

2

Análise Envoltória de Dados

Este capítulo apresenta uma abordagem conceitual sobre a Análise Envoltória de Dados, iniciando com uma breve introdução sobre o conceito de eficiência. Posteriormente, serão apresentados os principais modelos de DEA, discutindo também a sua aplicabilidade por meio da exposição das vantagens e desvantagens dessa técnica. Por fim, será apresentado um panorama de seu uso no contexto das finanças tanto no cenário internacional quanto no brasileiro.

2.1

Medidas de Eficiência e Curvas de Produção

As medidas de eficiências são muito conhecidas pelos economistas, e são representadas por fronteiras (curvas) de produção construídas sobre um sistema de coordenadas, em que as firmas eficientes se posicionam sobre a fronteira de produção. Ao se situarem sobre tal fronteira, as referidas firmas conseguem produzir o máximo possível dadas suas restrições. As firmas menos eficientes situam-se abaixo dessa fronteira, e a distância entre estas unidades e a fronteira de produção, é uma medida de ineficiência das mesmas. Para iniciarmos o estudo de Análise Envoltória de Dados, devemos inicialmente compreender os conceitos em que esta técnica se apóia, para depois utilizarmos de forma correta este método de eficiência produtiva.

As curvas de produção, inicialmente estudadas pelos economistas, são a base na análise de eficiência das firmas, pois buscam definir uma relação entre insumos e produtos. Um exemplo claro disto é de uma padaria que tem como insumos trigo, água, capital e trabalho e produz pães diversos. Uma medida de *performance* desta firma hipotética, está associada à razão entre produtos (*outputs*) e insumos (*inputs*). Quanto maior for a razão entre pães produzidos com relação aos materiais utilizados, melhor a *performance* da padaria.

Inicialmente cabe definir o conceito de produtividade, que nada mais é do que a razão entre *outputs* que a firma produz e *inputs* que ela utiliza:

- Produtividade = *outputs* / *inputs*

As medidas de produtividade e de eficiência são de extrema importância para os tomadores de decisão das unidades produtivas, uma vez que possibilita ter uma visão mais clara e objetiva sobre as variáveis. Além disso, elas nos permitem saber se elas estão incrementando ou impactando os níveis de eficiência das organizações. De acordo com Zhu (2003), todas as operações de negócios dessas organizações envolvem certas transformações, e estas envolvem o uso de certos insumos que são os recursos para a produção. Geralmente, esses insumos geram produtos na forma de serviços, produtos acabados e satisfação do consumidor. Porém, a questão de maior interesse é a de avaliar qual é a eficiência do processo de operação levando-se em conta os insumos utilizados e os produtos gerados. A avaliação de desempenho é uma ferramenta de competitividade que ajuda a melhorar a produtividade. O autor citado afirma ainda alguns benefícios que a avaliação de eficiência pode gerar:

- Preparar melhor a empresa de forma que ela se baseie em função da necessidade dos seus clientes;
- Revelar as fraquezas e as forças da operação; e
- Criar novos processos, produtos e serviços além de identificar novas oportunidades objetivando melhora dos processos produtivos.

As curvas de produção são a base no estudo da análise de eficiência. Kassai (2002) observa que tais curvas têm por objetivo definir uma relação entre produtos e recursos, e destaca as hipóteses que são consideradas para a relação entre esses dois fatores:

- Há retornos crescentes de escala se acréscimos no consumo de recursos implicam em um aumento mais que proporcional na quantidade de produtos obtidos (ou ainda, economias de escala);
- Há retornos constantes de escala quando acréscimos no consumo de recursos resultam em aumentos proporcionais na quantidade de produtos obtidos; e
- Há retornos decrescentes de escala na situação em que acréscimos no consumo de insumos acarretam aumentos menos do que proporcionais na geração de produtos (ou também, deseconomias de escala).

Segundo Lins e Meza (2000) a abordagem analítica aplicada às medidas de eficiência originou-se com Pareto-Koopmans e Debreu em 1951. Ainda de acordo com os mesmos autores, Farrel (1957) deu continuidade aos estudos de Pareto-Koopmans e Debreu (1951) ao incluir um componente denominado eficiência alocativa, capaz de refletir a habilidade dos produtores em selecionar o vetor *input-output* eficiente considerando os respectivos preços. A dificuldade em que se tinha de se medir estes preços de forma acurada, levaram Charnes, Cooper e Rhodes (1978) aos trabalhos com Análise Envoltória de Dados que enfatizassem a medida de eficiência técnica.

2.2

Histórico

A Análise Envoltória de Dados teve início com a dissertação de doutorado de Edward Rhodes publicada no ano de 1978, que tinha como objetivo desenvolver uma metodologia de análise de eficiência de escolas públicas que seriam as *Decision Making Units* (DMUs) sem ter que recorrer ao arbítrio de pesos para cada uma das variáveis, seja ela *input* ou *output* (LINS e MEZA, 2000).

Em seu trabalho inicial, Rhodes visava avaliar os resultados de um programa instituído em escolas públicas que acompanhava estudantes carentes. Rhodes queria comparar o desempenho dos estudantes que aderiram ao programa frente aos que não aderiram, para daí tentar estimar a eficiência técnica das escolas, baseados em insumos (por exemplo, tempo de leitura gasto pela mãe) e produtos (por exemplo, habilidade psicomotora e melhoria da auto-estima em crianças carentes medida por testes psicológicos).

Outro objetivo de Rhodes foi o de construir um modelo que diferisse dos modelos puramente econômicos, os quais precisam converter todas as variáveis em unidades monetárias. Por ser uma metodologia de análise de eficiência multicritério que estabelece um indicador de avaliação da eficiência da relação insumo/produto, torna-se muito melhor em modelar a dinâmica do mundo real. De acordo com Lins e Meza (2000, p.1), a tese de Charnes et al. (1978) tinha como principal objetivo desenvolver a seguinte questão:

“O objetivo da tese foi desenvolver um modelo para estimar a eficiência técnica sem recorrer ao arbítrio de pesos para cada variável de *input* ou *output*, e sem converter todas as variáveis em valores econômicos comparáveis.”

Enquanto a análise de regressão calcula a eficiência da unidade organizacional por meio de uma aproximação à média, DEA concentra o foco nas observações individuais e otimiza a eficiência de cada unidade (GREGORIOU, 2006). A utilização desse método evita o aparecimento de problemas normalmente associados aos modelos de regressão, que demandam uma especificação pré-determinada das relações existentes entre as variáveis de insumo e produto.

2.3

Características

Diferentemente dos métodos paramétricos, cujo objetivo é otimizar um plano de regressão simples, DEA permite otimizar individualmente cada uma das observações, uma em relação às demais, formando assim uma fronteira de eficiência. Essa fronteira de eficiência é definida segundo o conceito de Pareto-Koopmans pelo nível máximo de produção para um dado nível de insumo. Este conceito para eficiência é caracterizado por um vetor *input-output*, onde uma DMU é eficiente se satisfaz as seguintes considerações:

- Nenhum dos *outputs* possa ser aumentado sem que algum *output* necessite ser reduzido, ou que algum outro *input* seja aumentado; e
- Nenhum dos *inputs* possa ser reduzido sem que algum *input* necessite ser aumentado, ou que algum outro *output* seja reduzido.

DEA é uma técnica de programação matemática que objetiva a comparação entre diferentes DMUs, ou unidades de decisão, que nada mais são do que um conjunto de unidades comparáveis, sejam elas cooperativas de crédito, hospitais, bancos ou fundos de investimento, desde que nesta comparação todas essas DMUs utilizem os mesmos inputs (insumos) e gerem outputs (produtos) semelhantes.

Data Envelopment Analysis compara *outputs* e *inputs* para um conjunto de unidades de uma organização e identifica aquelas que apresentam a melhor prática ou referência (*benchmark*) para se definir a fronteira relativa (THANASSOULIS, 1999). Uma vez definidas as DMUs que se situam nessa fronteira, ou seja, as

mais eficientes, estas passam a ser a referência para as demais. Assim, a eficiência é medida a partir da distância desta DMU até a fronteira, e quanto mais próxima da fronteira mais eficiente em relação às suas concorrentes.

Portanto, dizemos que na análise envoltória de dados, um *portfolio* eficiente é aquele que apresenta o máximo nível de atributos desejáveis para determinado nível de atributos indesejáveis, ou, de forma contrária, o menor nível de atributos indesejáveis para determinado nível de atributos desejáveis. (CERETTA e COSTA JR, 2001). A metodologia DEA é uma medida de eficiência relativa, pois mede o desempenho da unidade que está sendo avaliada quando esta é comparada às demais unidades, sendo portanto, sensível à inclusão ou exclusão de qualquer unidade da análise.

O problema em questão resume-se à solução de um problema de programação linear em que se atribui pesos às variáveis de saída (*outputs*) e de entrada (*inputs*), com o objetivo de maximização de produção, tomando esta produção como sendo a relação entre a soma ponderada dos *outputs* pela soma ponderada dos *inputs*. (GONÇALVES, 2003).

De acordo com Lins e Meza (2000), podemos destacar as seguintes características do método DEA:

- Os índices de eficiência são baseados em dados reais (e não em fórmulas teóricas);
- Difere dos métodos baseados em avaliação puramente econômica, que necessitam converter todos os *inputs* e *outputs* em unidades monetárias;
- É uma alternativa e um complemento aos métodos da análise da tendência central e análise custo benefício;
- Considera a possibilidade de que os *outliers* não representem apenas desvios em relação ao comportamento "médio", mas possíveis *benchmarks* a serem estudados pelas demais DMUs;
- Ao contrário das abordagens paramétricas tradicionais, DEA otimiza cada observação individual com o objetivo de determinar uma fronteira linear por partes (*piece-wise linear*) que compreende o conjunto de DMUs Pareto-Eficientes; e
- Generaliza o método de Farrel (1957), construindo um único *output* virtual e um único *input* virtual.

Niederauer (1998) destaca algumas limitações do método:

- Como é criado para cada unidade de análise um programa linear, pode-se levar um tempo computacional elevado ao se trabalhar com séries de dados extensos;
- A DEA estima muito bem o desempenho “relativo”, mas converge muito vagarosamente para o desempenho “absoluto”;
- Ruídos, como erros de medição podem comprometer a análise, por ser uma técnica de ponto extremo; e
- Torna-se difícil formular hipóteses estatísticas, pois é uma técnica não paramétrica.

Bacelar (2005) também ressalta limitações adicionais na utilização da técnica:

- As unidades (DMUs) devem atuar sob as mesmas condições, devendo ser homogêneas e comparáveis;
- Os fatores (produtos e recursos) devem ser os mesmos para cada DMU, diferindo apenas na intensidade da magnitude; e
- O número de DMUs utilizadas deve ser no mínimo duas vezes maior que o número de recursos e produtos considerados, para que DEA apresente resultados consistentes.

Os modelos de DEA segundo Gonçalves (2003) constroem uma superfície não paramétrica, linear por partes, envolvendo os dados. Podem ser orientados à minimização de *inputs* ou maximização de *outputs*, dependendo do tipo de problemática que se quer tratar:

- Modelos orientados para a maximização de *output* (produtos): o índice é calculado através da máxima expansão do *output* (produtos) dado uma quantidade de *input* (insumo) utilizada; e
- Modelos orientados para a minimização de *input* (insumo): a distância é calculada através da máxima redução de *input* para uma mesma produção de *output* (produtos).

A metodologia DEA, por otimizar cada uma das observações individualmente, determina a fronteira de eficiência e contrasta com os métodos paramétricos, cujo objetivo é otimizar um plano de regressão, que aplica a mesma função para cada observação. Uma outra vantagem da técnica DEA é que não se

precisa fazer nenhuma suposição da distribuição das variáveis, por ser uma técnica não-paramétrica. Além disso, pode-se gerar um indicador único de eficiência considerando diversos insumos e produtos, sem que haja a necessidade de predefinir uma função de produção. Tanto os insumos, quanto os produtos gerados podem ser múltiplos.

É importante ressaltar que as *Decision Make Units*, que no caso dessa dissertação serão os diversos fundos de investimentos multimercado, devem atender aos seguintes pré-requisitos:

- Devem atuar sob as mesmas condições;
- Os insumos e produtos devem ser os mesmos para cada unidade, podendo diferir apenas na magnitude e na intensidade; e
- As unidades que estão sendo analisadas devem ser comparáveis.

Podemos classificar os modelos DEA como modelos de escala constante - *Constant Return to Scale* (CRS) ou modelos com variação de escala - *Variable Return to Scale* (VRS). Abaixo trataremos de cada um dos referidos modelos.

2.3.1

Modelo dos Multiplicadores, com Retorno Constante de Escala (CRS)

Inicialmente é necessário mostrar o modelo original *Constant Returns to Scale* (CRS) que também é conhecido como CCR em referência aos três autores do trabalho: Charnes, Cooper e Rhodes, e este segue a ótica dos multiplicadores. Geralmente, ao realizarmos um trabalho que se utiliza a Análise Envoltória de Dados, há uma série de *inputs* e de *outputs*, além de um índice de eficiência de determinada *Decision Make Unit* que é definido a partir da combinação linear de *inputs* sobre *outputs*. A seguir apresentamos de forma geral este modelo, onde a eficiência relativa (ER) de uma DMU é definida como sendo a razão da soma ponderada dos *outputs* pela soma ponderada dos *inputs*:

$$ER_j = \frac{\sum_r u_r Y_{rj}}{\sum_i v_i X_{ij}} \dots (1)$$

X_i são os insumos ou *inputs*, Y_r são os produtos ou *outputs* e v e u são os pesos de cada insumo e de cada produto, que são arbitrados sem nenhum critério neste modelo geral. Mais a frente, ao apresentarmos os outros modelos veremos o critério adotado para atribuir estes pesos de forma correta.

No modelo original de 1978, os autores utilizaram o trabalho feito em 1957 por Farrel e generalizaram-no para casos com múltiplos *inputs* e *outputs*, transformando-o em um modelo de programação linear, da seguinte forma:

Dados:

$k = 1, 2, \dots, n$ DMUs

$i = 1, 2, \dots, m$ *inputs* de cada DMU

$j = 1, 2, \dots, s$ *outputs* de cada DMU

A eficiência da DMU “0” é calculada através do seguinte problema de programação linear:

$$\text{Max } h_0 = \frac{\sum_{j=1}^s u_j y_{j0}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{i0}} \dots (2)$$

tal que:

$$\frac{\sum_{j=1}^s u_j y_{jk}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ik}} \leq 1, K = 1, 2, \dots, n \dots (3)$$

$$u_j, v_i \geq 0 \quad \forall j, i$$

Onde:

y = produtos ; x = insumos ; u e v = pesos

A questão acima resume-se a acharmos os valores das variáveis v_i e u_j , que nada mais são do que a importância relativa de cada variável (pesos), de modo que se maximize a soma ponderada dos *outputs* dividida pela soma ponderada dos *inputs* da DMU em questão, sujeita a restrição de que essa razão seja menor ou

igual a 1, para todas as DMUs. Desta restrição, podemos perceber que as eficiências variam no intervalo entre 0 e 1. Os pesos, v_i e u_j , que forem encontrados, são referentes à DMU atual que se está analisando. Dessa forma este processo se repetirá para cada uma das n DMUs que estão sendo estudadas, obtendo-se diferentes valores para os pesos.

O grande problema acima, ainda segundo Lins e Meza (2000), é que a programação fracionária descrita tem infinitas soluções ótimas, sendo preciso fixar um valor constante para o denominador da função objetivo. Deseja-se também linearizar as restrições de forma que se transforme em um Problema de Programação Linear (PPL). Se introduzirmos a transformação linear que Charnes e Cooper (1962) realizaram, o problema fica da seguinte forma:

$$\text{Max } h_0 = \sum_{j=1}^s u_j y_{j_0} \dots (4)$$

tal que:

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{i_0} = 1 \dots (5)$$

$$\sum_{j=1}^s u_j y_{j_k} - \sum_{i=1}^m v_i x_{i_k} \leq 0, k = 1, 2, \dots, n \dots (6)$$

$$u_i, v_i \geq 0, \forall x, y$$

Onde:

y = produtos ; x = insumos ; u e v = pesos

O problema acima é mais conhecido como problema dos multiplicadores. Assume rendimentos constantes de escala (CRS), obtido através dos multiplicadores que foram aplicados aos *inputs* e aos *outputs*. O modelo busca minimizar o consumo de insumos de forma a produzir no mínimo o nível de produção dado, representado pela maximização da somatória das quantidades produzidas “ y ” multiplicadas pelos pesos “ u ”. A primeira equação, representada pela equação (5), o somatório do produto das quantidades consumidas de recursos

pelos pesos específicos da empresa “0” ($\sum_{i=1}^m v_i x_{i0}$) é igual a 1. Dessa maneira o máximo resultado possível de se alcançar para h_0 será 1. Se a DMU “0” for eficiente, h_0 será igual a 1. Se não for o caso, terá um indicador sempre inferior a 1.

A segunda restrição expressa na equação 6, pode ser interpretada como o resultado da empresa (no caso dessa dissertação, o resultado de cada fundo), uma vez que é a subtração entre o somatório das quantidades produzidas, multiplicadas pelos pesos dos produtos ($\sum_{j=1}^s u_j y_{jk}$) e o somatório da multiplicação dos insumos consumidos pelos pesos ($\sum_{i=1}^m v_i x_{ik}$). É importante lembrar que está limitado a 0.

Assim as DMUs (fundos de investimento por exemplo) eficientes terão o resultado zero para essa restrição. O indicador de eficiência no modelo BCC corresponde à uma medida de eficiência técnica (ET), uma vez que está depurado dos efeitos de escala de produção.

As figuras 1 e 2 são as representações gráficas desse modelo, onde o primeiro se caracteriza pela orientação *output* e o segundo pela orientação *input*:

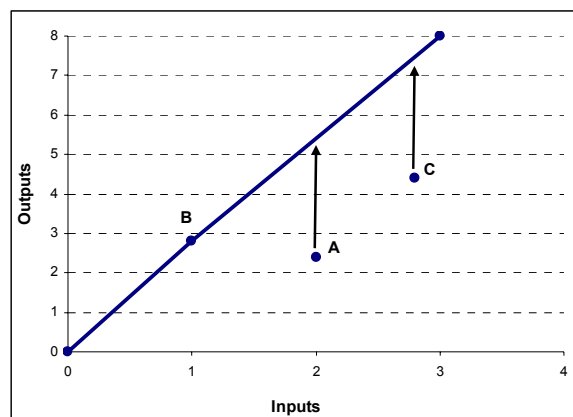


Figura 1 – Representação Gráfica CRS-O.

Fonte: Adaptado de Cardoso e Costa 2007

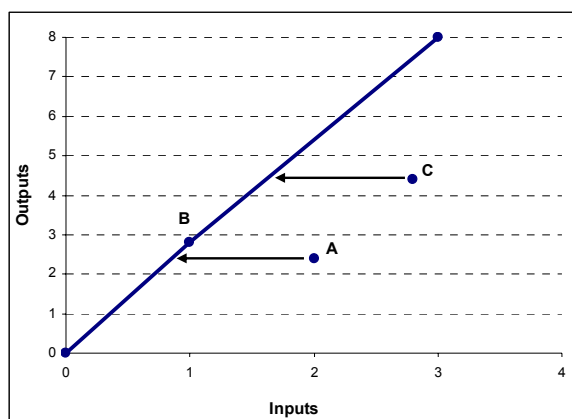


Figura 2 – Representação Gráfica CRS-I

Fonte: Adaptado de Cardoso e Costa 2007

Para ilustrá-lo, daremos um exemplo na tabela 1 a seguir, em que é feita a análise de eficiência de quatro amplificadores de som (A1, A2, A3 e A4) a partir de duas variáveis – preço (X), que será o *input* e a potência da caixa (Y) que será o *output*.

Tabela 1 – Exemplo Prático

	Aparelho	A1	A2	A3	A4
X	Preço	3	7	4	5
Y	Potência	2	5	3	4
Y/X		2/3	5/7	3/4	4/5

$$\frac{2u}{3v} \leq 1 \quad ; \quad \frac{5u}{7v} \leq 1 \quad ; \quad \frac{3u}{4v} \leq 1 \quad ; \quad \frac{4u}{5v} \leq 1$$

Neste exemplo ilustrativo vemos que o aparelho A4 é o mais eficiente, pois possui a maior razão Y/X. Dessa forma, a partir dessa DMU A4, será realizado um problema de otimização objetivando determinar os máximos valores de u e v:

$$\text{Max } \frac{4u}{5v}$$

Tal que,

$$\frac{2u}{3v} \leq 1$$

$$\frac{5u}{7v} \leq 1$$

$$\frac{3u}{4v} \leq 1$$

$$\frac{4u}{5v} \leq 1$$

Se supusermos que o vetor $[u;v]$ seja uma solução, de modo que o valor de $4u/5v$ seja máximo, então qualquer valor $K > 0$, o vetor $[ku;kv]$ também é uma solução ótima. Fixa-se então o valor de kv de modo a que tenha-se uma solução ótima de ku . Logo, fazendo $5v = 1 \Rightarrow v = 1/5$. Dessa forma temos um problema linear de otimização de simples resolução:

Max $4u$

tal que:

$$2u \leq 3/5 \rightarrow u = 3/10$$

$$5u \leq 7/5 \rightarrow u = 1/5 \text{ (menor valor)}$$

$$3u \leq 4/5 \rightarrow u = 4/15$$

$$4u \leq 1 \rightarrow u = 1/4$$

$$u \geq 0 ; v \geq 0$$

A solução encontrada é $u = 1/5$ e $P(x) = 4u \Rightarrow 4/5$ é a eficiência da DMU

A4. Este processo é repetido para cada uma das “n” DMUs existentes, achando, portanto, diferentes valores para u_j e v_i .

2.3.2

Modelo *Variable Returns to Scale* (VRS)

Este modelo de DEA, o modelo BCC, em referência à Banker et al. surgiu no ano de 1984, e tinha como objetivo analisar economias que tinham rendimentos variáveis de escala. Neste modelo, também conhecido como VRS (*Variable Returns to Scale*) não se assume proporcionalidade entre *inputs* e *outputs*, e leva em consideração situações em que se tenham tanto eficiências de produção com rendimentos crescentes quanto decrescentes de escala.

De acordo com Paiva (2000), as principais diferenças entre os modelos BCC e CCR é que trabalham com tecnologias distintas e, conseqüentemente, geram fronteiras e medidas de eficiências diferentes. Na orientação produto, as projeções dos planos observados sobre a fronteira buscam o máximo aumento equi-proporcional dado o consumo observado, e na orientação insumo buscam a maior redução equi-proporcional do consumo para a produção observada. Paiva ainda enumera as duas principais diferenças entre os modelos:

- i. Superfície de Envelopamento (tipos de combinações e suposições sobre o retorno de escala); e
- ii. Tipo de projeção do plano ineficiente à fronteira.

O modelo BCC é obtido ao se incluir uma restrição de convexidade e, como mencionado acima, passa a considerar a possibilidade de rendimentos crescentes ou decrescentes de escala, onde os multiplicadores somam 1. No modelo BCC descrito a seguir, h_0 é a eficiência da DMU que está sendo analisada; x_{ik} representa o *input* i da DMU $_k$; y_{jk} representa o *output* j da DMU $_k$; v_i é o peso atribuído ao *input* i ; u_j é o peso atribuído ao *output* j e u^* é um fator de escala :

$$\text{Max } h_0 = \sum_{j=1}^s u_j y_{j_0} - u^* \dots (7)$$

tal que:

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{i_0} = 1 \dots (8)$$

$$\sum_{j=1}^s u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} - u^* \leq 0, k = 1, 2, \dots, n \dots (9)$$

$$u_i, v_i \geq 0, \forall x, y$$

u^* irrestrito

Onde:

y = produtos ; x = insumos ; u e v = pesos

É importante ressaltar nesse modelo é introduzida uma variável u^* , representando os retornos variáveis de escala. Essa nova variável portanto, não deve atender à restrição de positividade, podendo então assumir valores negativos. Pela restrição adicional de igualdade (ou restrição de convexidade) neste modelo, somente as combinações convexas são permitidas para se gerar a fronteira de produção. De acordo com Vilela et al. (2007) a convexidade reduz o conjunto de possibilidades de produção viável e converte uma tecnologia de ganho de escala constante em uma tecnologia de ganho de escala variável. Dessa forma é considerada a possibilidade de rendimentos crescentes ou decrescentes de escala na construção da fronteira eficiente.

Em um modelo DEA BCC com orientação a *input*, o índice de eficiência não se altera se a todos os *outputs* for adicionado um mesmo valor positivo, isto é, se for feita uma translação no eixo X.

As figuras abaixo sintetizam o modelo VRS orientado tanto para *output* quanto para *input*:

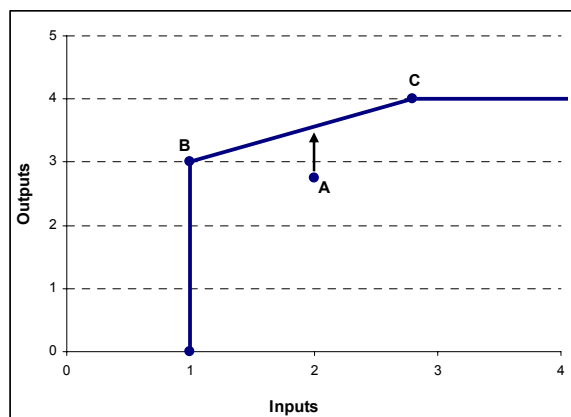


Figura 3 – Representação Gráfica VRS-O

Fonte: Adaptado de Cardoso e Costa 2007

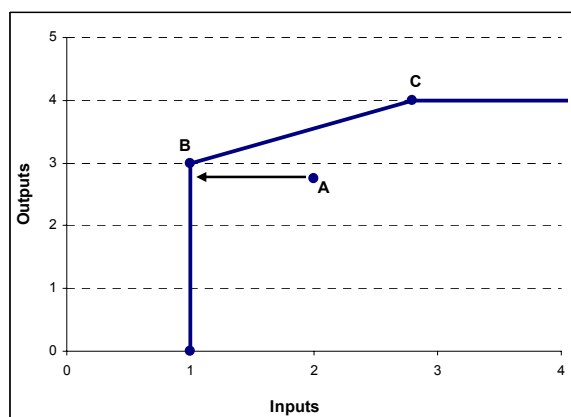


Figura 4 – Representação Gráfica VRS-I

Fonte: Adaptado de Cardoso e Costa 2007

Todos os modelos descritos acima seguiram a ótica da orientação *input*, onde deseja-se minimizar a utilização de recursos de forma que o nível de produtos (*outputs*) não se reduza. Assim, na orientação *output*, deseja-se maximizar os produtos obtidos sem que se altere o atual nível dos *inputs*.

Este último modelo é obtido através da inversão do quociente do modelo do item 2.3.1 deste capítulo, ficando da seguinte forma:

$$\text{Min } \frac{\sum_{j=1}^s v_j x_{j_k}}{\sum_{i=1}^m u_i y_{i_k}} \dots (10)$$

tal que:

$$\frac{\sum_{j=1}^s v_j x_{j_k}}{\sum_{i=1}^m u_i y_{i_k}} \geq 1, k = 1, 2, \dots, n \dots (11)$$

$$u_x, v_y \geq 0 \quad \forall x, y$$

Onde:

y = produtos ; x = insumos ; u e v = pesos

Da mesma forma que a descrita acima, obtém-se o modelo VRS ou BCC para a orientação *output*:

$$\text{Min } h_0 = \sum_{i=1}^m v_i x_{i0} + u^* \dots (12)$$

tal que:

$$\sum_{j=1}^m u_j y_{jk} = 1 \dots (13)$$

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ik} - \sum_{j=1}^s u_j y_{jk} - u_* \leq 0, \quad K = 1, 2, \dots, n \dots (14)$$

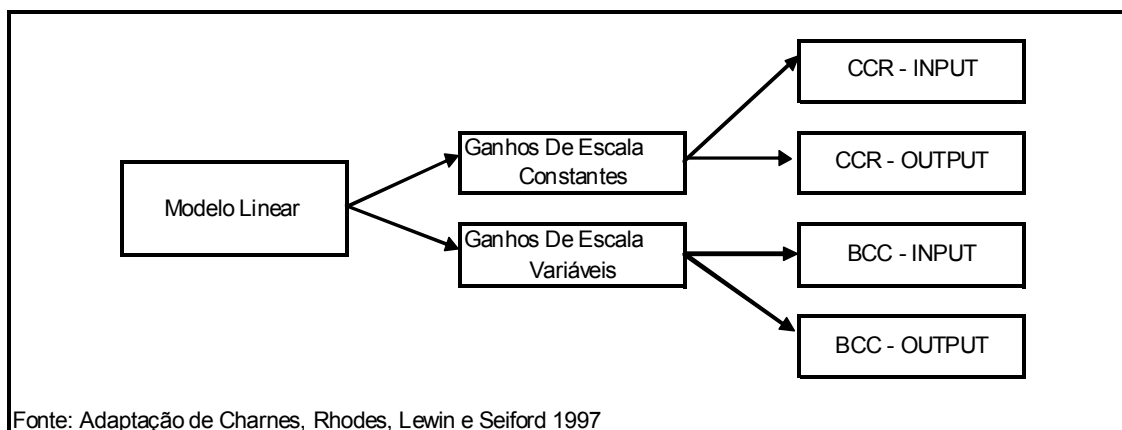
$$u_j \text{ e } v_i \geq 0 \quad \forall j, i$$

Onde:

y = produtos ; x = insumos ; u e v = pesos

Nessa ótica, o termo u^* representa a possibilidade de termos retornos de escala variáveis, podendo assim se obter valores negativos ou positivos. A possibilidade de se ter retornos variáveis de escala admite que o nível máximo de produtividade varie em função do nível de produção, podendo então utilizar unidades de portes distintos. Dessa forma, na ótica com orientação *output*, o indicador de eficiência é menor ou igual ao indicador de eficiência encontrado no modelo CCR. Dizemos que esse indicador de eficiência no modelo CCR indica uma medida de produtividade global, denominado indicador de eficiência produtiva (EP).

Por fim, a figura 5 sintetiza os modelos DEA:



. Figura 5 – Síntese dos Modelos DEA

2.4

A utilização de DMU Artificiais: A Opinião do Especialista

De acordo com Lins e Meza (2000), Guedes (2002) e Figueiredo (2005), a flexibilidade na escolha dos pesos existente na metodologia DEA clássica é importante na identificação das DMUs ineficientes, ou seja, que tem uma baixa *performance*, inclusive com pesos definidos de forma mais favorável. Contudo, em DEA, a atribuição de pesos não é uma tarefa simples. A escolha dos pesos introduzida no PPL através de restrições pode gerar inviabilidade na solução do problema. Essa flexibilidade nos pesos permitida pela utilização da DEA tem levado à críticas por vários acadêmicos:

- Fatores importantes podem ser ignorados da análise, o que acontece quando o PPL outorga um peso zero na variável respectiva;
- Ao ter-se flexibilidade nos pesos permite-se que as DMUs possam ter objetivos individuais e circunstâncias particulares, o qual não é compatível com o fato delas serem homogêneas no sentido que produzem os mesmos outputs;
- Fatores de menor importância podem dominar o estabelecimento da eficiência de uma DMU, isto é, podem ter um alto peso;
- Em alguns casos, dispõe-se de uma certa quantidade de informação com respeito à importância dos *inputs* e dos *outputs*, e sobre as relações entre as variáveis;

- Ao termos várias DMUs eficientes, pois exploram características positivas da sua *performance*, não se pode discriminar entre as unidades eficientes; e
- Os gerentes com frequência têm percepção a priori sobre DMUs eficientes e ineficientes.

Gonçalves (2003) cita em sua tese como se deu o desenvolvimento do processo de simulação de um conjunto de restrições aos pesos com inclusão de DMUs artificiais:

Baseado no trabalho de Roll e Golany (1991) que “constataram que cada peso em DEA, estritamente positivo, era equivalente a uma DMU não observada (DMU artificial), introduzida entre as demais no momento da análise. Allen et al.(1997) generalizaram essa observação para o caso de múltiplos *inputs* e/ou *outputs*, para DMUs que operam com retornos constantes de escala ou para as que operam com retornos variáveis de escala”. (Apud COSTA et al., 2009, p.1670)

A inclusão de uma DMU artificial ao conjunto original de DMUs funciona como método alternativo de simulação de um conjunto de restrições aos pesos, sendo os índices de eficiência desse novo conjunto calculados pelo método clássico, sem restrições aos pesos, o mesmo que o obtido com o conjunto inicial de DMUs utilizando restrições aos pesos ao invés de DMUs artificiais (COSTA et al., 2009). As coordenadas escolhidas para as DMUs artificiais são de extrema relevância para que se chegue à solução ótima.

No modelo CCR descrito acima, o grupo de DMUs artificiais $j_t = 1, \dots, N$, tal que DMU j_t tem *output* y_{rjt} com $r = 1, \dots, s$ e *input* x_{ijt} , $i = 1, \dots, m$, são definidos com a utilização das equações vistas abaixo, sem que haja diferença nos resultados. Ambas simulam as restrições ARI e ARII:

$$y_{rjt} = \frac{y_{rj}}{h_j^*} \quad \text{e} \quad x_{ijt} = x_{ij} \quad \forall j_t = j \dots (15)$$

$$y_{rjt} = y_{rj} \quad \text{e} \quad x_{ijt} = x_{ij} \times h_j^* \quad \forall j_t = j \dots (16)$$

Por sua vez, no modelo BCC, a eficiência é dependente da orientação do modelo, o que não ocorre no CRS, em que os resultados são os mesmos tanto com expansão dos *outputs* quanto com contração de *inputs*. Com isso, a definição da DMU artificial utilizando contração dos *inputs* de acordo com a equação (17), não

gera os mesmos resultados se for utilizada a expansão dos *outputs*, como pode ser visto na equação (18):

$$y_{rjv} = y_{rj} \quad \text{e} \quad x_{ijv} = x_{ij} \times v_i^* \quad \forall jv = j \dots (17)$$

$$y_{rjv} = \frac{y_{rj}}{v_j^*} \quad \text{e} \quad x_{ijv} = x_{ij} \quad \forall jv = j \dots (18)$$

Assim, o modelo BCC, ao simular as restrições a inclusão de DMUs artificiais, dependerá da escala, proporcionando resultados diferentes aos encontrados em contração de *inputs* ou expansão de *outputs*.

2.5

Áreas de Aplicação e Revisão da Literatura

A utilização de DEA como instrumento de avaliação de desempenho de diferentes tipos de unidades de produção deu um grande salto a partir da década de 80. Como descrito anteriormente, ela possibilitou a utilização de múltiplas relações de *inputs* e *outputs* que muitas vezes, sem a utilização dessa técnica, geravam enorme dificuldade em se medir corretamente a relação entre as variáveis, tornando muitas vezes inviável a inclusão ou exclusão de qualquer unidade da análise.

É extensa a literatura que utiliza DEA na avaliação da eficiência relativa de entidades em uma série de contextos e países. Podemos citar, por exemplo, a aplicação na avaliação de universidades, com o intuito de se medir o nível de ensino, na área de saúde, que também vem sendo foco de algumas pesquisas quanto à mensuração de *performance* de hospitais, assim como na área de transportes, por meio do estudo de eficiência e *benchmarks* para companhias aéreas e na avaliação de serviços de ônibus escolares e de tráfego em centros urbanos.

Alguns estudos mais recentes vêm demonstrando a aplicabilidade de DEA na área de finanças, seja através da avaliação de bancos, na análise de crédito, na análise de fundos etc. Dentre estes estudos na área supracitada, será feita uma rápida descrição de alguns dos trabalhos desenvolvidos

Iniciaremos a apresentação de alguns desses trabalhos destacando o de Ferreira e Gonçalves (2006) que realizaram um trabalho com o intuito de

investigar o desempenho das cooperativas de crédito de Minas Gerais através de DEA. Nesse trabalho os autores buscaram identificar aquelas instituições que serviriam de *benchmarks* para o setor, pela mensuração do grau de eficiência técnica e de escala, por meio da relação entre as variáveis financeiras e desempenho nessas cooperativas.

Eles utilizaram como insumos os gastos com empregados, despesas administrativas e não administrativas e como produto, o volume de operações de crédito, ativo total da cooperativa e sobras operacionais que nada mais é do que o resultado global líquido da instituição de crédito. Os resultados demonstraram que, no agregado, as cooperativas de crédito estavam operando com grande ineficiência técnica. Em termos de escala, embora tenham sido identificadas ineficiências, elas se situaram, no geral, em patamares sustentáveis, o que equivale a dizer que, na realidade, as cooperativas de crédito estão mais eficientes na definição da escala de operação do que na gestão dos seus recursos produtivos.

Ceretta e Niederauer (2001) fizeram um estudo de rentabilidade do setor bancário brasileiro. Para verificar o grau de competitividade no setor e o desempenho comparativo entre os diversos bancos do país aplicou-se DEA. Foram utilizados dados como o montante de capital de terceiros e dos proprietários, receita total e o resultado do semestre de 144 instituições. Os resultados sugeriram que os grandes bancos têm um melhor desempenho e os de pequeno porte um desempenho pior. Neste mesmo tema, Santos e Casa Nova (2005) construíam um modelo estruturado para análise de demonstrações contábeis.

O estudo de Choi et al. (1997), denominado *Efficiency of Mutual Funds and Portfolio Performance Measurement: A Non-Parametric Approach* foi o pioneiro na utilização de DEA para a mensuração de eficiência relativa de fundos de investimento. Eles buscaram incorporar outras medidas, além do binômio risco-retorno e com isso adotaram o modelo com retornos constantes de escala, utilizando como *input* o carregamento, as despesas, o giro da carteira e o desvio-padrão, e como *output* o retorno-médio para 731 fundos de ações da Europa. Choi et al. (1997) criaram com a utilização da DEA uma nova medida para aferir o desempenho de fundos mútuos, com vantagens sobre os índices tradicionais, chamado de DEA *portfolio efficiency index* (DPEI). Consideraram esse índice como uma generalização do Índice de Sharpe, porque quando o custo de transação

não é colocado como variável de entrada, o índice é conceitualmente equivalente ao índice de Sharpe.

Os autores acima concluíram que os maiores fundos eram mais eficientes em algumas categorias e encontraram uma evidência forte que os fundos mútuos são todos média-variância eficientes. Além disso, viram que a eficiência desses fundos mútuos não estava relacionada aos custos de transação.

Um ano após o trabalho pioneiro de utilização de DEA para medir eficiência de fundos, McMullen e Strong (1998) também realizaram um trabalho nessa linha, mas se diferenciaram ao adotarem restrições de pesos às variáveis. Eles utilizaram como base de dados 135 fundos de ações dos Estados Unidos e adotaram como *inputs* a razão das despesas, o carregamento e o investimento mínimo, e como *outputs* o desvio-padrão, e as rentabilidades no curto, médio e no longo-prazo. Concluíram que DEA é uma ferramenta gerencial importante para ajudar o investidor na tomada de decisão.

Ceretta e Costa Jr (2001) investigaram o desempenho de 106 fundos de investimentos em ações no período de 1997 e 1999. Eles utilizaram as informações do retorno mensal médio em um ano (dezembro de 1998 - novembro de 1999); retorno mensal médio em dois anos (dezembro de 1997 – novembro de 1999); desvio padrão em um ano; desvio padrão em dois anos e o custo de administração (parcela fixa). Os dois primeiros itens foram considerados como atributos desejáveis e os três últimos, atributos indesejáveis. A idéia básica dos autores foi a de que os investidores desejam os fundos que apresentem o maior nível de atributos desejáveis para um nível específico de atributos indesejáveis, ou seja, maximizem uma função utilidade esperada composta por cinco atributos. Os resultados obtidos identificaram sete fundos dominantes que posteriormente foram confrontados com os sete menos eficientes para que se identificasse e se evidenciasse suas diferenças em termos de atributos e ponderações.

Macedo e Macedo (2006) avaliaram o desempenho de 28 fundos DI no Brasil listado no guia dos melhores fundos de investimento de 2004 da Revista Exame. Utilizaram como *inputs* a taxa de administração e a variabilidade de seus retornos como medida de risco e como *output* os retornos de longo-prazo (3 anos) e de curto-prazo (6 meses) no período de 1998 à 2004.

Elling (2007) também utilizou DEA para avaliação de fundos de investimento. A investigação empírica se baseou no retorno de 30 *Hedge Funds*

no período compreendido entre janeiro de 96 e dezembro de 2005 selecionados a partir da base de dados do *Center for International Securities and Derivatives Markets* (CISDM).

Basso e Funari (2001), em seu trabalho intitulado “*A data envelopment analysis approach to measure the mutual fund performance*” utilizaram o modelo de retorno constante de escala para analisar 47 fundos de ações da Itália. Adotaram como *output* o retorno médio e como *input* o carregamento, o beta e a menor semi-variância. Esses autores mostraram que a utilização de DEA pode ser utilizada como um instrumento complementar aos tradicionais índices utilizados.

Gonçalves (2003), através do trabalho “Avaliação de Eficiência de Fundos de Investimentos Financeiros: Utilização de DMU Artificial em Modelos DEA com *Outputs* Negativos”, utilizou em sua tese de Doutorado 152 fundos de investimentos em ativos de renda variável no período de julho a dezembro de 2000, sendo cada fundo considerado uma DMU diferente. Tomou como *input* a medida de risco de cada fundo e como *output* o retorno diferencial entre o Ibovespa e o retorno de cada fundo e procurou solucionar questões referentes à análise comparativa e classificação de um conjunto de fundos, trazendo com isso vantagens aos personagens envolvidos nesse segmento, como gestores, clientes, agências de rating, etc.

Podemos citar ainda nessa mesma linha de pesquisa trabalhos como o de Tarim e Karan (2001) intitulado *Investment fund Performance measurement using weight-restricted data envelopment analysis* e o de Gregouriou (2006) denominado *Optimization of the Largest US Mutual Funds using Data Envelopment Analysis*, que utiliza DEA para avaliação da *performance* de 25 fundos de ações norte-americano nomeado.