4
Punição ótima

O lema 5 mostra que a punição ótima será simétrica sem perda de generalidade.

Lema 5: A punição ótima é simétrica sem perda de generalidade.

Seguindo Abreu, Pearce e Stacchetti (1990), pode-se determinar lucro da punição ótima através do seguinte programa: encontrar a distribuição de probabilidade, $F(\cdot)$, da primeira ação sugerida e o valor de continuação, $v(\cdot)$, que minimizam o lucro esperado descontado sujeito ao valor de continuação pertencer ao conjunto $[\underline{v}^*, \overline{v}^*]$, conjunto dos lucros de equilíbrio, e às firmas estarem dispostas a cooperar. Isto é:

$$\underline{v}^* = \min_{F(\cdot)\, v(\cdot)} (1-\delta)\pi^e + \delta v(\cdot)$$

Sujeito a:

(i) $v(\cdot) \in [\underline{v}^*, \overline{v}^*]$

(ii) $(1-\delta)\pi^e + \delta v(\cdot) \geq (1-\delta)R(p') + \delta \underline{v}^*$

(iii) $(1-\delta)\pi^e + \delta v(\cdot) \geq (1-\delta)\left[\frac{1-\mu}{N} + \mu\right]R(b') + \delta \underline{v}^*$

(iv) $(1-\delta)\pi^e + \delta v(\cdot) \geq (1-\delta)\left[\frac{1-\mu}{N}\right]R(\min\{r', \hat{p}\}) + \delta \underline{v}^*$

Esse problema é aparentemente complexo à medida que a função $R(\cdot)$ é côncava e o problema é de minimização. Contudo, o lema abaixo simplifica o problema ao mostrar que a restrição (iv) é sempre ativa.

Lema 6: A restrição (iv) é ativa.

Portanto, pode-se reescrever a restrição (iv) como:

$$\therefore v(\cdot) = \frac{(1-\delta)}{\delta}\left\{\left[\frac{1-\mu}{N}\right]R(\min\{\hat{p}, r'\}) - \pi^e\right\} + \underline{v}^*$$

Substituindo no problema original:

$$\min_{F(\cdot)} (1-\delta)\left[\frac{1-\mu}{N}\right]R(\min\{\hat{p}, r'\}) + \delta \underline{v}^*$$

Sujeito a:

(i) $\frac{(1-\delta)}{\delta}\left\{\left[\frac{1-\mu}{N}\right]R(\min\{\hat{p}, r'\}) - \pi^e\right\} + \underline{v}^* \in [\underline{v}^*, \overline{v}^*]$

(ii) $\left[\frac{1-\mu}{N}\right]R(\min\{\hat{p}, r'\}) \geq R(p')$

(iii) $\left[\frac{1-\mu}{N}\right]R(\min\{\hat{p}, r'\}) \geq \left[\frac{1-\mu}{N} + \mu\right]R(b')$

Se a primeira restrição não for ativa, a distribuição $F(\cdot)$ que soluciona o programa será $p = 0$ com probabilidade um e o valor de continuação será:

$$v(\cdot) = \frac{(1-\delta)}{\delta}\left[\frac{1-\mu}{N}\right]R(\min\{\hat{p}, r'\}) + \underline{v}^*$$

Essa solução encontrada resulta no lucro de minmax, $\underline{v}^* = \left[\frac{1-\mu}{N}\right]R(\min\{\hat{p}, r'\})$. Considerando tal solução o preço de reserva r' será a raiz de $\left|\int_0^{r'} D(x)dx - c\right|$ caso exista e $r' = \infty$, caso contrário. Dessa forma o r' será tal que o consumidor que sortear r' não sorteará outro preço. Vale ressaltar que, para a punição com lucro de minmax, r' não depende de μ.

Todavia, a punição de minmax não pode ocorrer se violar a primeira restrição do programa o que ocorre se a taxa de desconto δ for baixa. Formalmente, define-se o conjunto de valores de δ para o qual a punição de minmax é factível:

$$\left\{\delta \in (0,1): \underline{v}^* \leq \frac{(1-\delta)}{\delta}\left[\frac{1-\mu}{N}\right]R(\min\{\hat{p}, r'\}) + \underline{v}^* \leq \overline{v}^*\right\}$$

A primeira desigualdade será sempre satisfeita, pois $\frac{(1-\delta)}{\delta}\left[\frac{1-\mu}{N}\right]R(\min\{\hat{p}, r'\}) = \frac{(1-\delta)}{\delta}\underline{v}^*$ é positivo. A segunda desigualdade será satisfeita se δ for tal que:

$$\delta \geq \frac{\left[\frac{1-\mu}{N}\right]R(\min\{\hat{p}, r'\})}{\left[\frac{1-\mu}{N}\right]R(\min\{\hat{p}, r'\}) + \left(\overline{v}^* - \underline{v}^*\right)} = \frac{\underline{v}^*}{\overline{v}^*} = \delta^*$$

Portanto, se $\delta < \delta^*$, a punição de minmax não será mais factível. Se $\delta \geq \delta^*$, podem-se calcular os efeitos marginais dos parâmetros de busca μ e c no lucro da punição ótima:

$$\frac{\partial \underline{v}^*}{\partial \mu} = -\frac{1}{N}R(\min\{\hat{p}, r'\}) < 0 \; \forall \; \delta \geq \delta^*$$

$$\frac{\partial \underline{v}^*}{\partial c} = \begin{cases} \frac{(1-\mu)R'(r')}{ND(r')} > 0 \text{ se } r' < \hat{p} \\ 0 \qquad \text{caso contrário} \end{cases}$$

O lucro da punição de minmax depende negativamente de μ, ou seja, se há uma maior intensidade de busca, a punição é mais forte. Como há mais consumidores pesquisando preços, o desvio da punição de minmax é menos atraente, pois a firma venderá para apenas aos consumidores com custo positivo de busca. Analogamente, o lucro da punição de minmax depende positivamente de c à medida que um aumento em c provoca um aumento em r'. Na próxima seção, essa estática comparativa será útil para se analisar os efeitos de μ e c em $\overline{\delta}$.

Com o intuito de identificar a punição ótima para firmas com $\delta < \delta^*$, o lema abaixo mostra que, nesse caso, a primeira restrição será ativa, i.e. $v_i = \overline{v}^*$. Ou seja, se $\delta < \delta^*$ a punição ótima será equivalente a receber um lucro reduzido no primeiro período da punição e depois voltar a receber o lucro de conluio $\overline{v}^*$.

Lema 7: Se $\delta < \delta^*$, então $v_i = \overline{v}^*$.

Logo, pode-se escrever o programa considerando $v(\cdot) = \overline{v}^*$.

$$\min_{F(\cdot)}(1-\delta)\pi^e + \delta\overline{v}^*$$

Sujeito a:

(i) $(1-\delta)\pi^e + \delta\overline{v}^* \geq (1-\delta)R(p') + \delta\underline{v}^*$

(ii) $(1-\delta)\pi^e + \delta\overline{v}^* \geq (1-\delta)\left[\frac{1-\mu}{N} + \mu\right]R(b') + \delta\underline{v}^*$

(iii) $(1-\delta)\pi^e + \delta\overline{v}^* \geq (1-\delta)\left[\frac{1-\mu}{N}\right]R(\min\{r', \hat{p}\}) + \delta\underline{v}^*$

As restrições do programa acima representam que as firmas devem estar dispostas a cooperar e a restrição para o melhor desvio será ativa. Logo, a distribuição $F(\cdot)$ que soluciona o programa será tal minimiza o lucro esperado e que:

$$\pi^e = \pi_{Melhor\ Desvio} - \frac{\delta}{1-\delta}\left(\overline{v}^* - \underline{v}^*\right)$$

A distribuição $F(\cdot)$ se transforma na distribuição do equilíbrio de Nash à medida que $\delta \to 0$. Seja $F^*(\cdot)$ a distribuição de probabilidade que soluciona o programa para $\delta < \delta^*$, o lucro descontado da punição ótima será $\underline{v}^* = (1-\delta)\pi^e + \delta\overline{v}^*$. Usando o lema 7:

$$\underline{v}^* = \left[\frac{1-\mu}{N}\right]R(\min\{\hat{p}, r'\})$$

Contudo, nesse caso, o preço de reserva r' pode depender de μ, pois a punição ótima não mais é a de minmax. Formalmente, o efeito marginal de μ em $\underline{v}^*$ para $\delta < \delta^*$ será:

$$\frac{\partial\underline{v}^*}{\partial\mu} = \begin{cases} -\frac{1}{N}R(r') + \frac{(1-\mu)}{N}R'(r')\frac{\partial r'}{\partial\mu} \text{ se } \hat{p} > r' \\ -\frac{1}{N}R(\hat{p}) \text{ se } \hat{p} < r' \end{cases}$$

Não é claro se $\frac{\partial r'}{\partial\mu}$ é positivo ou negativo. No entanto, $\frac{\partial\underline{v}^*}{\partial\mu}$ será negativo sempre que r' for próximo de $\hat{p}$, pois $R'(\hat{p}) = 0$. Na próxima seção, investigam-se os efeitos de busca em conluio analisando os efeitos marginais dos parâmetros de busca, μ e c, em $\overline{\delta}_1$ and $\overline{\delta}_2$, supondo a punição de minmax.