x_2xd_1/dt$ ), para  $\omega_p = 1.0/s$ ,  $\lambda = 0.7$  e  $\beta = 120^\circ$ . Modelo de torre estaiada.

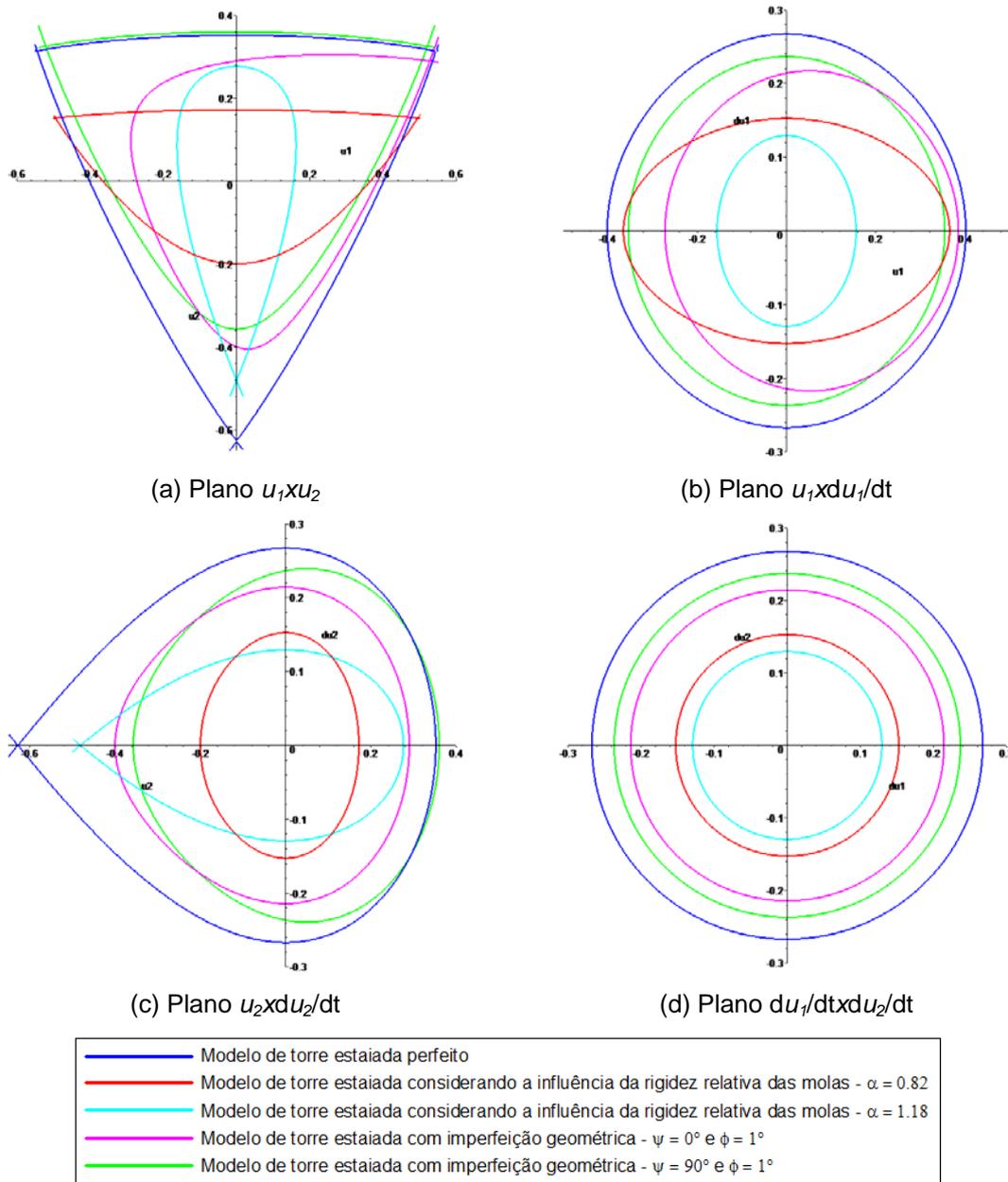


Figura 4.36: Seções das bacias de atração conservativas em 2D, para  $\omega_p = 1.0/s$ ,  $\lambda = 0.7$  e  $\beta = 120^\circ$ . Modelo de torre estaiada.

### 4.2.3. Variedades Invariantes dos Pontos de Sela

Partindo das coordenadas dos pontos de sela do modelo perfeito e utilizando o critério dinâmico de estabilidade, obtêm-se os autovalores e os respectivos autovetores associados a cada ponto de sela. A Figura 4.37 mostra o comportamento das variedades invariantes dos pontos de sela do modelo perfeito, através de projeções em diversos planos para  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\omega_p = 1.0/s$ .

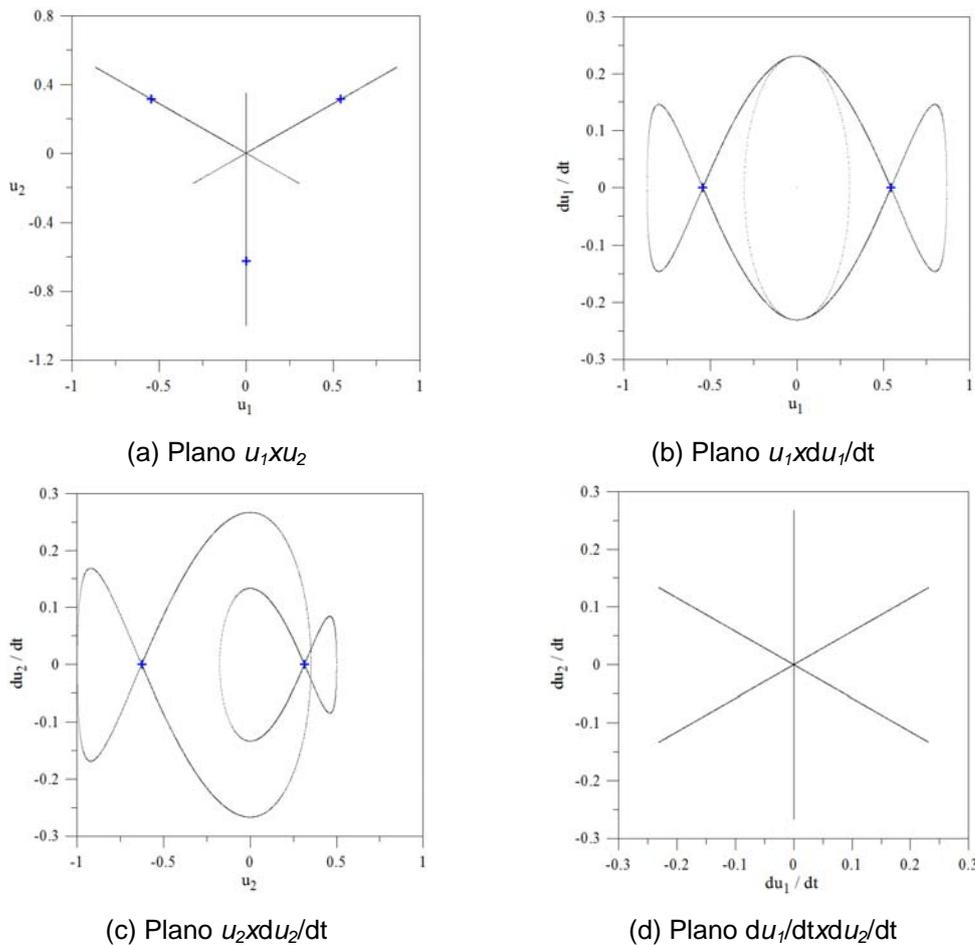


Figura 4.37: Projeções das variedades invariantes dos pontos de sela, para  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de torre estaiada perfeito.

Verifica-se que no plano dos deslocamentos e das velocidades as variedades apresentam variações lineares. Observa-se, ainda, que as variedades estão em três planos igualmente espaçados, cada um contendo um ponto de sela e a origem. Este comportamento se deve à tríplice simetria do modelo perfeito. Constata-se que em cada um destes planos o sistema exibe uma órbita homoclínica.

Tomando as coordenadas do primeiro ponto de sela do sistema perfeito (aquele que possui  $u_1 = 0$ ) e adicionando uma pequena perturbação na direção do vetor que define a variedade instável, obtém a respectiva órbita homoclínica. A Figura 4.38 mostra duas projeções desta órbita.

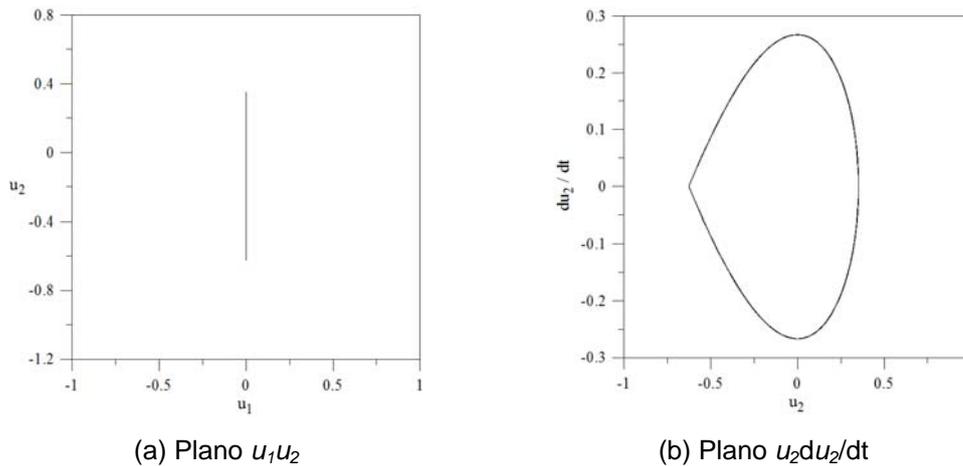


Figura 4.38: Projeções da reposta no tempo do primeiro ponto sela perturbado, para  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de torre estaiada perfeito.

Considerando a influência da rigidez relativa das molas com  $\alpha = 0.82$ , verifica-se que as variedades não mais estão contidas em um plano, mas em uma superfície curva imersa no espaço de fase, Figura 4.39a. A resposta no domínio do tempo tendo como condições iniciais a coordenadas perturbadas de uma das selas, Figura 4.39(b), apresenta um comportamento com forte acoplamento, preenchendo a órbita toda da fronteira de estabilidade (vide Figura 4.35(e)).

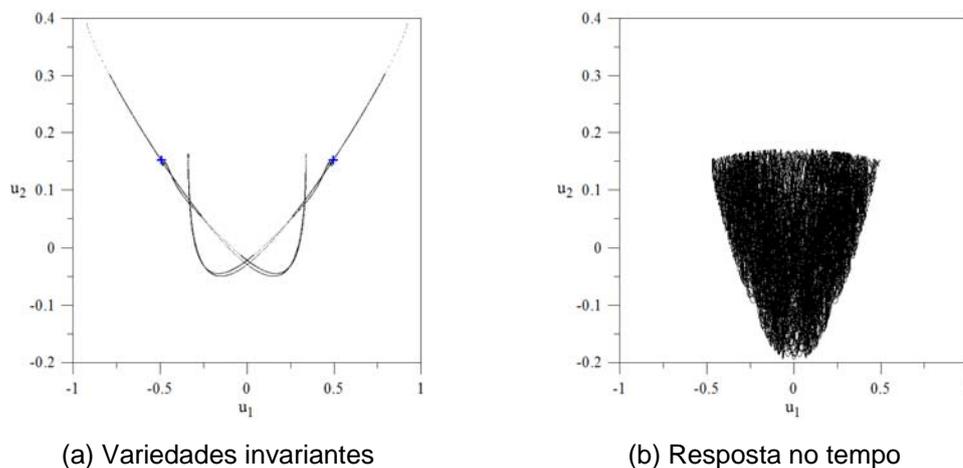


Figura 4.39: Projeções das variedades invariantes e da reposta no tempo no plano  $u_1 \times u_2$ , para  $\alpha = 0.82$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de torre estaiada considerando a influência da rigidez relativa das molas.

Para o sistema considerando a influência da rigidez relativa das molas com  $\alpha = 1.18$ , como mostrado nas Figuras 4.35(c) e 4.36(a), a fronteira de estabilidade está associada a um único ponto de sela. A Figura 4.40 mostra projeções das

variedades e da resposta no domínio do tempo do sistema perturbado. Verifica-se que as variedades invariantes apresentam uma variação linear no plano dos deslocamentos e das velocidades e que a órbita definida pelas variedades é homoclínica.

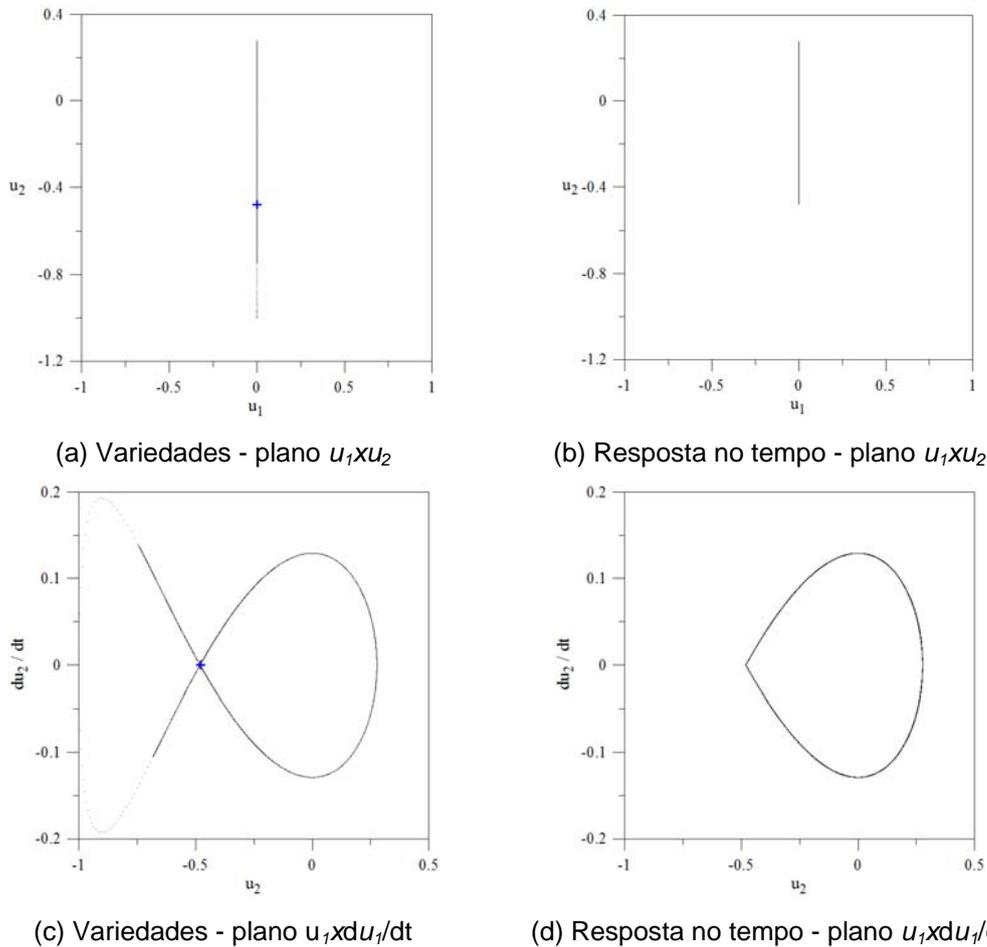


Figura 4.40: Projeções das variedades invariantes e da resposta no tempo, para  $\alpha = 1.18$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de torre estaiada considerando a influência da rigidez relativa das molas.

As Figuras 4.41 e 4.42 ilustram o comportamento do sistema considerando uma imperfeição geométrica com, respectivamente,  $\psi = 0^\circ$  e  $\phi = 1^\circ$ , e  $\psi = 90^\circ$  e  $\phi = 1^\circ$ . Verifica-se que, em ambos os casos, as variedades estão em uma superfície curva no espaço 4D.

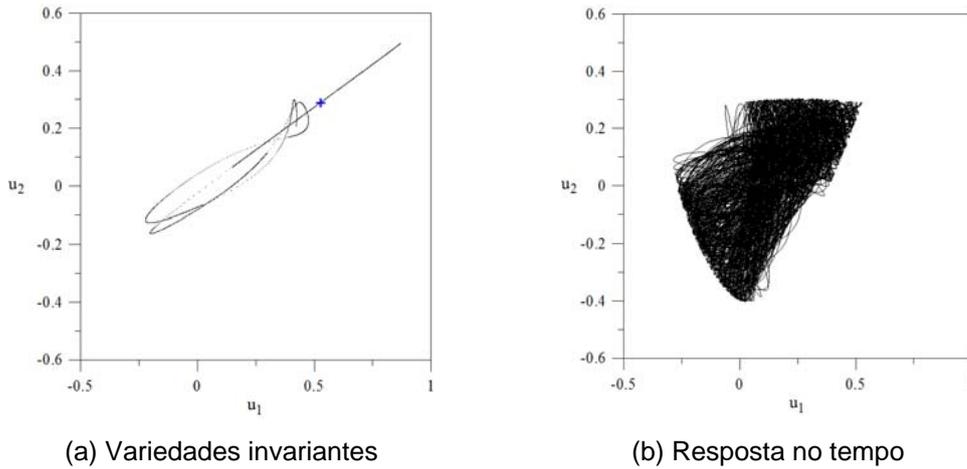


Figura 4.41: Projeções das variedades invariantes e da resposta no tempo no plano  $u_1 \times u_2$ , para  $\psi = 0^\circ$ ,  $\phi = 1^\circ$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de torre estaiada com imperfeição geométrica.

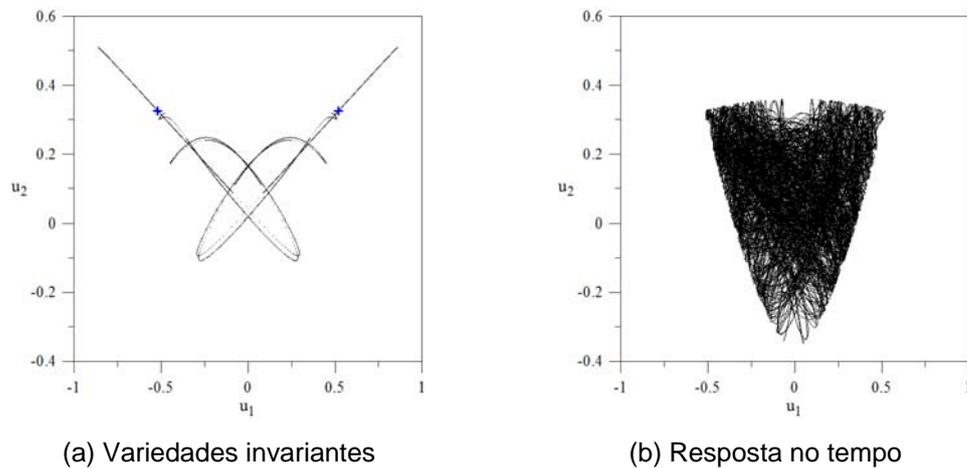


Figura 4.42: Projeções das variedades invariantes e da resposta no tempo no plano  $u_1 \times u_2$ , para  $\psi = 90^\circ$ ,  $\phi = 1^\circ$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de torre estaiada com imperfeição geométrica.

#### 4.2.4. Modos Não-Lineares de Vibração

Com o intuito de identificar os modos não-lineares de vibração da torre estaiada, foram escolhidos dois planos para os mapas de Poincaré, a saber:  $u_1 \times du_1 / dt$  e  $u_2 \times du_2 / dt$ . Assim, tem-se que os respectivos planos de corte e as respectivas seções de Poincaré,  $\Sigma$ , são definidas por:

$$\Pi = \{u_2 = 0\} \rightarrow \Sigma = \{u_2 = 0, \dot{u}_2 > 0\} \cap \{H = h\} \quad (4.50a)$$

$$\Pi = \{u_1 = 0\} \rightarrow \Sigma = \{u_1 = 0, \dot{u}_1 > 0\} \cap \{H = h\} \quad (4.50b)$$

#### 4.2.4.1. Modelo Perfeito

Para o modelo perfeito,  $\phi = \psi = 0^\circ$  e  $\alpha = 1$ , pode-se avaliar  $H = h$  através das expressões (4.17) e (4.47) para um dado nível de energia  $h$ . As condições iniciais de  $\dot{u}_2$  e  $\dot{u}_1$ , correspondentes, respectivamente, aos pares iniciais  $(u_1, \dot{u}_1)$  e  $(u_2, \dot{u}_2)$ , são dadas por:

$$\begin{aligned} \dot{u}_2 = & \pm \left( -\dot{u}_1^2 + \frac{u_1^2 \dot{u}_1^2}{-1+u_1^2} - \frac{\omega_p^2}{\lambda} \left( \left( \sqrt{2} - \sqrt{(\text{sen}\beta - u_1)^2 + \cos\beta + 1 - u_1^2} \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( \sqrt{2} - \sqrt{(-\text{sen}\beta - u_1)^2 + \cos\beta + 1 - u_1^2} \right)^2 \right) / \text{sen}^2 \beta \right. \\ & \left. + 2\omega_p^2 \left( 1 - \sqrt{1 - u_1^2} \right) + 2h \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (4.51a)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 = & \pm \left( -\dot{u}_2^2 + \frac{u_2^2 \dot{u}_2^2}{-1+u_2^2} - \frac{4\omega_p^2}{\lambda} \left( 1 - \frac{1}{2\text{sen}^2 \beta} \right) \left( \sqrt{2} - \sqrt{2 - 2u_2^2} \right)^2 - \right. \\ & \left. \frac{\omega_p^2}{\lambda \text{sen}^2 \beta} \left( \sqrt{2} - \sqrt{\text{sen}^2 \beta + (\cos\beta - u_2)^2 + 1 - u_2^2} \right)^2 \right. \\ & \left. + 2\omega_p^2 \left( 1 - \sqrt{1 - u_1^2} \right) + 2h \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (4.51b)$$

onde somente as velocidades positivas são de interesse, sendo a fronteira dessas regiões dadas por:

$$\begin{aligned} h = & \frac{1}{2} \dot{u}_1^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{u_1^2 \dot{u}_1^2}{-1+u_1^2} \right) + \frac{\omega_p^2}{2\lambda} \left( \left( \sqrt{2} - \sqrt{(\text{sen}\beta - u_1)^2 + \cos\beta + 1 - u_1^2} \right)^2 \right. \\ & \left. + \left( \sqrt{2} - \sqrt{(-\text{sen}\beta - u_1)^2 + \cos\beta + 1 - u_1^2} \right)^2 \right) / \text{sen}^2 \beta \\ & - \omega_p^2 \left( 1 - \sqrt{1 - u_1^2} \right) \end{aligned} \quad (4.52a)$$

$$\begin{aligned}
 h = & \frac{1}{2} \dot{u}_2^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{u_2^2 \dot{u}_2^2}{-1+u_2^2} \right) + \frac{2\omega_p^2}{\lambda} \left( 1 - \frac{1}{2\text{sen}^2\beta} \right) \left( \sqrt{2} - \sqrt{2-2u_2^2} \right)^2 + \\
 & \frac{\omega_p^2}{2\lambda\text{sen}^2\beta} \left( \sqrt{2} - \sqrt{\text{sen}^2\beta + (\cos\beta - u_2)^2 + 1 - u_2^2} \right)^2 \\
 & - \omega_p^2 \left( 1 - \sqrt{1-u_1^2} \right)
 \end{aligned} \tag{4.52b}$$

Neste caso, tem-se uma ressonância interna 1:1, sendo  $\omega_1 = \omega_2 = 0.655$ .

Integrando as expressões (4.36) para as condições iniciais  $(u_1, \dot{u}_1)$  no interior da região definida por (4.52a) e impondo as restrições para  $u_2$  e  $\dot{u}_2$ , obtêm-se a seção de Poincaré no plano  $u_1 \times du_1/dt$ . De forma similar, integrando as expressões (4.36) para as condições iniciais  $(u_2, \dot{u}_2)$  no interior da região definida por (4.52b) e com base nas restrições de  $u_1$  e  $\dot{u}_1$ , obtêm-se a seção de Poincaré no plano  $u_2 \times du_2/dt$ .

Mostram-se na Figura 4.43 as seções de Poincaré considerando 50% da energia dos respectivos pontos de sela. Quando o nível de energia é nulo tem-se que a seção transversal (seção de Poincaré) se reduz a um ponto que corresponde no plano  $u_1 \times du_1/dt$  ao modo de vibração não-linear desacoplado no plano  $u_2 \times du_2/dt$ . No modelo de torre estaiada o sistema não apresenta modos não-lineares desacoplados no plano  $u_1 \times du_1/dt$ .

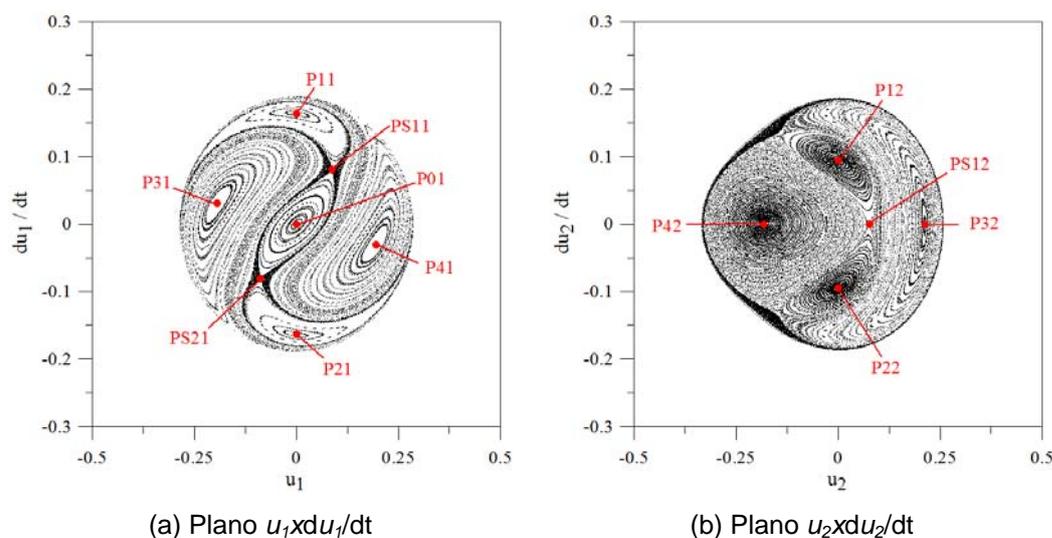


Figura 4.43: Seções de Poincaré com 50% da energia do ponto de sela, para  $\omega_1 = \omega_2 = 0.655$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de torre estaiada perfeito.

Para níveis baixos e médios de energia tem-se um ponto, P01, na origem ( $u_1 = \dot{u}_1 = 0.0$ ), Figura 4.43(a), que representa o modo de vibração não-linear desacoplado no plano  $u_2 \times du_2 / dt$ , cuja relação frequência-amplitude é mostrada na Figura 4.46. Verifica-se, também, no plano  $u_1 \times du_1 / dt$ , Figura 4.43(a), a presença de seis outros modos de vibração, dois acoplados instáveis (PS11 e PS21 – selas) e quatro estáveis (P11, P21, P31 e P41 – centros), que surgem devido à forte não-linearidade do sistema. Já no plano  $u_2 \times du_2 / dt$ , Figura 4.43(b), observa-se a presença de cinco modos, um instável (PS12– sela) e quatro estáveis (P12, P22, P32 e P42 – centros).

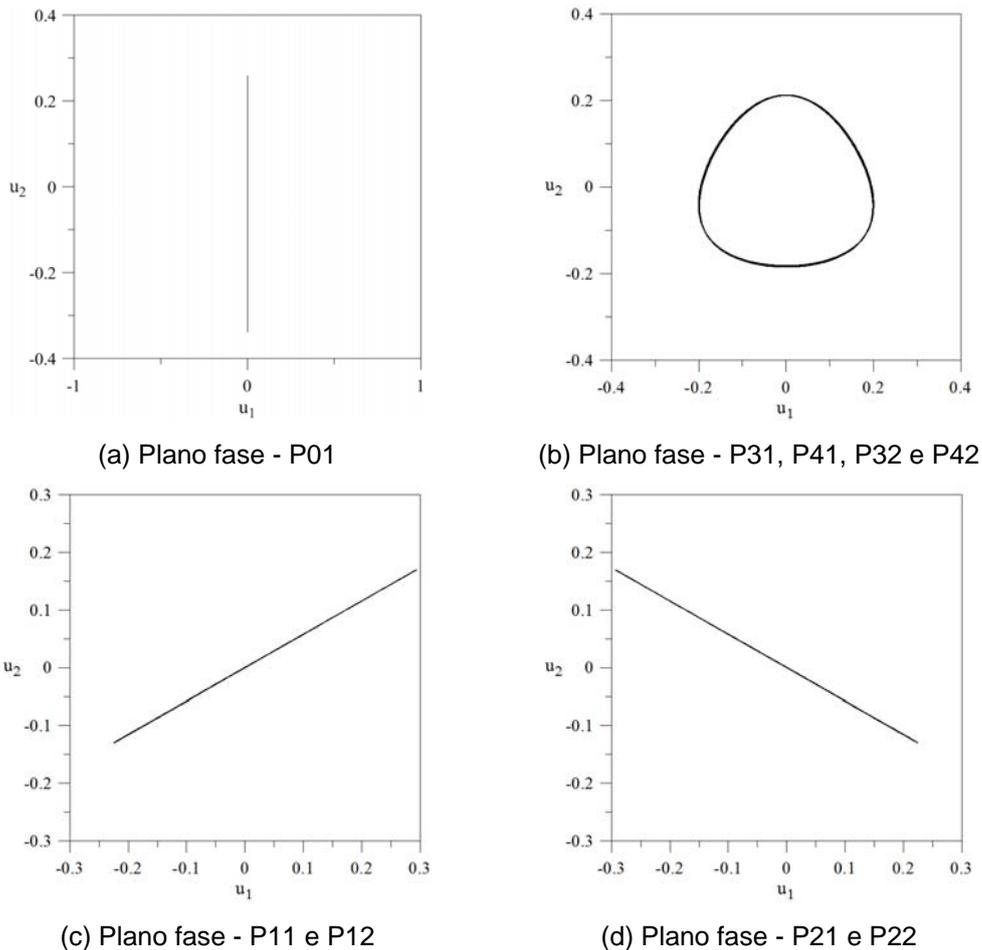


Figura 4.44: Comportamento no domínio do tempo dos pontos P01, P11, P21, P31, P41, P12, P22, P32 e P42, para  $\omega_1 = \omega_2 = 0.655$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de torre estaiada perfeito.

Através de uma análise no domínio do tempo constata-se que os pontos P11 e P21 (Figura 4.43(a)), e P12 e P22 (Figura 4.43(b)) correspondem a dois modos não-lineares similares, com o sistema vibrando com  $u_1$  e  $u_2$  em fase (P12 e P12) e com  $u_1$  e  $u_2$  fora de fase (P21 e P22), como mostram, respectivamente, as Figuras 4.44(c) e 4.44(d). Já os pontos P31 e P41 (Figura 4.43(a)), e P32 e P42 (Figura 4.43(b)) correspondem a um modo não-similar, como se verifica na Figura 4.44(b).

O sistema pode ser desacoplado nos três planos que contêm as variedades dos pontos de sela e que correspondem aos planos que contêm os modos não-lineares similares, ou seja, pode ser reduzido a um modelo de um grau de liberdade. Estes planos têm a direção do eixo  $u_2$  e os eixos localizados a  $30^\circ$  e  $150^\circ$  do eixo  $u_1$ , Figura 4.45.

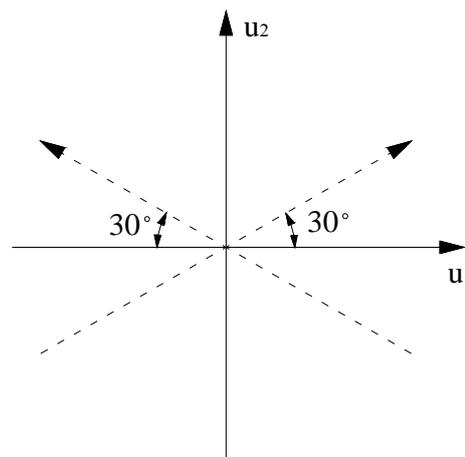


Figura 4.45: Coordenadas auxiliares. Modelo de torre estaiada perfeito.

Observando a Figura 4.45, pode-se deduzir que as funções lineares que representam o modo desacoplado no plano  $u_2 \times du_2 / dt$  e os modos similares são:

$$u_1 = 0, \dot{u}_1 = 0, u_2 = u \text{ e } \dot{u}_2 = \dot{u} \rightarrow \text{ponto P01} \quad (4.53a)$$

$$u_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}u, \dot{u}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\dot{u}, u_2 = \frac{1}{2}u \text{ e } \dot{u}_2 = \frac{1}{2}\dot{u} \rightarrow \text{pontos P11 e P12} \quad (4.53b)$$

$$u_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}u, \dot{u}_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\dot{u}, u_2 = \frac{1}{2}u \text{ e } \dot{u}_2 = \frac{1}{2}\dot{u} \rightarrow \text{pontos P21 e P22} \quad (4.53c)$$

Assim, substituindo as expressões (4.53b), nas parcelas de energia do modelo de torre estaiada perfeito e adotando como coordenada generalizada  $u$ , obtém-se a equação de movimento desacoplada no plano  $u \times du/dt$ , a saber:

$$ml^2 \left( \frac{\ddot{u}(1-u^2) + u\dot{u}^2}{(-1+u^2)^2} \right) + \frac{k_1 l^2}{2} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2-u}}{\sqrt{2-u}} + \frac{k_2 l^2}{2} \left( -\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2-u}}{\sqrt{2-u}} - \frac{2(\sqrt{2} - \sqrt{2+2u})}{\sqrt{2+2u}} \right) - Pl \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} = 0 \quad (4.54)$$

A Figura 4.46 mostra a relação não-linear, frequência-amplitude, para o modo não-linear desacoplado que surge do modo linear no plano  $u_2 \times du_2/dt$ , exibindo este um comportamento *softening*.

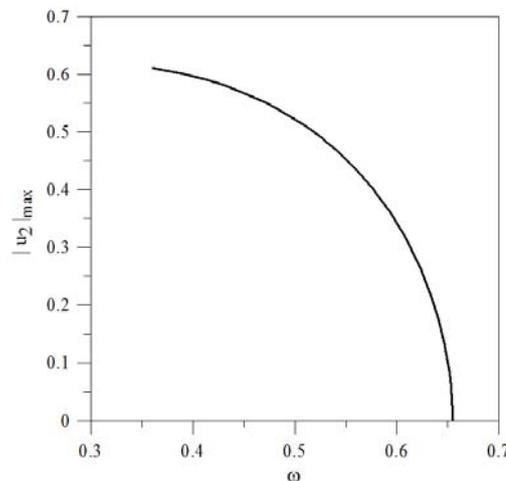


Figura 4.46: Relação frequência-amplitude do modo não-linear estável desacoplado no plano  $u_2 \times du_2/dt$ , para  $\omega_1 = \omega_2 = 0.655$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de torre estaiada perfeito.

A Figura 4.47 apresenta o comportamento associado aos pontos de sela PS11, PS21 e PS12 (Figura 4.43), que possuem o mesmo comportamento. Já a Figura 4.48 mostra o comportamento dos modos não-similares associados aos pontos P31, P41, P32 e P42.

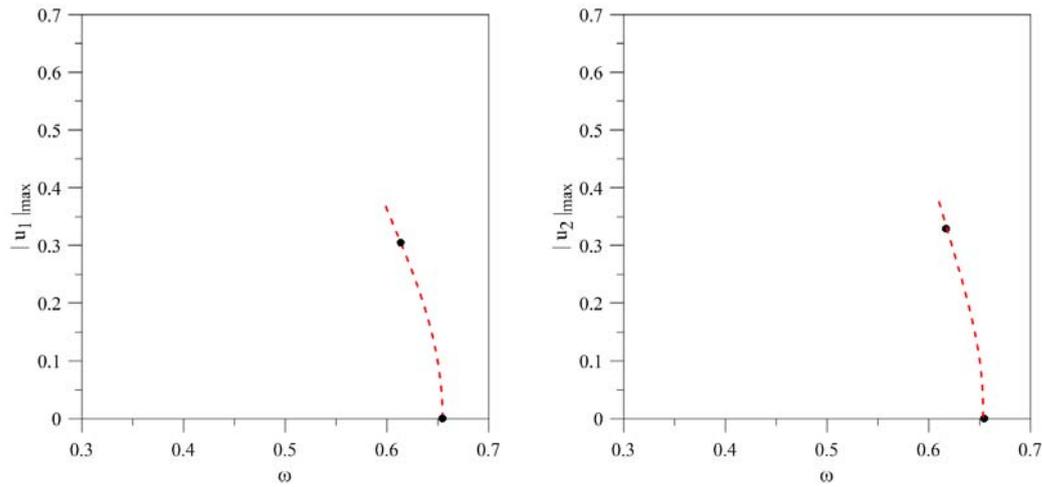


Figura 4.47: Relações freqüência-amplitude dos modos acoplados instáveis dos pontos de sela PS11, PS21 e PS12, para  $\omega_1 = \omega_2 = 0.655$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de torre estaiada perfeito.

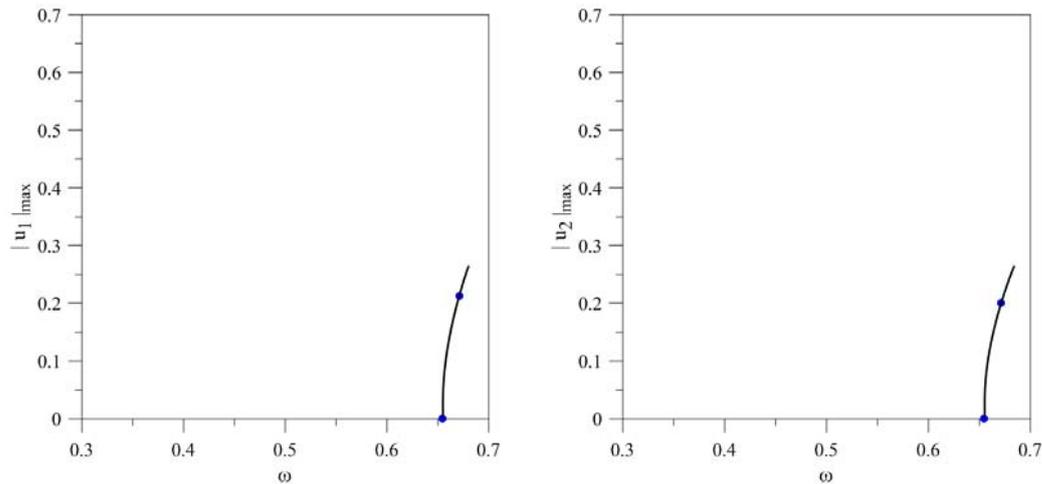


Figura 4.48: Relações freqüência-amplitude dos modos não-lineares não-similares estáveis acoplados associados aos pontos P31, P41, P32 e P42, para  $\omega_1 = \omega_2 = 0.655$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de torre estaiada perfeito.

Por fim, a Figura 4.49 mostra a relação não-linear que representa o comportamento dos dois modos similares, relativos aos pontos P11, P21, P12 e P22 da Figura 4.43. Comparando a Figura 4.49 com a Figura 4.46, verifica-se que o modo não-linear desacoplado no plano  $u_2 \times du_2/dt$  possui o mesmo comportamento dos modos não-lineares similares, o que é esperado em virtude da trílice simetria do modelo.

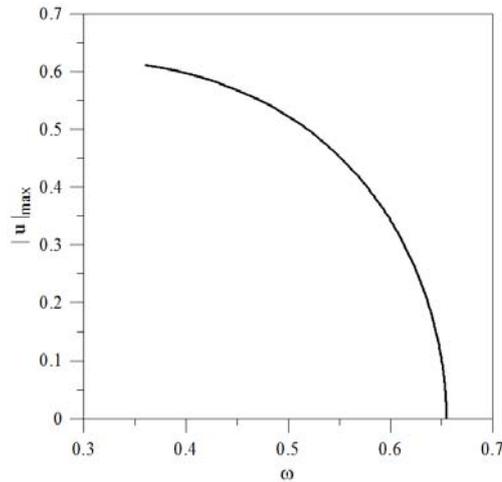


Figura 4.49: Relação freqüência-amplitude dos modos não-lineares similares estáveis acoplados dos pontos P11, P21, P12 e P22, para  $\omega_1 = \omega_2 = 0.655$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de torre estaiada perfeito.

#### 4.2.4.2. Influência da Rigidez Relativa das Molas

Considerando a influência da rigidez relativa das molas,  $\phi = \psi = 0^\circ$  e  $\alpha \neq 1$ , tem-se que as condições iniciais de  $\dot{u}_2$  e  $\dot{u}_1$ , referentes respectivamente aos pares iniciais  $(u_1, \dot{u}_1)$  e  $(u_2, \dot{u}_2)$ , são:

$$\begin{aligned} \dot{u}_2 = \pm & \left( -\dot{u}_1^2 + \frac{u_1^2 \dot{u}_1^2}{-1+u_1^2} - \frac{\alpha \omega_p^2}{\lambda} \left( \left( \sqrt{2} - \sqrt{(\text{sen}\beta - u_1)^2 + \cos\beta + 1 - u_1^2} \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( \sqrt{2} - \sqrt{(-\text{sen}\beta - u_1)^2 + \cos\beta + 1 - u_1^2} \right)^2 \right) \right) / \text{sen}^2 \beta \\ & \left. + 2\omega_p^2 \left( 1 - \sqrt{1 - u_1^2} \right) + 2h \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (4.55a)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 = \pm & \left( -\dot{u}_2^2 + \frac{u_2^2 \dot{u}_2^2}{-1+u_2^2} - \frac{4\omega_p^2}{\lambda} \left( 1 - \frac{\alpha}{2\text{sen}^2\beta} \right) \left( \sqrt{2} - \sqrt{2 - 2u_2^2} \right)^2 - \right. \\ & \left. \frac{\alpha \omega_p^2}{\lambda \text{sen}^2 \beta} \left( \sqrt{2} - \sqrt{\text{sen}^2 \beta + (\cos\beta - u_2)^2 + 1 - u_2^2} \right)^2 \right. \\ & \left. + 2\omega_p^2 \left( 1 - \sqrt{1 - u_1^2} \right) + 2h \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (4.55b)$$

As seções de Poincaré são limitadas por:

$$\begin{aligned}
 h = & \frac{1}{2} \dot{u}_1^2 - \frac{1}{2} \frac{u_1^2 \dot{u}_1^2}{-1+u_1^2} + \frac{\alpha \omega_p^2}{2\lambda} \left( \left( \sqrt{2} - \sqrt{(\text{sen}\beta - u_1)^2 + \cos\beta + 1 - u_1^2} \right)^2 \right. \\
 & \left. + \left( \sqrt{2} - \sqrt{(-\text{sen}\beta - u_1)^2 + \cos\beta + 1 - u_1^2} \right)^2 \right) / \text{sen}^2 \beta \\
 & - \omega_p^2 \left( 1 - \sqrt{1 - u_1^2} \right)
 \end{aligned} \tag{4.56a}$$

$$\begin{aligned}
 h = & \frac{1}{2} \dot{u}_2^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{u_2^2 \dot{u}_2^2}{-1+u_2^2} \right) + \frac{2\omega_p^2}{\lambda} \left( 1 - \frac{\alpha}{2\text{sen}^2 \beta} \right) \left( \sqrt{2} - \sqrt{2 - 2u_2^2} \right)^2 + \\
 & \frac{\alpha \omega_p^2}{2\lambda \text{sen}^2 \beta} \left( \sqrt{2} - \sqrt{\text{sen}^2 \beta + (\cos\beta - u_2)^2 + 1 - u_2^2} \right)^2 \\
 & - \omega_p^2 \left( 1 - \sqrt{1 - u_1^2} \right)
 \end{aligned} \tag{4.56b}$$

Na Figura 4.50 têm-se as seções de Poincaré para 50% da energia do ponto de sela associado a esta situação, considerando  $\alpha = 0.82$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Neste caso, têm-se duas frequências naturais distintas, sendo  $\omega_1 = 0.414$  e  $\omega_2 = 0.828$ . Tem-se, pois, ressonância interna 1:2. A introdução de uma rigidez relativa das molas diferente causa uma perda de simetria do sistema e, conseqüentemente, faz com que o sistema não apresente mais os modos não-lineares similares. O ponto central no plano  $u_1 \times du_1/dt$  que representava no modelo perfeito, Figura 4.43, o modo não-linear desacoplado no plano  $u_2 \times du_2/dt$ , agora passou a ser uma sela (PS01) e representa um modo desacoplado instável. Os centros presentes nas seções de Poincaré, pontos P11, P21, P31 e P41 na Figura 5.50(a) e pontos P12 e P22 na Figura 5.50(b), representam modos não-lineares acoplados estáveis.

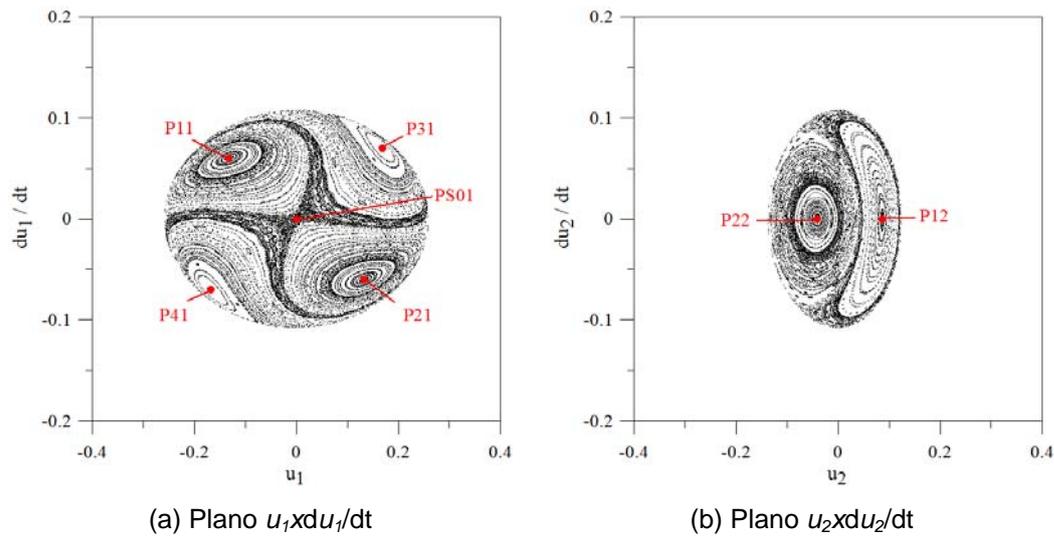
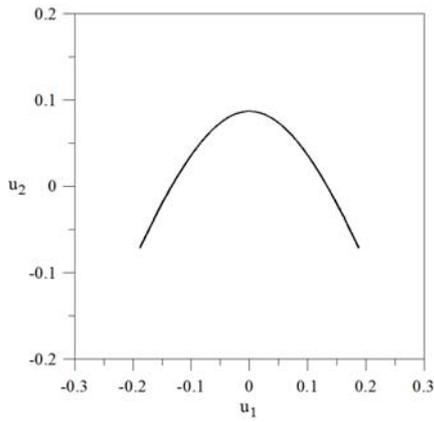


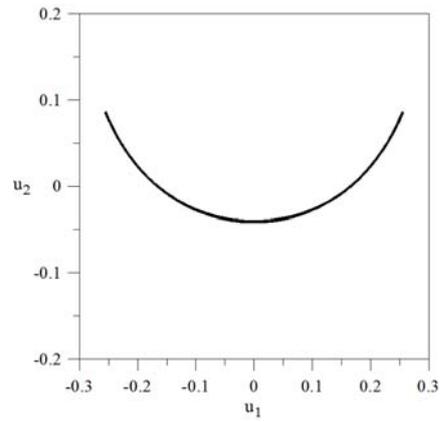
Figura 4.50: Seções de Poincaré com 50 % da energia do ponto de sela, para  $\alpha = 0.82$ ,  $\omega_1 = 0.414$ ,  $\omega_2 = 0.828$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de torre estaiada considerando a influência da rigidez relativa das molas.

Pode-se analisar as características dos centros presentes na Figura 4.50 através de uma análise no domínio do tempo, Figura 4.51. Verifica-se nos planos de fase uma variação não-linear entre as coordenadas  $u_1$  e  $u_2$ . Os pontos P11 e P21 e os pontos P31 e P41 no plano  $u_1 \times du_1/dt$  representam, respectivamente, duas soluções sub-harmônicas de ordem dois, como mostram as seções de Poincaré apresentadas nas Figuras 4.51(c) e 4.51(d). Estas soluções correspondem a, respectivamente, os pontos P12 e P22 no plano  $u_2 \times du_2/dt$ . A Figura 4.51(e) mostra que no ponto P11 a coordenada  $u_2$  está vibrando com uma frequência que é o dobro da frequência da coordenada  $u_1$ . O mesmo comportamento é verificado para os demais pontos.

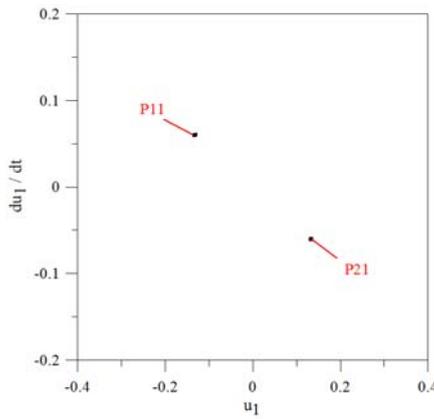
A Figura 4.52 mostra a relação frequência-amplitude que representa o modo desacoplado instável proveniente do ponto de sela PS01, Figura 4.50(a). Veja que este modo tem o mesmo comportamento do modo desacoplado do modelo perfeito, Figura 4.46. A Figura 4.53 apresenta as relações frequência-amplitude dos modos não-lineares acoplados estáveis dos centros presentes na Figura 4.50.



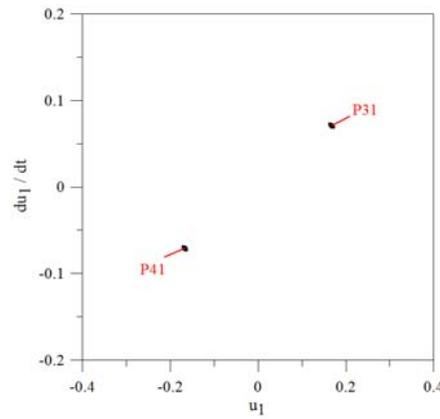
(a) Plano fase - P11, P21 e P12



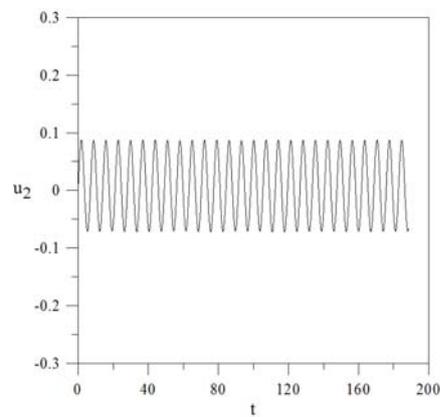
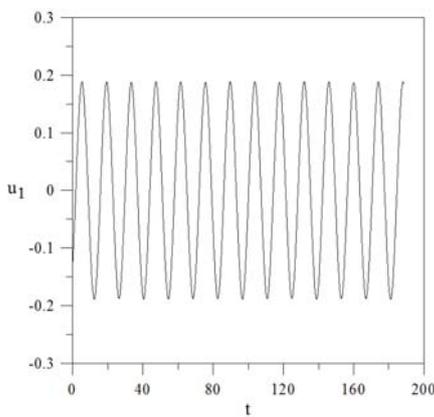
(b) Plano fase - P31, P41 e P22



(c) Seções de Poincaré - P11, P21 e P12



(d) Seções de Poincaré - P31, P41 e P22



(e) Reposta no tempo P11

Figura 4.51: Comportamento no domínio do tempo dos pontos P11, P21, P31, P41, P12 e P22, para  $\alpha = 0.82$ ,  $\omega_1 = 0.414$ ,  $\omega_2 = 0.828$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de torre estaiada considerando a influência da rigidez relativa das molas.

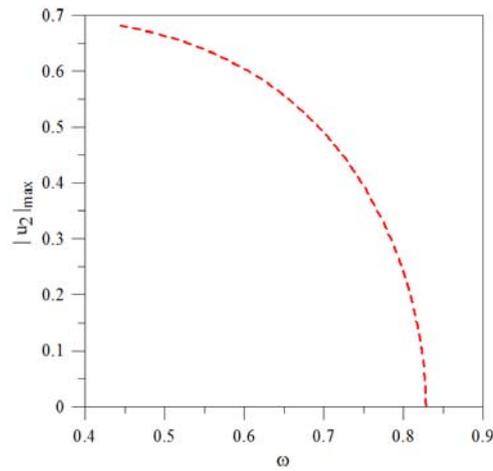


Figura 4.52: Relações frequência-amplitude do modo desacoplado instável do ponto de sela PS01, para  $\alpha = 0.82$ ,  $\omega_1 = 0.414$ ,  $\omega_2 = 0.828$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de torre estaiada considerando a influência da rigidez relativa das molas.

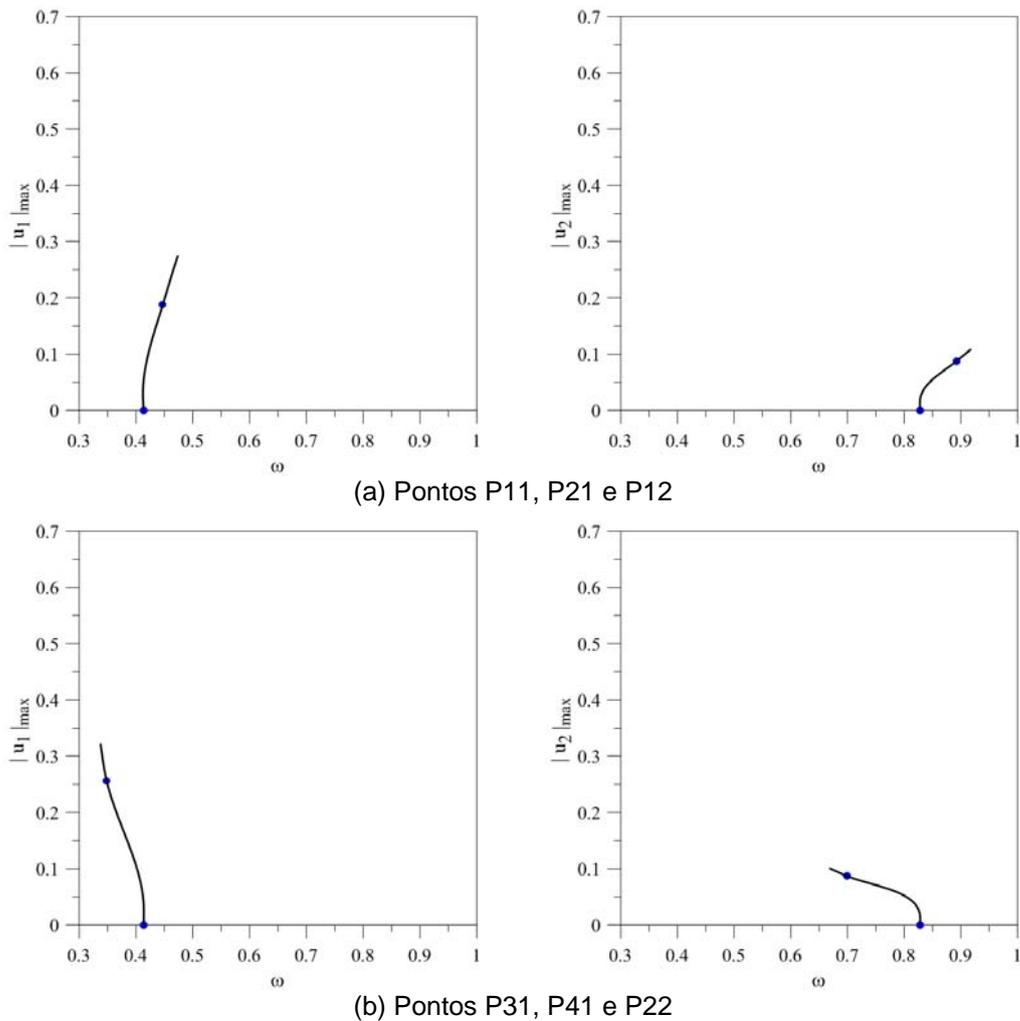


Figura 4.53: Relações frequência-amplitude dos modos não-lineares acoplados estáveis, para  $\alpha = 0.82$ ,  $\omega_1 = 0.414$ ,  $\omega_2 = 0.828$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de torre estaiada considerando a influência da rigidez relativa das molas.

As seções de Poincaré para 50% da energia do ponto sela, considerando  $\alpha = 1.18$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\omega_p = 1.0/s$ , ou seja, para  $\alpha > 1$ , são apresentadas na Figura 4.54. As duas frequências naturais são  $\omega_1 = 0.414$  e  $\omega_2 = 0.828$ . Tem-se, pois, ressonância interna 1:2. Para essa situação, como no modelo perfeito, tem-se que, quando o nível de energia é nulo, a seção de Poincaré se reduz a um ponto no plano  $u_1 \times du_1/dt$ , e esse ponto representa o modo linear desacoplado no plano  $u_2 \times du_2/dt$ .

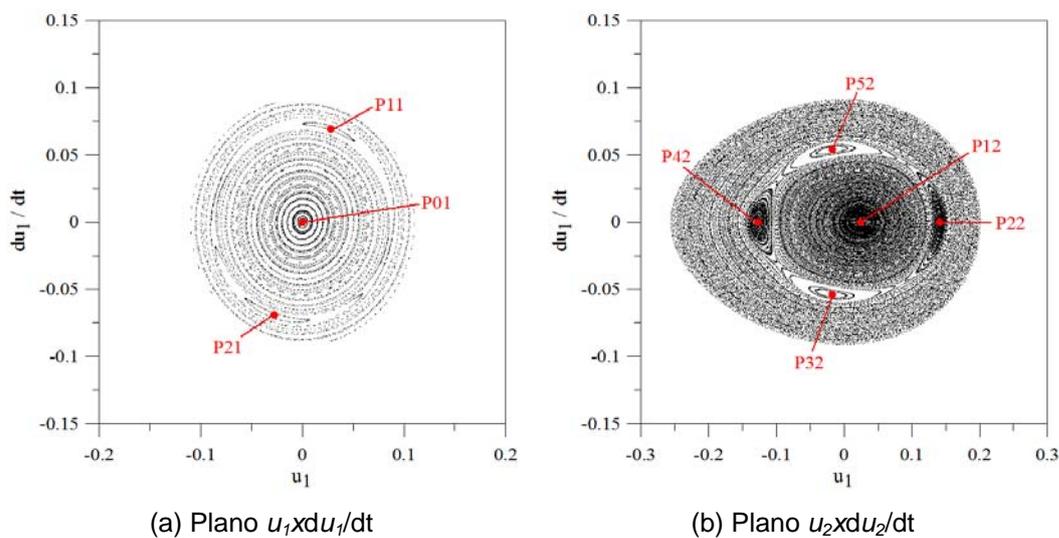
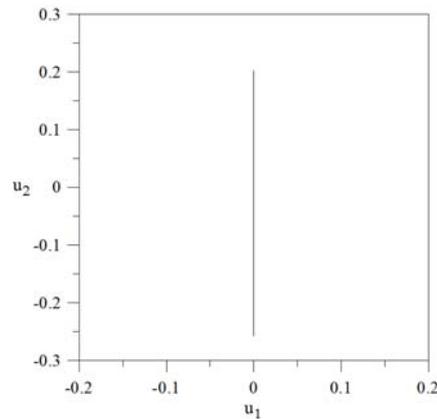


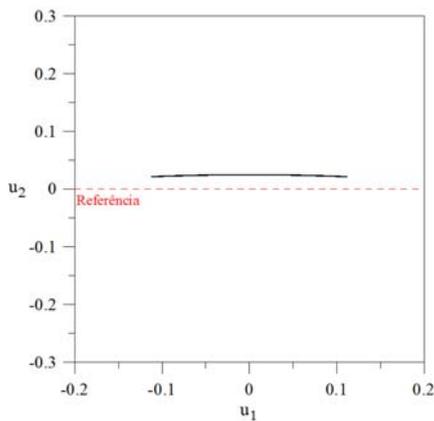
Figura 4.54: Seções de Poincaré com 50 % da energia do ponto de sela, para  $\alpha = 1.18$ ,  $\omega_1 = 0.414$ ,  $\omega_2 = 0.828$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de torre estaiada considerando a influência da rigidez relativa das molas.

Para 50% de energia e também para níveis inferiores verifica-se a existência de movimentos quase-periódicos no entorno do ponto P01, que é referente à origem ( $u_1 = \dot{u}_1 = 0.0$ ), Figura 4.54(a), correspondendo ao modo de vibração não-linear desacoplado estável no plano  $u_2 \times du_2/dt$ , como se constata nas Figuras 4.55(a) e 4.56. Os demais centros, pontos P11 e P21 – Figura 4.54(a), e pontos P12, P22, P32, P42 e P52 – Figura 4.54(b), que surgem devido ao acoplamento modal e a forte não-linearidade, são referentes a modos acoplados estáveis, que apresentam no plano de fase uma relação não-linear entre as coordenadas  $u_1$  e  $u_2$ , como se observa na Figura 4.55. Os pontos P22 e P42 e os pontos P32 e P52

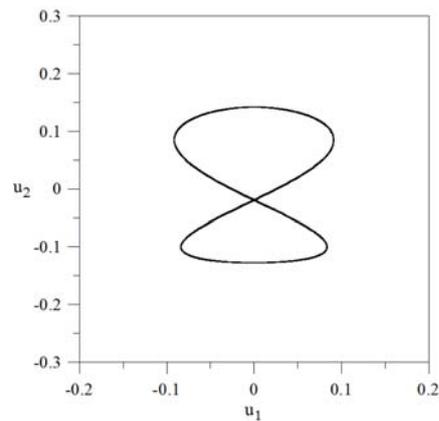
representam soluções sub-harmônicas de ordem dois, que são representadas no plano  $u_2 \times du_2 / dt$ , respectivamente, pelos pontos P11 e P21.



(a) Plano fase - P01



(b) Plano fase - P12



(c) Plano fase - P11, P21, P22, P32, P42 e P52

Figura 4.55: Comportamento no domínio do tempo dos pontos P01, P11, P21, P12, P22, P32, P42 e P52, para  $\alpha = 1.18$ ,  $\omega_1 = 0.414$ ,  $\omega_2 = 0.828$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de torre estaiada considerando a influência da rigidez relativa das molas.

A Figura 4.56 mostra a relação frequência-amplitude do modo não-linear desacoplado estável no plano  $u_2 \times du_2 / dt$ . A Figura 4.57 apresenta o comportamento dos modos não-lineares acoplados estáveis do ponto P12 (Figura 4.57(a)) e dos pontos P11, P21, P22, P32, P42 e P52 (Figura 4.57(b)).

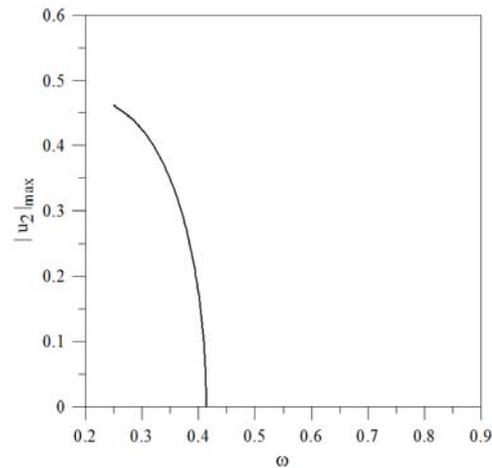
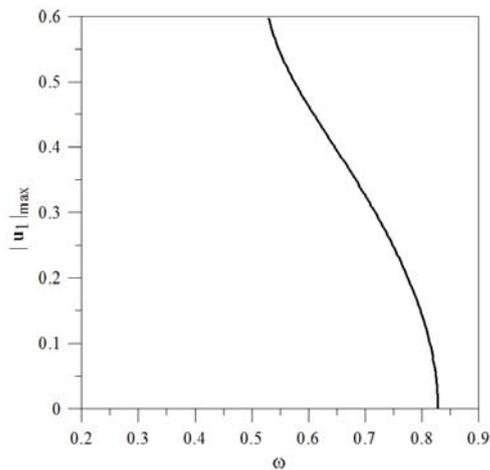
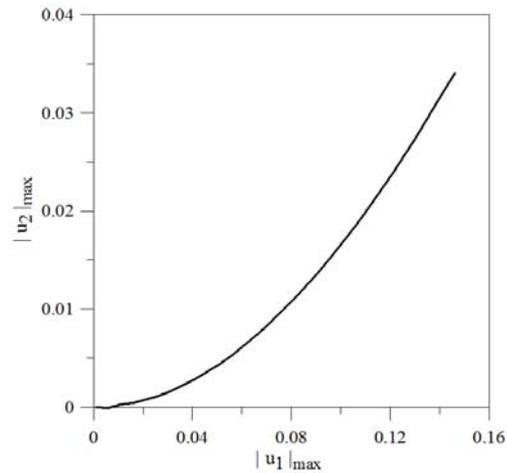


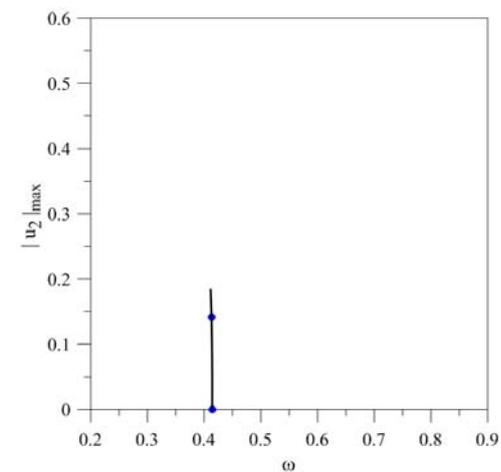
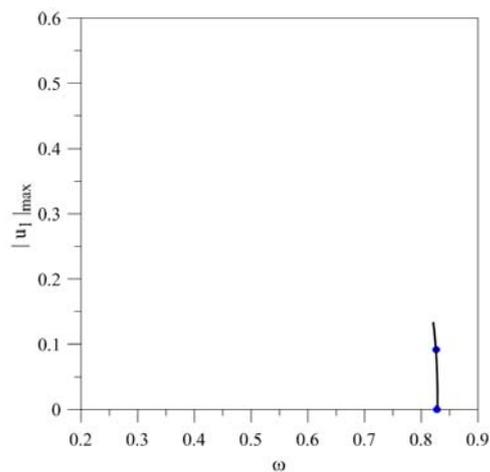
Figura 4.56: Relação frequência-amplitude do modo não-linear estável desacoplado no plano  $u_2 \times du_2/dt$ , P01, para  $\alpha = 1.18$ ,  $\omega_1 = 0.414$ ,  $\omega_2 = 0.828$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de torre estaiada considerando a influência da rigidez relativa das molas.



(a.1) Modo acoplado – P12



(a.2) Relação entre  $u_1$  e  $u_2$  - P12



(b) Pontos P11, P21, P22, P32, P42 e P52

Figura 4.57: Relações frequência-amplitude dos modos não-lineares acoplados estáveis, para  $\alpha = 1.18$ ,  $\omega_1 = 0.414$ ,  $\omega_2 = 0.828$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de torre estaiada considerando a influência da rigidez relativa das molas.

#### 4.2.4.3.

#### Modelo com Imperfeição Geométrica

Para essa análise faz-se necessário utilizar como referência a configuração de equilíbrio estático do sistema imperfeito, ou seja, partir das expressões (4.38) e (4.40). Assim, tem-se que as condições iniciais de  $\dot{u}_{D2}$  e  $\dot{u}_{D1}$ , correspondentes aos pares de condições iniciais  $(u_{D1}, \dot{u}_{D1})$  e  $(u_{D2}, \dot{u}_{D2})$ , são dados, respectivamente, por:

$$\dot{u}_{D2} = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4a_1c_1}}{2a_1} \quad (4.57a)$$

$$\dot{u}_{D1} = \frac{-b_2 \pm \sqrt{b_2^2 - 4a_2c_2}}{2a_2} \quad (4.57b)$$

sendo

$$a_1 = \frac{1}{2} \left( 1 - u_{est2}^2 + \frac{u_{est2}^2 (1 - u_{est2}^2)}{1 - \left( u_{D1} \sqrt{1 - u_{est1}^2} + u_{est1} \sqrt{1 - u_{D1}^2} \right)^2 - u_{est2}^2} \right) \quad (4.58a)$$

$$b_1 = \left[ \left( u_{D1} \sqrt{1 - u_{est1}^2} + u_{est1} \sqrt{1 - u_{D1}^2} \right) \left( \dot{u}_{D1} \sqrt{1 - u_{est1}^2} - \frac{u_{est1} u_{D1} \dot{u}_{D1}}{\sqrt{1 - u_{D1}^2}} \right) \right. \\ \left. u_{est2} \sqrt{1 - u_{est2}^2} \right] / \left( 1 - \left( u_{D1} \sqrt{1 - u_{est1}^2} + u_{est1} \sqrt{1 - u_{D1}^2} \right)^2 - u_{est2}^2 \right) \quad (4.58b)$$

$$\begin{aligned}
c_1 = & -h + \frac{1}{2} \left( \dot{u}_{D1} \sqrt{1-u_{est1}^2} - \frac{u_{est1} u_{D1} \dot{u}_{D1}}{\sqrt{1-u_{D1}^2}} \right)^2 \\
& + \left( u_{D1} \sqrt{1-u_{est1}^2} + u_{est1} \sqrt{1-u_{D1}^2} \right)^2 \left( \dot{u}_{D1} \sqrt{1-u_{est1}^2} - \frac{u_{est1} u_{D1} \dot{u}_{D1}}{\sqrt{1-u_{est1}^2}} \right)^2 / \\
& 2 \left( 1 - \left( u_{D1} \sqrt{1-u_{est1}^2} + u_{est1} \sqrt{1-u_{D1}^2} \right)^2 - u_{est2}^2 \right) \\
& + \frac{\omega_p^2}{2\lambda \text{sen}^2 \beta} \exp_{11} - \omega_p^2 \left( \sqrt{1-u_{est1}^2} - u_{est2}^2 \right. \\
& \left. - \sqrt{1 - \left( u_{D1} \sqrt{1-u_{est1}^2} + u_{est1} \sqrt{1-u_{D1}^2} \right)^2 - u_{est2}^2} \right)
\end{aligned} \tag{4.58c}$$

$$\begin{aligned}
\exp_{11} = & \left\{ \left( (\text{sen} \beta - u_{10})^2 + (\cos \beta - u_{20})^2 + 1 - u_{10}^2 - u_{20}^2 \right)^{1/2} \right. \\
& - \left[ \left( \text{sen} \beta - u_{D1} \sqrt{1-u_{est1}^2} - u_{est1} \sqrt{1-u_{D1}^2} \right)^2 + (\cos \beta - u_{est2})^2 \right. \\
& \left. \left. + 1 - \left( u_{D1} \sqrt{1-u_{est1}^2} + u_{est1} \sqrt{1-u_{D1}^2} \right)^2 - u_{est2}^2 \right]^{1/2} \right\}^2 \\
& - \left\{ \left( (\text{sen} \beta - u_{10})^2 + (\cos \beta - u_{20})^2 + 1 - u_{10}^2 - u_{20}^2 \right)^{1/2} \right. \\
& - \left. \left( (\text{sen} \beta - u_{est1})^2 + (\cos \beta - u_{est2})^2 + 1 - u_{est1}^2 - u_{est2}^2 \right)^{1/2} \right\}^2 \\
& + \left\{ \left( (-\text{sen} \beta - u_{10})^2 + (\cos \beta - u_{20})^2 + 1 - u_{10}^2 - u_{20}^2 \right)^{1/2} \right. \\
& - \left[ \left( -\text{sen} \beta - u_{D1} \sqrt{1-u_{est1}^2} - u_{est1} \sqrt{1-u_{D1}^2} \right)^2 + (\cos \beta - u_{est2})^2 \right. \\
& \left. \left. + 1 - \left( u_{D1} \sqrt{1-u_{est1}^2} + u_{est1} \sqrt{1-u_{D1}^2} \right)^2 - u_{est2}^2 \right]^{1/2} \right\}^2 \\
& - \left\{ \left( (-\text{sen} \beta - u_{10})^2 + (\cos \beta - u_{20})^2 + 1 - u_{10}^2 - u_{20}^2 \right)^{1/2} \right. \\
& - \left. \left( (-\text{sen} \beta - u_{est1})^2 + (\cos \beta - u_{est2})^2 + 1 - u_{est1}^2 - u_{est2}^2 \right)^{1/2} \right\}^2
\end{aligned} \tag{4.58d}$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left( 1 - u_{est1}^2 + \frac{u_{est1}^2 (1 - u_{est1}^2)}{1 - \left( u_{D2} \sqrt{1-u_{est2}^2} + u_{est2} \sqrt{1-u_{D2}^2} \right)^2 - u_{est1}^2} \right) \tag{4.58e}$$

$$b_2 = \left[ \left( u_{D2} \sqrt{1-u_{est2}^2} + u_{est2} \sqrt{1-u_{D2}^2} \right) \left( \dot{u}_{D2} \sqrt{1-u_{est2}^2} - \frac{u_{est2} u_{D2} \dot{u}_{D2}}{\sqrt{1-u_{D2}^2}} \right) \right. \\ \left. u_{est1} \sqrt{1-u_{est1}^2} \right] / \left[ \left( u_{D2} \sqrt{1-u_{est2}^2} + u_{est2} \sqrt{1-u_{D2}^2} \right)^2 - u_{est1}^2 \right] \quad (4.58f)$$

$$c_2 = -h + \frac{1}{2} \left( \dot{u}_{D2} \sqrt{1-u_{est2}^2} - \frac{u_{est2} u_{D2} \dot{u}_{D2}}{\sqrt{1-u_{D2}^2}} \right)^2 \\ + \left( u_{D2} \sqrt{1-u_{est2}^2} + u_{est2} \sqrt{1-u_{D2}^2} \right)^2 \left( \dot{u}_{D2} \sqrt{1-u_{est2}^2} - \frac{u_{est2} u_{D2} \dot{u}_{D2}}{\sqrt{1-u_{est2}^2}} \right)^2 / \\ 2 \left( 1 - \left( u_{D2} \sqrt{1-u_{est2}^2} + u_{est2} \sqrt{1-u_{D2}^2} \right)^2 - u_{est1}^2 \right) \quad (4.58g)$$

$$+ \frac{2\omega_p^2}{\lambda} \left( 1 - \frac{1}{2\text{sen}^2\beta} \right) \exp_{12} + \frac{\omega_p^2}{2\lambda\text{sen}^2\beta} \exp_{22} - \omega_p^2 \left( \sqrt{1-u_{est1}^2} - u_{est2}^2 \right. \\ \left. - \sqrt{1 - \left( u_{D2} \sqrt{1-u_{est2}^2} + u_{est2} \sqrt{1-u_{D2}^2} \right)^2 - u_{est1}^2} \right) \\ \exp_{22} = \left\{ \left( (\text{sen}\beta - u_{10})^2 + (\text{cos}\beta - u_{20})^2 + 1 - u_{10}^2 - u_{20}^2 \right)^{1/2} \right. \\ \left. - \left[ \left( \text{cos}\beta - u_{D2} \sqrt{1-u_{est2}^2} - u_{est2} \sqrt{1-u_{D2}^2} \right)^2 + (\text{sen}\beta - u_{est1})^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 1 - \left( u_{D2} \sqrt{1-u_{est2}^2} + u_{est2} \sqrt{1-u_{D2}^2} \right)^2 - u_{est1}^2 \right]^{1/2} \right\}^2 \\ - \left\{ \left( (\text{sen}\beta - u_{10})^2 + (\text{cos}\beta - u_{20})^2 + 1 - u_{10}^2 - u_{20}^2 \right)^{1/2} \right. \\ \left. - \left( (\text{sen}\beta - u_{est1})^2 + (\text{cos}\beta - u_{est2})^2 + 1 - u_{est1}^2 - u_{est2}^2 \right)^{1/2} \right\}^2 \\ + \left\{ \left( (-\text{sen}\beta - u_{10})^2 + (\text{cos}\beta - u_{20})^2 + 1 - u_{10}^2 - u_{20}^2 \right)^{1/2} \right. \\ \left. - \left[ \left( \text{cos}\beta - u_{D2} \sqrt{1-u_{est2}^2} - u_{est2} \sqrt{1-u_{D2}^2} \right)^2 + (-\text{sen}\beta - u_{est1})^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 1 - \left( u_{D2} \sqrt{1-u_{est2}^2} + u_{est2} \sqrt{1-u_{D2}^2} \right)^2 - u_{est1}^2 \right]^{1/2} \right\}^2 \\ - \left\{ \left( (-\text{sen}\beta - u_{10})^2 + (\text{cos}\beta - u_{20})^2 + 1 - u_{10}^2 - u_{20}^2 \right)^{1/2} \right. \\ \left. - \left( (-\text{sen}\beta - u_{est1})^2 + (\text{cos}\beta - u_{est2})^2 + 1 - u_{est1}^2 - u_{est2}^2 \right)^{1/2} \right\}^2 \quad (4.58h)$$

$$\exp_{12} = \left( \sqrt{2 - 2u_{20}} - \sqrt{2 - 2u_{est2} \sqrt{1 - u_{D2}^2} - 2u_{D2} \sqrt{1 - u_{est2}^2}} \right)^2 - \left( \sqrt{2 - 2u_{20}} - \sqrt{2 - 2u_{est2}} \right)^2 \quad (4.58i)$$

As seções de Poincaré são delimitadas por:

$$\begin{aligned} h = & \frac{1}{2} \left( \dot{u}_{D1} \sqrt{1 - u_{est1}^2} - \frac{u_{est1} u_{D1} \dot{u}_{D1}}{\sqrt{1 - u_{D1}^2}} \right)^2 \\ & + \left( u_{D1} \sqrt{1 - u_{est1}^2} + u_{est1} \sqrt{1 - u_{D1}^2} \right)^2 \left( \dot{u}_{D1} \sqrt{1 - u_{est1}^2} - \frac{u_{est1} u_{D1} \dot{u}_{D1}}{\sqrt{1 - u_{D1}^2}} \right)^2 / \\ & 2 \left( 1 - \left( u_{D1} \sqrt{1 - u_{est1}^2} + u_{est1} \sqrt{1 - u_{D1}^2} \right)^2 - u_{est2}^2 \right) \\ & + \frac{\omega_p^2}{2\lambda \text{sen}^2 \beta} \exp_{11} - \omega_p^2 \left( \sqrt{1 - u_{est1}^2} - u_{est2} \right) \\ & - \sqrt{1 - \left( u_{D1} \sqrt{1 - u_{est1}^2} + u_{est1} \sqrt{1 - u_{D1}^2} \right)^2 - u_{est2}^2} \end{aligned} \quad (4.59a)$$

$$\begin{aligned} h = & \frac{1}{2} \left( \dot{u}_{D2} \sqrt{1 - u_{est2}^2} - \frac{u_{est2} u_{D2} \dot{u}_{D2}}{\sqrt{1 - u_{D2}^2}} \right)^2 \\ & + \left( u_{D2} \sqrt{1 - u_{est2}^2} + u_{est2} \sqrt{1 - u_{D2}^2} \right)^2 \left( \dot{u}_{D2} \sqrt{1 - u_{est2}^2} - \frac{u_{est2} u_{D2} \dot{u}_{D2}}{\sqrt{1 - u_{D2}^2}} \right)^2 / \\ & 2 \left( 1 - \left( u_{D2} \sqrt{1 - u_{est2}^2} + u_{est2} \sqrt{1 - u_{D2}^2} \right)^2 - u_{est1}^2 \right) \\ & + \frac{2\omega_p^2}{\lambda} \left( 1 - \frac{1}{2\text{sen}^2 \beta} \right) \exp_{12} + \frac{\omega_p^2}{2\lambda \text{sen}^2 \beta} \exp_{22} - \omega_p^2 \left( \sqrt{1 - u_{est1}^2} - u_{est2} \right) \\ & - \sqrt{1 - \left( u_{D2} \sqrt{1 - u_{est2}^2} + u_{est2} \sqrt{1 - u_{D2}^2} \right)^2 - u_{est1}^2} \end{aligned} \quad (4.59b)$$

Apresentam-se na Figura 4.58 as seções de Poincaré para 50% da energia do respectivo ponto de sela, considerando  $\psi = 0^\circ$ ,  $\phi = 1^\circ$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Neste caso têm-se duas frequências distintas, sendo  $\omega_1 = 0.609$  e  $\omega_2 = 0.697$ . Verifica-se que o sistema não apresenta nenhum modo desacoplado e

nenhum modo similar. Quando se observa as seções de Poincaré verifica-se a existência de dois modos acoplados estáveis, pontos P11 e P21 (Figura 4.58(a)) e pontos P12 e P22 (Figura 4.58(b)). A Figura 4.59 mostra os planos de fase dos pontos P11, P21, P12 e P22, onde se observa uma relação não-linear entre as coordenadas.

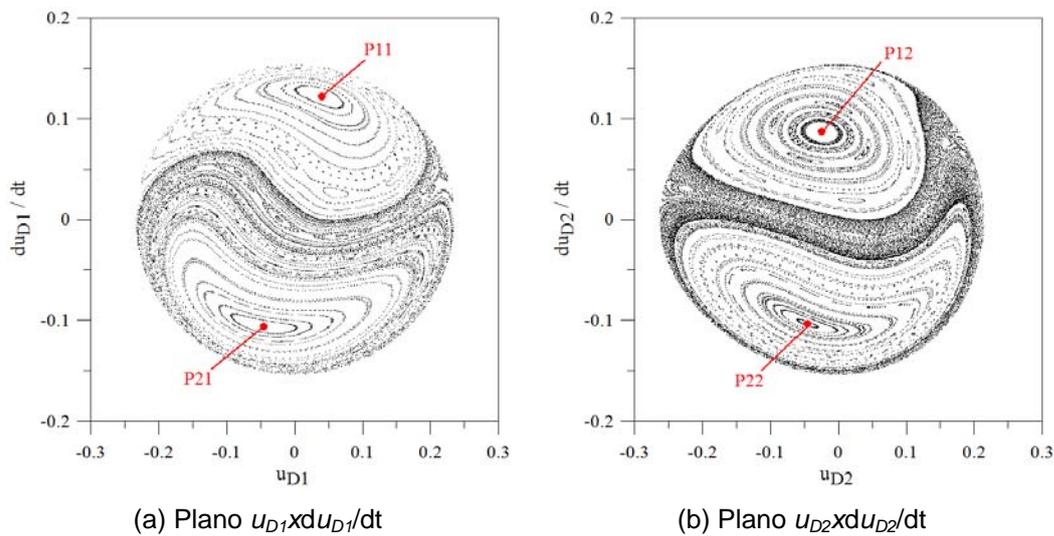


Figura 4.58: Seções de Poincaré com 50 % da energia do ponto de sela, para  $\psi = 0^\circ$ ,  $\phi = 1^\circ$ ,  $\omega_1 = 0.609$ ,  $\omega_2 = 0.697$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de torre estaiada com imperfeição geométrica.

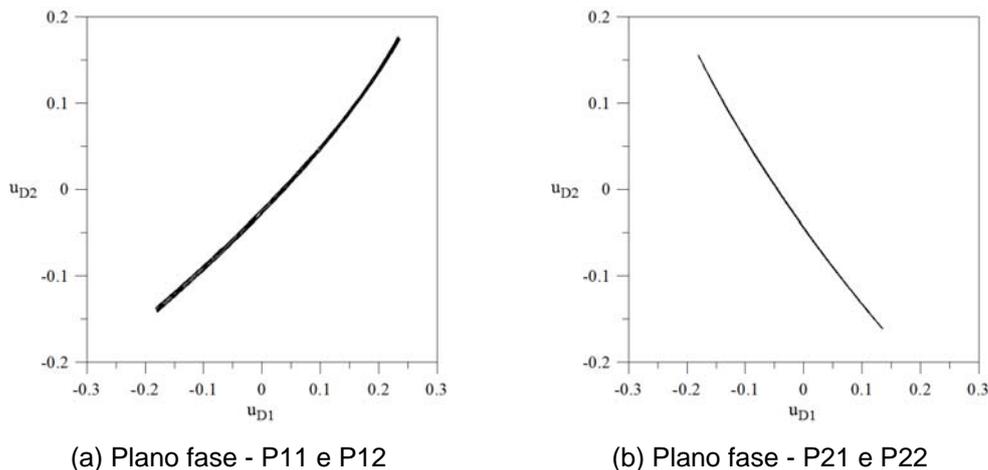
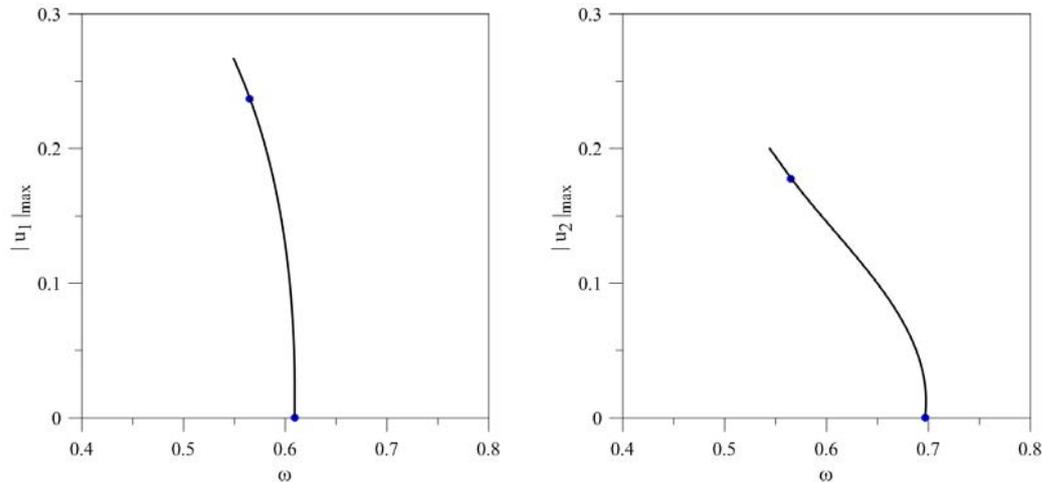


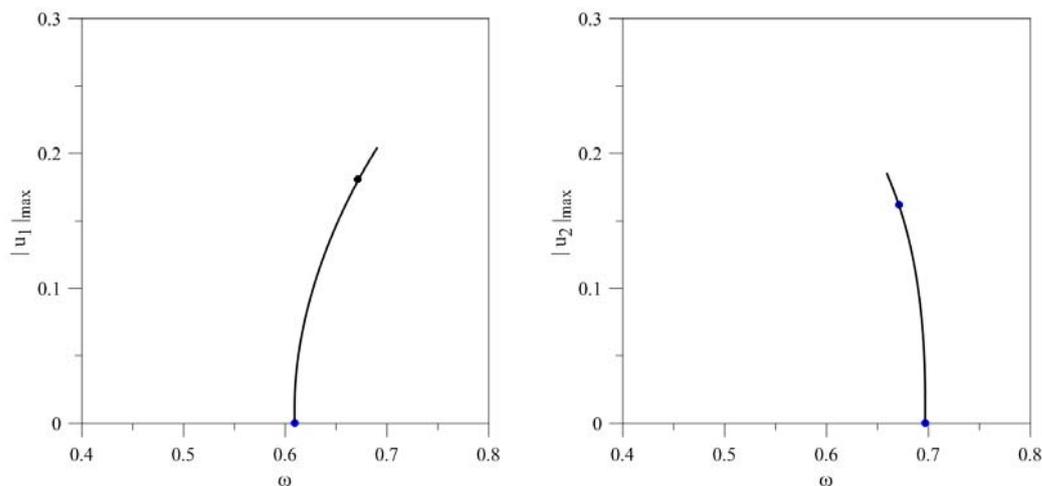
Figura 4.59: Comportamento no domínio do tempo dos pontos P11, P21, P12 e P22, para  $\psi = 0^\circ$ ,  $\phi = 1^\circ$ ,  $\omega_1 = 0.609$ ,  $\omega_2 = 0.697$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de torre estaiada com imperfeição geométrica.

Para os pontos P11 e P12 as coordenadas estão em fase, e para P21 e P22, fora de fase. Estes centros surgem do acoplamento de modos não-lineares com

cada coordenada vibrando com uma frequência de vibração. Isto significa que há dois osciladores não-lineares associados a cada centro. A Figura 4.60 apresenta as relações frequência-amplitude associadas às coordenadas que contribuem para cada movimento periódico identificado nas seções de Poincaré.



(a) Pontos P11 e P12



(b) Pontos P21 e P22

Figura 4.60: Relações frequência-amplitude dos modos acoplados associados aos pontos P11, P21, P12 e P22, para  $\psi = 0^\circ$ ,  $\phi = 1^\circ$ ,  $\omega_1 = 0.609$ ,  $\omega_2 = 0.697$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de torre estaiada com imperfeição geométrica.

Apresentam-se na Figura 4.61 as seções de Poincaré para diferentes níveis de energia, considerando  $\psi = 90^\circ$ ,  $\phi = 1^\circ$ . Para este caso têm-se duas frequências naturais distintas, sendo  $\omega_1 = 0.612$  e  $\omega_2 = 0.693$ . Observa-se na seção de Poincaré do plano  $u_{D1} \times du_{D1}/dt$ , para um nível baixo de energia (5%  $h_{sela}$ ), a presença de um centro, P01, na origem ( $u_{D1} = \dot{u}_{D1} = 0.0$ ), que corresponde ao

modo de vibração não-linear desacoplado estável no plano  $u_{D2} \times du_{D2}/dt$ , como se observa na Figuras 4.62(a). A correspondente relação frequência-amplitude é apresentada na Figura 4.63. Para o nível médio de energia (50%  $h_{sela}$ ) o ponto P01 torna-se uma sela que separa as novas soluções P11 e P21, que correspondem a modos acoplados estáveis, Figura 4.61(b.1).

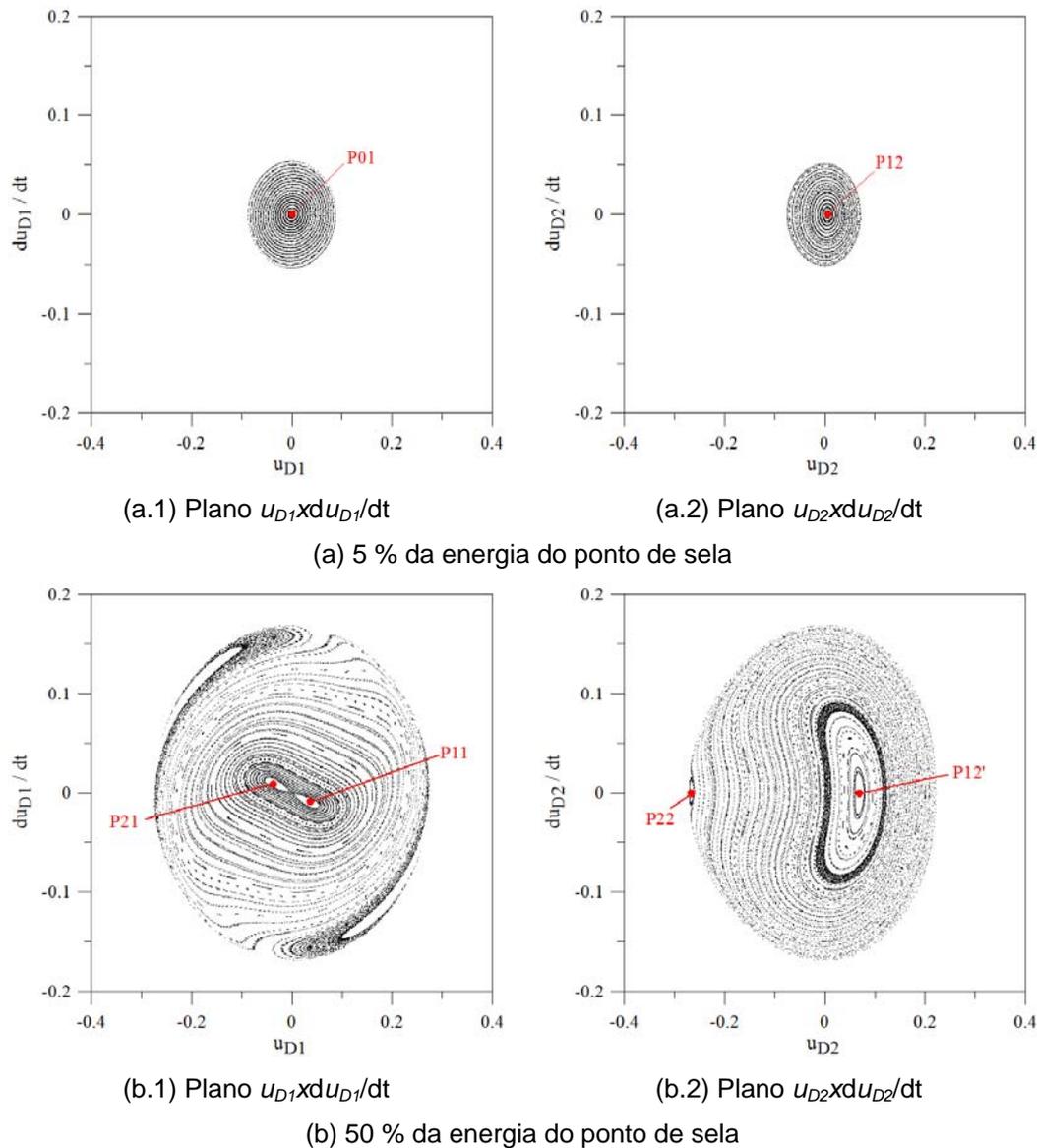


Figura 4.61: Seções de Poincaré para  $\psi = 90^\circ$ ,  $\phi = 1^\circ$ ,  $\omega_1 = 0.612$ ,  $\omega_2 = 0.693$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de torre estaiada com imperfeição geométrica.

Na seção de Poincaré  $u_{D2} \times du_{D2}/dt$ , considerando um baixo nível de energia, verifica-se o surgimento do centro P12 que corresponde a um modo acoplado, podendo-se observar que este ponto ainda está presente para 50% da

energia do ponto de sela, P12' – Figura 4.61(b.2), onde se verifica também presença do centro P22 que corresponde ao modo acoplado associado aos pontos P11 e P21. Os planos de fase das soluções periódicas identificadas nas seções de Poincaré mostrados na Figura 4.61 podem ser observados na Figura 4.62.

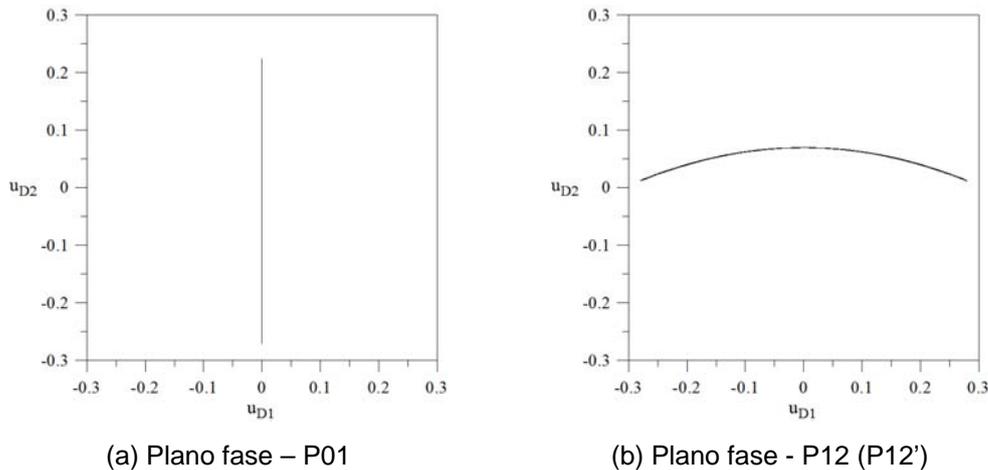


Figura 4.62: Comportamento no domínio do tempo dos pontos P01 e P12 (P12'), para  $\psi = 90^\circ$ ,  $\phi = 1^\circ$ ,  $\omega_1 = 0.612$ ,  $\omega_2 = 0.693$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de torre estaiada com imperfeição geométrica.

Por fim, apresenta-se a relação frequência-amplitude que representa o modo não-linear desacoplado estável no plano  $u_{D2} \times du_{D2}/dt$  na Figuras 4.63 e a relação frequência-amplitude que representa o modo não-linear acoplado estável, correspondente ao ponto P12, Figura 4.64.

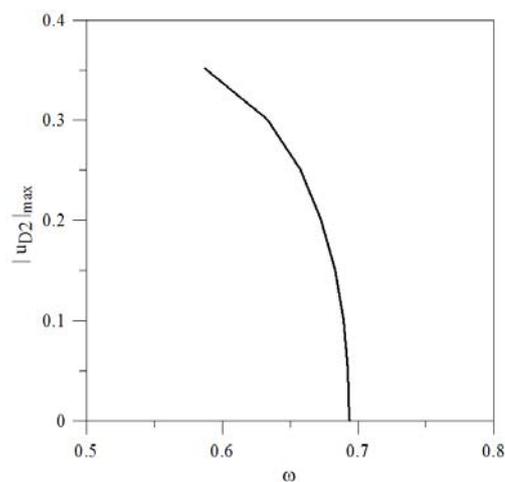


Figura 4.63: Relação frequência-amplitude do modo não-linear estável desacoplado no plano  $u_2 \times du_2/dt$ , para  $\psi = 90^\circ$ ,  $\phi = 1^\circ$ ,  $\omega_1 = 0.612$ ,  $\omega_2 = 0.693$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de torre estaiada com imperfeição geométrica.

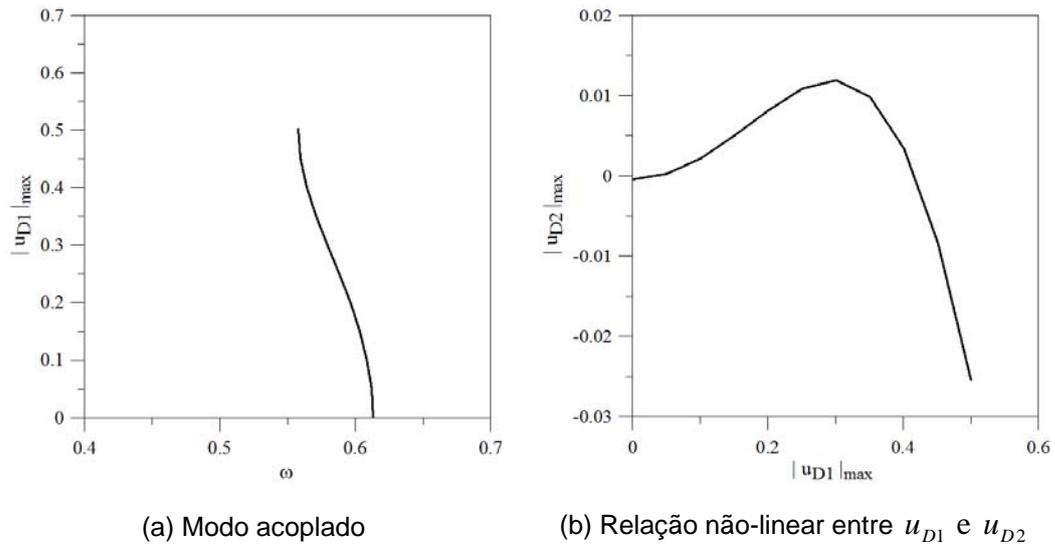


Figura 4.64: Relação frequência-amplitude do modo não-linear acoplado estável associado ao ponto P12 (P12'), para  $\psi = 90^\circ$ ,  $\phi = 1^\circ$ ,  $\omega_1 = 0.612$ ,  $\omega_2 = 0.693$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\beta = 120^\circ$  e  $\omega_p = 1.0/s$ . Modelo de torre estaiada com imperfeição geométrica.