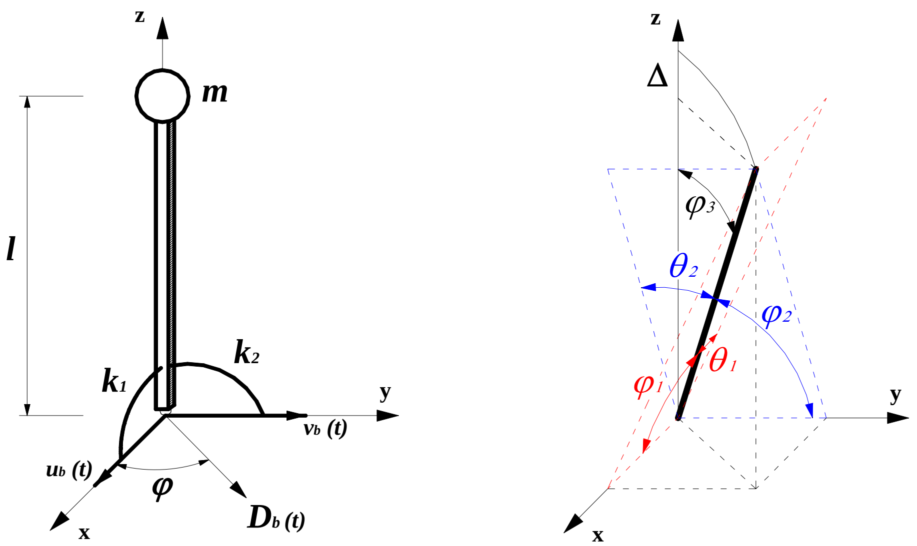
2
Formulação do Problema

2.1.
Modelo de Augusti

O primeiro modelo a ser analisado é classicamente conhecido como “Modelo de Augusti”, Augusti (1964). Na literatura encontram-se diversos estudos sobre a estabilidade do modelo de Augusti sob carga estática vertical, dentre estes se destacam Croll & Walker (1972), Pignataro *et al.* (1991), Bazant & Cedolin (1991), Del Prado (1999) e Raftoyiannis & Kounadis (2000). A Figura 2.1 apresenta o modelo de Augusti e as variáveis que o caracterizam.

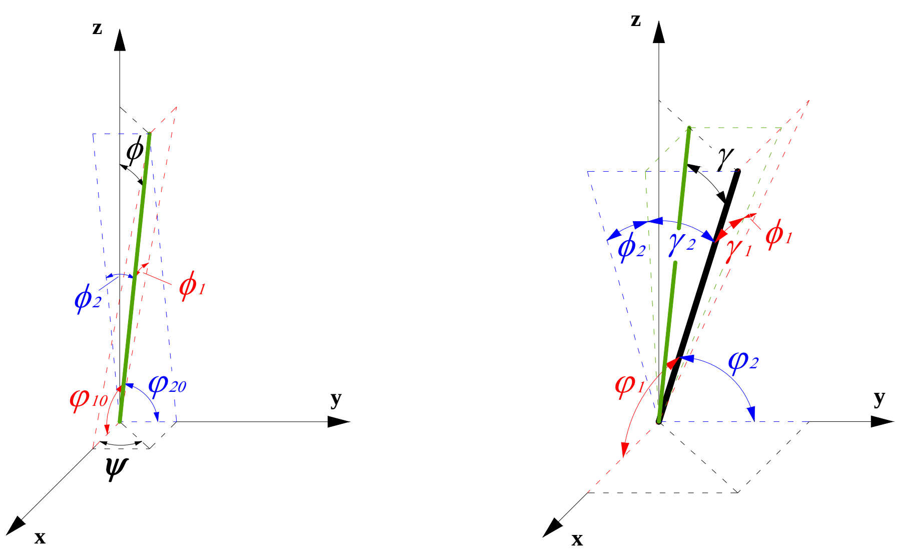


(a) Modelo indeformado (b) Modelo deformado

Figura 2.1: Modelo de Augusti.

O modelo é constituído de uma barra rígida rotulada na extremidade inferior e livre na extremidade superior, com os deslocamentos laterais restritos por duas molas lineares rotacionais que se encontram inicialmente em dois planos perpendiculares e giram com a própria barra. A estrutura está submetida a uma excitação harmônica de base, $D_b(t)$, cuja direção é definida por um ângulo φ, a partir do eixo x. O deslocamento imposto na excitação de base $D_b(t)$ é decomposto em duas componentes, $u_b(t)$ na direção x e $v_b(t)$ na direção y. A extremidade superior possui uma massa concentrada que representa um carregamento axial vertical.

Na Figura 2.1 l é o comprimento da barra, m é a massa concentrada na extremidade livre da barra, k_1 e k_2 são os coeficientes de rigidez das molas, respectivamente nos planos $x \times z$ e $y \times z$, e θ_1 e θ_2 representam as rotações impostas nas molas, k_1 e k_2, formando o complemento dos cossenos diretores, sendo este os dois graus de liberdade do sistema, Δ é o deslocamento vertical do topo da barra e φ_1, φ_2 e φ_3 são os ângulos formados entre a coluna em uma posição arbitrária e, respectivamente, os eixos x, y e z.



(a) Configuração inicial indeformada (b) Configuração final deformada

Figura 2.2: Modelo de Augusti imperfeito.

Considera-se, ainda, na formulação do problema a influência da rigidez relativa das molas e a possível existência de imperfeições geométricas. Com a introdução da imperfeição geométrica a configuração inicial indeformada do sistema é definida pelos ângulos ϕ e ψ, onde ϕ representa a inclinação da barra e ψ é o ângulo no plano $x \times y$ que define a direção da projeção da coluna imperfeita neste plano, como mostra a Figura 2.2(a). A configuração final deformada é apresentada na Figura 2.2(b). Os ângulos ϕ_1 e ϕ_2 são as parcelas da imperfeição geométrica, respectivamente nas direções dos graus de liberdade θ_1 e

θ_2. Os ângulos γ_1 e γ_2 representam respectivamente as deformações das molas nas direções θ_1 e θ_2.

A partir das Figuras 2.1 e 2.2, pode-se escrever que:

$$\varphi_3 = \phi + \gamma\,,\ \theta_1 = \phi_1 + \gamma_1\,,\ \theta_2 = \phi_2 + \gamma_2 \qquad \text{(2.1a, b, c)}$$

e, observando a Figura 2.2(a), tem-se as relações geométricas:

$$l\cos\varphi_{10} = l\,\mathrm{sen}\phi\cos\psi \ \rightarrow\ \varphi_{10} = \arccos(\mathrm{sen}\phi\cos\psi) \qquad \text{(2.2a)}$$

$$l\cos\varphi_{20} = l\,\mathrm{sen}\phi\,\mathrm{sen}\,\psi \ \rightarrow\ \varphi_{20} = \arccos(\mathrm{sen}\phi\sin\psi) \qquad \text{(2.2b)}$$

$$\phi_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi_{10} \qquad \text{(2.2c)}$$

$$\phi_2 = \frac{\pi}{2} - \varphi_{20} \qquad \text{(2.2d)}$$

2.1.1.
Energia Cinética

A energia cinética devida à massa concentrada é dada por:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \qquad \text{(2.3)}$$

onde $\dot{x}$, $\dot{y}$ e $\dot{z}$ são as componentes de velocidade referentes aos deslocamentos x, y e z da massa m.

Da Figura 2.1(b), tem que os deslocamentos de m são:

$$x = l\cos\varphi_1 + u_b\,,\ y = l\cos\varphi_2 + v_b\,,\ z = l\cos\varphi_3 \qquad \text{(2.4a, b, c)}$$

Para representar o sistema com apenas dois graus de liberdade é necessário expressar z em função de φ_1 e φ_2. Nesse contexto, sabe-se que a relação trigonométrica entre os cossenos diretores, φ_1, φ_2 e φ_3, é:

$$\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 = 1 \tag{2.5}$$

e, conseqüentemente, tem-se:

$$z = l\sqrt{1 - \cos^2\varphi_1 - \cos^2\varphi_2} \tag{2.6}$$

Analisando a Figura 2.1(b), observa-se que:

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \theta_1\,,\ \varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_2 \tag{2.7a, b}$$

Assim, tem-se que os deslocamentos da massa m são dados por:

$$x = l\mathrm{sen}\theta_1 + u_b \tag{2.8a}$$

$$y = l\mathrm{sen}\theta_2 + v_b \tag{2.8b}$$

$$z = l\sqrt{1 - \mathrm{sen}^2\theta_1 - \mathrm{sen}^2\theta_2} \tag{2.8c}$$

Por fim, derivando (2.8) em relação ao tempo e substituindo estas componentes de velocidades na expressão (2.3), obtém-se a energia cinética em termos dos graus de liberdade θ_1 e θ_2:

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2}m\Big((l\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + \dot{u}_b)^2 + (l\dot{\theta}_2\cos\theta_2 + \dot{v}_b)^2 \\ + \frac{l^2\left(\dot{\theta}_1\cos\theta_1\mathrm{sen}\theta_1 + \dot{\theta}_2\cos\theta_2\mathrm{sen}\theta_2\right)^2}{\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 - 1}\Big) \end{aligned} \tag{2.9}$$

2.1.2. Energia Potencial Total

A energia potencial total é dada pela soma da parcela da energia interna de deformação e a parcela do potencial gravitacional das cargas externas.

Considerando a coluna imperfeita e utilizando as expressões (2.1), tem-se que a parcela da energia interna de deformação, U, e a parcela do potencial gravitacional das cargas externas, L_p, são:

$$U = \frac{1}{2}k_1(\theta_1 - \phi_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(\theta_2 - \phi_2)^2 \tag{2.10a}$$

$$L_p = P\Delta_f \tag{2.10b}$$

onde P é o peso da massa concentrada, $P = mg$, e g é a aceleração da gravidade.

A variável Δ_f representa o deslocamento vertical da carga na coluna imperfeita e pode ser calculado como a diferença entre o deslocamento vertical total de m medido em relação à configuração indeformada da coluna perfeita (posição de referência), Δ, e o deslocamento vertical de m, Δ_0, devido à imperfeição geométrica, isto é, $\Delta_f = \Delta - \Delta_0$. Estas parcelas são dadas por:

$$\Delta = l - z = l - l\sqrt{1 - \mathrm{sen}^2\theta_1 - \mathrm{sen}^2\theta_2} \tag{2.11a}$$

$$\Delta_0 = l - l\sqrt{1 - \mathrm{sen}^2\phi_1 - \mathrm{sen}^2\phi_2} \tag{2.11b}$$

Assim, a energia potencial total do sistema imperfeito pode ser escrita em termos dos graus de liberdade θ_1 e θ_2 como:

$$\begin{aligned} V = U - L_p &= \frac{1}{2}k_1(\theta_1 - \phi_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(\theta_2 - \phi_2)^2 \\ &- Pl\left(\sqrt{1 - \mathrm{sen}^2\phi_1 - \mathrm{sen}^2\phi_2} - \sqrt{1 - \mathrm{sen}^2\theta_1 - \mathrm{sen}^2\theta_2}\right) \end{aligned} \tag{2.12}$$

2.1.3. Amortecimento

O amortecimento está presente em todos os sistemas dinâmicos. Entretanto é difícil a descrição real da força de amortecimento, embora seja possível a admissão de modelos ideais de amortecimento, que muitas vezes resultam em prognósticos satisfatórios da resposta. Dentre esses modelos, a força de amortecimento viscoso, proporcional à velocidade do sistema, conduz a um tratamento matemático simples. A presença do agente amortecedor muda as características do movimento, passando-se a ter um movimento amortecido ou até sem caráter oscilatório.

Para se considerar o amortecimento, adiciona-se ao funcional de energia a parcela de trabalho das forças não-conservativas:

$$E = \frac{1}{2} C_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} C_2 \dot{\theta}_2^2 \tag{2.13}$$

onde C_i são os parâmetros de amortecimento que podem ser expressos em termos das taxas de amortecimento, ξ_i, e das freqüências naturais do modelo, ω_i (Meirovitch, 1975).

Considerando um sistema em vibração livre, os valores de ξ_i determinam o caráter oscilatório do sistema. Se os parâmetros $\xi_i < 1.0$ têm-se um movimento oscilatório subamortecido, quando $\xi_i > 1.0$ o movimento é superamortecido. Para $\xi_i = 1.0$ tem-se o caso crítico.

2.1.4. Função de Lagrange

Com base nas expressões da energia cinética (2.9), da energia potencial total (2.12) e do amortecimento (2.13), tem-se que a função de Lagrange do modelo de Augusti, $L = T + E - V$, é dada por:

$$\begin{aligned} L = {} & \frac{1}{2} m \Bigg((l\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + \dot{u}_b)^2 + (l\dot{\theta}_2 \cos\theta_2 + \dot{v}_b)^2 \\ & + \frac{l^2 \left(\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_1 + \dot{\theta}_2 \cos\theta_2 \operatorname{sen}\theta_2 \right)^2}{\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 - 1} \Bigg) + \frac{1}{2} C_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} C_2 \dot{\theta}_2^2 \\ & - \frac{1}{2} k_1 (\theta_1 - \phi_1)^2 - \frac{1}{2} k_2 (\theta_2 - \phi_2)^2 \\ & + Pl \left(\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\phi_1 - \operatorname{sen}^2\phi_2} - \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta_1 - \operatorname{sen}^2\theta_2} \right) \end{aligned} \tag{2.14}$$

2.1.5. Equações de Movimento

As equações de movimento são obtidas derivando-se a equação diferencial de Euler-Lagrange que, em termos de um conjunto de coordenadas generalizadas q_i (θ_1 e θ_2), são dadas por:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(T)}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial(T)}{\partial q_i}+\frac{\partial(V)}{\partial q_i}+\frac{\partial(E)}{\partial\dot{q}_i}=0 \qquad (2.15)$$

2.2. Modelo de Torre Estaiada

O segundo modelo analisado nesta tese é um sistema simplificado de torre estaiada. O seu comportamento estático foi estudado em detalhes por Thompson e colaboradores (ver, por exemplo, Thompson & Gaspar, 1977; Thompson & Hunt, 1984; Thompson & Stewart, 1987).

O modelo e as variáveis que o caracterizam são apresentados na Figura 2.3.

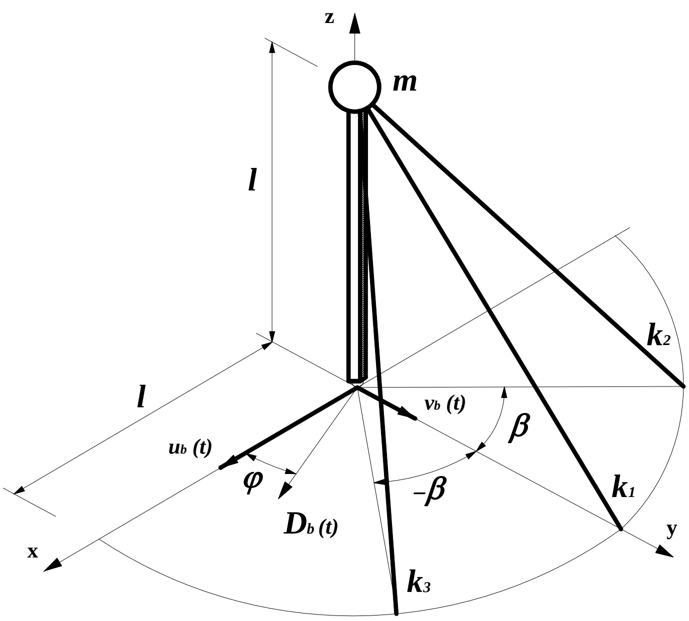


Figura 2.3: Modelo simplificado de torre estaiada.

O modelo é constituído por uma barra rígida rotulada na extremidade inferior e livre na extremidade superior, sendo que na extremidade superior é aplicada uma carga axial vertical representada pelo peso da massa concentrada, m. Os deslocamentos laterais estão restritos por três molas lineares, inclinadas inicialmente a $45°$. A primeira mola, de rigidez k_1, localiza-se no plano $y \times z$, enquanto as demais, k_2 e k_3, estão localizadas simetricamente em relação ao eixo y, sendo suas posições definidas pelo ângulo β.

Como no modelo de Augusti, Figura 2.1(b), o presente modelo está sob a ação de uma excitação harmônica de base $D_b(t)$. Os ângulos θ_1 e θ_2 representam os complementos dos cossenos diretores e Δ é o deslocamento vertical do topo da barra. φ_1, φ_2 e φ_3 são os ângulos entre a coluna inclinada e, respectivamente, os eixos x, y e z.

No presente modelo são utilizadas as mesmas relações geométricas derivadas para o modelo de Augusti, pois, como se observa nas Figuras 2.1(a) e 2.3, tem-se para os dois modelos o mesmo sistema de referência. Assim, as expressões (2.1) e (2.2) são usadas para a introdução da imperfeição geométrica na formulação.

2.2.1.
Energia Cinética

A energia cinética do segundo modelo é dada pela expressão (2.3). Observando a Figura 2.1(b), pode-se verificar que os deslocamentos da massa m são:

$$x = l\,\mathrm{sen}\theta_1 + u_b = lu_1 + u_b \tag{2.16a}$$

$$y = l\,\mathrm{sen}\theta_2 + v_b = lu_2 + v_b \tag{2.16b}$$

$$z = l\sqrt{1 - \mathrm{sen}^2\theta_1 - \mathrm{sen}^2\theta_2} = l\sqrt{1 - {u_1}^2 - {u_2}^2} \tag{2.16c}$$

onde considera-se, para simplificação, as variáveis auxiliares $u_1 = \mathrm{sen}\theta_1$ e $u_2 = \mathrm{sen}\theta_2$, que são adotadas como os graus de liberdade do segundo modelo.

Derivando (2.16) com relação ao tempo e substituindo as componentes de velocidades em (2.3), obtém-se a energia cinética em termos dos graus de liberdade u_1 e u_2:

$$T = \frac{1}{2}m\left((l\dot{u}_1 + \dot{u}_b)^2 + (l\dot{u}_2 + \dot{v}_b)^2 - \frac{(l\dot{u}_1 u_1 + l\dot{u}_2 u_2)^2}{u_1^{\ 2} + u_2^{\ 2} - 1} \right) \tag{2.17}$$

2.2.2. Energia Potencial Total

Com o auxilio das expressões (2.1), tem-se que a energia interna de deformação, U , e o potencial gravitacional das cargas externas, L_p, são dadas por:

$$U = \frac{1}{2}k_1\Delta L_1^{\ 2} + \frac{1}{2}k_2\Delta L_2^{\ 2} + \frac{1}{2}k_3\Delta L_3^{\ 2} \tag{2.18a}$$

$$L_p = P\Delta_f \tag{2.18b}$$

onde Δ_{L1}, Δ_{L2} e Δ_{L3} representam a variação de comprimento das molas e Δ_f é a diferença entre o deslocamento vertical total de m medido em relação à configuração indeformada da coluna perfeita (posição de referência), Δ, e o deslocamento vertical de m, Δ_0, devido à imperfeição geométrica, isto é, $\Delta_f = \Delta - \Delta_0$.

A variação de comprimento das molas, Δ_{L1}, Δ_{L2} e Δ_{L3}, e o deslocamento vertical da massa *m*, Δ_f, são dados, com base na Figura 2.2, por:

$$\Delta L_1 = l\sqrt{2 - 2u_{20}} - l\sqrt{2 - 2u_2} \tag{2.19a}$$

$$\begin{aligned} \Delta L_2 = {} & l\sqrt{(\text{sen}\beta - u_{10})^2 + (\cos\beta - u_{20})^2 + 1 - u_{10}^{\ 2} - u_{20}^{\ 2}} \\ & - l\sqrt{(\text{sen}\beta - u_1)^2 + (\cos\beta - u_2)^2 + 1 - u_1^{\ 2} - u_2^{\ 2}} \end{aligned} \tag{2.19b}$$

$$\begin{aligned} \Delta L_3 = {} & l\sqrt{(-\text{sen}\beta - u_{10})^2 + (\cos\beta - u_{20})^2 + 1 - u_{10}^{\ 2} - u_{20}^{\ 2}} \\ & - l\sqrt{(-\text{sen}\beta - u_1)^2 + (\cos\beta - u_2)^2 + 1 - u_1^{\ 2} - u_2^{\ 2}} \end{aligned} \tag{2.19c}$$

$$\begin{aligned} & \Delta_f = \Delta - \Delta_0 \rightarrow \Delta = l - l\sqrt{1 - u_1^{\ 2} - u_2^{\ 2}} \text{ e} \\ & \Delta_0 = l - l\sqrt{1 - u_{10}^{\ 2} - u_{20}^{\ 2}} \end{aligned} \tag{2.19d}$$

onde

$$u_{10} = \text{sen}\phi_1 = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{10}\right) \tag{2.20a}$$

$$u_{20} = \text{sen}\phi_2 = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{20}\right) \tag{2.20b}$$

Assim, a energia potencial total do sistema, $V = U - L_p$, é dada por:

$$\begin{aligned} V = {} & \frac{1}{2}k_1 l^2\left(\sqrt{2-2u_{20}} - \sqrt{2-2u_2}\right)^2 \\ & + \frac{1}{2}k_2 l^2\left(\sqrt{(\text{sen}\beta - u_{10})^2 + (\cos\beta - u_{20})^2 + 1 - u_{10}{}^2 - u_{20}{}^2}\right. \\ & \left. - \sqrt{(\text{sen}\beta - u_1)^2 + (\cos\beta - u_2)^2 + 1 - u_1{}^2 - u_2{}^2}\right)^2 \\ & + \frac{1}{2}k_3 l^2\left(\sqrt{(-\text{sen}\beta - u_{10})^2 + (\cos\beta - u_{20})^2 + 1 - u_{10}{}^2 - u_{20}{}^2}\right. \\ & \left. - \sqrt{(-\text{sen}\beta - u_1)^2 + (\cos\beta - u_2)^2 + 1 - u_1{}^2 - u_2{}^2}\right)^2 \\ & - Pl\left(\sqrt{1 - u_{10}{}^2 - u_{20}{}^2} - \sqrt{1 - u_1{}^2 - u_2{}^2}\right) \end{aligned} \tag{2.21}$$

2.2.3. Amortecimento

O trabalho das forças de amortecimento é dado por:

$$E = \frac{1}{2}C_1\dot{u}_1{}^2 + \frac{1}{2}C_2\dot{u}_2{}^2 \tag{2.22}$$

2.2.4. Função de Lagrange

A partir das parcelas de energia cinética (2.17), de energia potencial total (2.21) e do trabalho das forças de amortecimento (2.22), obtém-se a função de Lagrange, a saber:

$$
\begin{aligned}
L = T + E - V = \frac{1}{2} m \Bigg(& (l\dot{u}_1 + \dot{u}_b)^2 + (l\dot{u}_2 + \dot{v}_b)^2 + \frac{(l\dot{u}_1 u_1 + l\dot{u}_2 u_2)^2}{u_1^{\ 2} + u_2^{\ 2} - 1} \Bigg) \\
& + \frac{1}{2} C_1 \dot{u}_1^{\ 2} + \frac{1}{2} C_2 \dot{u}_2^{\ 2} - \frac{1}{2} k_1 l^2 \left(\sqrt{2 - 2u_{20}} - \sqrt{2 - 2u_2} \right)^2 \\
& - \frac{1}{2} k_2 l^2 \Bigg(\sqrt{(\text{sen}\beta - u_{10})^2 + (\cos\beta - u_{20})^2 + 1 - u_{10}^{\ 2} - u_{20}^{\ 2}} \\
& - \sqrt{(\text{sen}\beta - u_1)^2 + (\cos\beta - u_2)^2 + 1 - u_1^{\ 2} - u_2^{\ 2}} \Bigg)^2 \\
& - \frac{1}{2} k_3 l^2 \Bigg(\sqrt{(-\text{sen}\beta - u_{10})^2 + (\cos\beta - u_{20})^2 + 1 - u_{10}^{\ 2} - u_{20}^{\ 2}} \\
& - \sqrt{(-\text{sen}\beta - u_1)^2 + (\cos\beta - u_2)^2 + 1 - u_1^{\ 2} - u_2^{\ 2}} \Bigg)^2 \\
& + Pl \left(\sqrt{1 - u_{10}^{\ 2} - u_{20}^{\ 2}} - \sqrt{1 - u_1^{\ 2} - u_2^{\ 2}} \right)
\end{aligned} \tag{2.23}
$$

2.2.5. Equações de Movimento

As equações de movimento são obtidas como no modelo de Augusti, ou seja, derivando-se a equação diferencial de Euler-Lagrange (expressão (2.15)) em termos de um conjunto de coordenadas generalizadas q_i (u_1 e u_2).