

3

Método dos Elementos Discretos - MED

O Método dos Elementos Discretos (MED) é uma técnica numérica Lagrangeana utilizada para resolver problemas que podem ser representados através de objetos discretos ou partículas. Tais elementos discretos podem ser rígidos ou flexíveis (deformáveis) e interagem entre si por meio de forças de contato normais e tangenciais. O elemento pode ser representado por esferas, poliedros, elipsoides ou outras formas geométricas. As forças de contato são determinadas pela Lei Força-Deslocamento e se somam à força gravitacional na solução das equações de movimento. Os métodos explícitos de integração no tempo são os mais utilizados no MED. Em geral, a condição de estabilidade requer um passo de tempo muito pequeno, variando de 1.0×10^{-6} a 1.0×10^{-9} segundos, dependendo das propriedades do material, o que demanda um grande esforço computacional para aplicações em larga escala.

O modelo numérico utilizado neste trabalho segue a metodologia padrão apresentada por Cundall e Strack (4). A solução das equações de Newton com as forças gravitacional e de contato entre as partículas, estabelece o equilíbrio dinâmico do sistema.

3.1

Lei de Movimento

O movimento de uma partícula é determinado pela força resultante e o momento angular que agem sobre ela, como citado em Campos *et al.* (2) e por Figueiredo (6). As forças de contato e o efeito da gravidade resultam no movimento de translação e rotação da partícula. A equação do movimento de translação é dada por:

$$\mathbf{f} = m(\mathbf{a} + \mathbf{g}), \quad (3-1)$$

$$\mathbf{g} = (0.0, 0.0, -9.8), \quad (3-2)$$

onde $\mathbf{g}$ é a aceleração da gravidade, $\mathbf{f}$, m e $\mathbf{a}$ são, respectivamente, a força resultante, a massa e a aceleração resultante da partícula.

Para uma partícula esférica, a equação do movimento de rotação é dada por:

$$\mathcal{M} = I\mathbf{a}_\omega, \quad (3-3)$$

onde $\mathcal{M}$, I e $\mathbf{a}_\omega$ são, respectivamente, o vetor momento angular, o momento de inércia e a aceleração angular da partícula. Para uma partícula esférica, a massa e o momento de inércia são dados por:

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \quad \text{e} \quad (3-4)$$

$$I = \frac{2}{5}mr^2, \quad (3-5)$$

onde r e ρ são, respectivamente, o raio e a massa específica da partícula.

As equações 3-1 e 3-3 são integradas usando o método das diferenças finitas centrais. A velocidade de translação, $\mathbf{v}$, e a velocidade angular, ω , são calculadas no centro do intervalo de tempo, enquanto que acelerações, deslocamentos, forças e momentos são calculados nos seus extremos. Assim, no tempo $(t + \Delta t/2)$, as velocidades podem ser calculadas da seguinte forma:

$$\mathbf{v}^{(t+\Delta t/2)} = \mathbf{v}^{(t-\Delta t/2)} + \left(\frac{\mathbf{f}}{m} + \mathbf{g} \right) \Delta t, \quad (3-6)$$

$$\omega^{(t+\Delta t/2)} = \omega^{(t-\Delta t/2)} + \left(\frac{\mathcal{M}}{I} \right) \Delta t. \quad (3-7)$$

A velocidade linear é utilizada para calcular a posição do centro da partícula, através da equação:

$$\mathbf{x}^{(t+\Delta t)} = \mathbf{x}^t + \mathbf{v}^{(t+\Delta t/2)} \Delta t. \quad (3-8)$$

A velocidade angular é utilizada para atualizar a força tangencial.

3.2

Amortecimento Mecânico

A energia fornecida para o sistema de partículas é dissipada pelo atrito. Entretanto, o atrito pode não ser suficiente para se alcançar o regime permanente com um número razoável de ciclos. Logo, adiciona-se um novo termo às equações 3-1 e 3-3, chamado de amortecimento local não-viscoso, transformando-as em equações de movimento amortecidas, dadas por:

$$\mathbf{v}^{(t+\Delta t/2)} = \mathbf{v}^{(t-\Delta t/2)} + \left(\frac{\mathbf{f}}{m} + \mathbf{g} + \frac{\mathbf{f}^d}{m} \right) \Delta t, \quad (3-9)$$

$$\boldsymbol{\omega}^{(t+\Delta t/2)} = \boldsymbol{\omega}^{(t-\Delta t/2)} + \left(\mathcal{M} + \mathcal{M}^d \right) \frac{\Delta t}{I}, \quad (3-10)$$

onde $\mathbf{f}^d$ e $\mathcal{M}^d$ são, respectivamente, força e momento angular de amortecimento, e podem ser calculadas por:

$$\mathbf{f}^d = -\alpha \|\mathbf{f}\| \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}, \quad (3-11)$$

$$\mathcal{M}^d = -\alpha \|\mathcal{M}\| \frac{\boldsymbol{\omega}}{\|\boldsymbol{\omega}\|}, \quad (3-12)$$

com α sendo o coeficiente de amortecimento crítico.

3.3

Lei Força-Deslocamento

A Lei Força-Deslocamento relaciona o deslocamento relativo entre duas partículas em contato com a forças que agem sobre elas. Essa lei é descrita em termos do ponto de contato, localizado no plano de contato que é definido pelo vetor normal unitário $\mathbf{n}$. Para um contato entre duas esferas, o vetor normal tem a direção da reta que une os centros das duas esferas. Para um contato entre uma esfera e uma parede plana, o vetor normal tem a direção normal ao plano da parede.

A força de contato é decomposta na componente normal, $\mathbf{f}_n$, que age na direção do vetor normal e na componente tangencial, $\mathbf{f}_t$, que age no plano de contato, dado pela Equação 3-13. A Figura 3.1 ilustra a atuação das forças que são aplicadas no contato entre duas partículas.

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_n + \mathbf{f}_t, \quad (3-13)$$

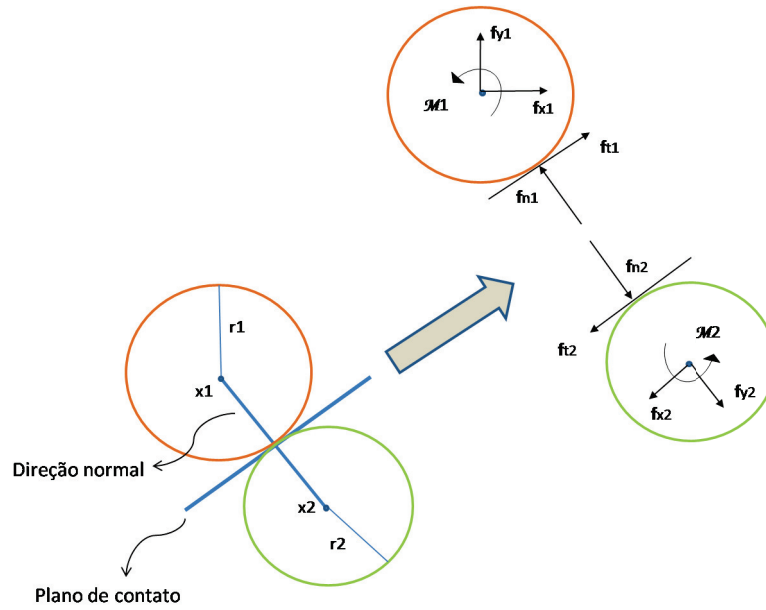


Figura 3.1: Forças e momentos no contato entre duas partículas.

A força normal pode ser calculada por:

$$\mathbf{f}_n = k_n u_n \mathbf{n}, \quad (3-14)$$

onde k_n é a rigidez normal do contato, e u_n é o deslocamento relativo na direção normal, calculado por 3-15,

$$u_n = \begin{cases} r_A + r_B - d, & \text{contato entre as esferas A e B} \\ r_A - d, & \text{contato entre a esfera A e a parede} \end{cases} \quad (3-15)$$

sendo d a distância entre os centros das esferas ou entre o centro da esfera e a parede. r_A e r_B , são, respectivamente, os raios das esferas A e B.

O ponto de contato entre duas partículas, A e B, ou entre a partícula A e a parede, pode ser sempre calculado por:

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{x}_A + (r_A - 0.5u_n)\mathbf{n}, \quad (3-16)$$

onde $\mathbf{x}_c$ é o ponto de contato e $\mathbf{x}_A$ é a posição da partícula A.

Adotando o critério de resistência à tração nula, tem-se que, se $u_n < 0$, então $\mathbf{f}_n = 0$ e $\mathbf{f}_t = 0$. Caso a força normal seja de compressão ($u_n > 0$), a força de contato tangencial é calculada de forma incremental. Ou seja, quando um novo contato é formado, a força tangencial é nula, e subsequentes deslocamentos tangenciais

resultam em incrementos desta força. O movimento do ponto de contato deve ser considerado durante este procedimento. Para isso, é necessário atualizar a normal $\mathbf{n}$ e o novo ponto de contato $\mathbf{x}_c$ a cada passo de integração. As componentes, em coordenadas globais, da força tangencial precisam ser atualizadas para a nova posição de contato antes do acréscimo da força. A Figura 3.2 mostra o movimento de duas partículas e a atualização desta componente tangencial a cada novo ponto de contato.

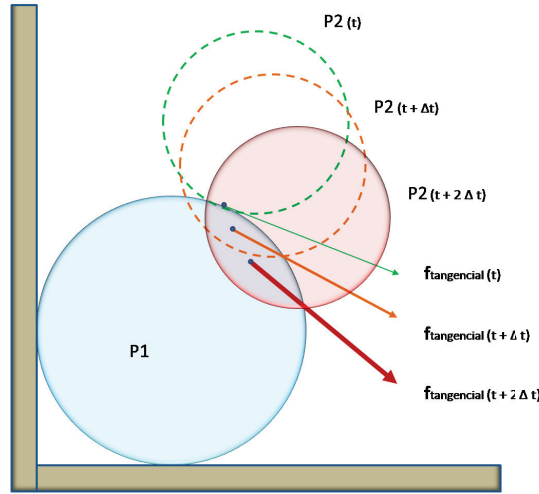


Figura 3.2: Atualização da força tangencial a cada novo ponto de contato.

Para calcular a força tangencial do passo $t + \Delta t$ é necessário conhecer o vetor normal e a força tangencial do contato no instante t . As Equações 3-17 e 3-18 atualizam as componentes globais da força tangencial, através de duas rotações incrementais, sendo válidas apenas para pequenas rotações.

$$\mathbf{f}_{t \text{ rot1}} = \mathbf{f} + (\mathbf{c} \times \mathbf{f}) \quad (3-17)$$

$$\mathbf{f}_{t \text{ rot2}} = \mathbf{f}_{t \text{ rot1}} + (\bar{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{f}_{t \text{ rot1}}) \quad (3-18)$$

O vetor $\mathbf{c}$, usado na Equação 3-17, é definido como sendo o produto vetorial entre o vetor normal do contato anterior e o vetor normal do contato atual,

$$\mathbf{c} = \mathbf{n}^{old} \times \mathbf{n}. \quad (3-19)$$

Na Equação 3-18 são usadas as componentes do vetor $\bar{\boldsymbol{\omega}}$, que pode ser calculado pela Equação 3-20, sendo ω^A e ω^B , respectivamente, as velocidades angulares das esferas A e B.

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2}[(\omega^A + \omega^B) \cdot \mathbf{n}]\mathbf{n}. \quad (3-20)$$

Para calcular o incremento da força tangencial, será necessário calcular o deslocamento tangencial entre as partículas, através do movimento relativo no contato. Para isso, é necessário conhecer a velocidade do ponto de contato $\mathbf{v}_c$, calculada pela Equação 3-21

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{v}_c^B - \mathbf{v}_c^A.$$

$$\mathbf{v}_c = \{\mathbf{v}^B + [\omega^B \times (\mathbf{x}_c - \mathbf{x}^B)]\} - \{\mathbf{v}^A + [\omega^A \times (\mathbf{x}_c - \mathbf{x}^A)]\} \quad (3-21)$$

onde $\mathbf{v}^A$ e $\mathbf{v}^B$ são as velocidades translacionais de A e B, respectivamente. A velocidade do contato $\mathbf{v}_c$ pode ser descrita em termos da velocidade normal e tangencial, em relação ao plano de contato, ou seja:

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{v}_{cn} + \mathbf{v}_{ct}.$$

Assim, a componente tangencial da velocidade do contato é dada por:

$$\mathbf{v}_{ct} = \mathbf{v}_c - \mathbf{v}_{cn} = \mathbf{v}_c - (\mathbf{v}_c \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}. \quad (3-22)$$

Calcula-se o incremento de deslocamento tangencial no contato a cada passo de integração através da equação:

$$\Delta \mathbf{u}_t = \mathbf{v}_{ct} \Delta t, \quad (3-23)$$

onde $\mathbf{v}_{ct}$ é a componente tangencial da velocidade no contato e $\Delta \mathbf{u}_t$ é utilizado para calcular o incremento da força tangencial, através da rigidez tangencial no contato, por:

$$\Delta \mathbf{f}_t = -k_t \Delta \mathbf{u}_t. \quad (3-24)$$

Assim, é possível calcular a força tangencial aplicada ao contato, atualizando sua direção e seu incremento, através da equação:

$$\mathbf{f}_t = \{\mathbf{f}_t\}_{rot2} + \Delta \mathbf{f}_t. \quad (3-25)$$

A força tangencial total é limitada pela força de atrito definida pela lei de Coulomb. Quando esta força atinge seu máximo valor, dado por $\mu \mathbf{f}_n$, com μ sendo o coeficiente de atrito estático, ocorre um deslizamento entre os corpos e a energia tangencial armazenada é dissipada. Ou seja,

$$\begin{aligned} &\text{se } \|\mathbf{f}_t\| > \mu \|\mathbf{f}_n\| \\ &\text{então } \mathbf{f}_t = \mu \|\mathbf{f}_n\| \frac{\mathbf{f}_t}{\|\mathbf{f}_t\|}. \end{aligned} \quad (3-26)$$

Os algoritmos explícitos de integração numérica apresentam uma alta eficiência computacional, porém, possuem a desvantagem de serem condicionalmente estáveis. Existe a necessidade de se utilizar incrementos de tempo iguais ou menores do que o incremento de tempo crítico. No trabalho de Cundall e Strack (4), é mencionado que o intervalo de tempo crítico é estimado pelo uso de uma massa m conectada a uma mola com rigidez k , da seguinte forma:

$$\Delta t_{cr} = 0.1 \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (3-27)$$

onde, neste trabalho, adotou-se $k = \max(k_n, k_t)$.