

2. Revisão bibliográfica

A análise dinâmica é o estudo da variação da quantidade de movimento de sistemas elásticos, causada pela ação de forças externas que mudam sua magnitude, sua direção ou sua posição no tempo. A mudança no tempo das forças externas, somado ao lento desenvolvimento das forças elásticas para manter o equilíbrio, fazem que o sistema modifique sua cinemática para buscar o equilíbrio com ajuda das “forças de inércia”; assim, a estrutura vibra pela sucessiva troca de energia potencial elástica (ou de deformação) e cinética e pára quando a energia introduzida é completamente dissipada (Roehl, [199-?]).

A origem de forças que variam no tempo é ampla e têm-se numerosos exemplos: o funcionamento de máquinas rotativas, a ação do vento, ondas sonoras, explosões, movimentos decorrentes de abalos sísmicos, o caminhar de pessoas, entre outras; portanto, conhecer o comportamento dinâmico de certo tipo de estruturas é tão importante quanto seu comportamento estático, para prever sua resposta durante toda sua vida útil.

Dependendo da definição das cargas dois diferentes enfoques podem ser usados na avaliação da resposta dinâmica de sistemas elásticos. Quando a variação da carga no tempo é completamente definida se trabalha dentro do enfoque determinístico; quando a variação do carregamento não está completamente definida, mas pode ser determinada estatisticamente trabalha-se dentro do enfoque não determinístico. Dentro do enfoque determinístico têm-se dois tipos de carga: periódicas e não periódicas; a primeira refere-se às cargas repetitivas que apresentam o mesmo comportamento em intervalos iguais de tempo, como a apresentada na Figura 2-1 (a). As cargas não periódicas são carregamentos que apresentam comportamentos diferentes em intervalos iguais do tempo, tal como a apresentada na Figura 2-1 (b) (Clough & Penzien, 1975).

São ditas ações de curta duração os carregamentos dinâmicos que agem em um intervalo curto de tempo como, por exemplo, as forças geradas por explosões; caso contrario as ações são ditas de longa duração.

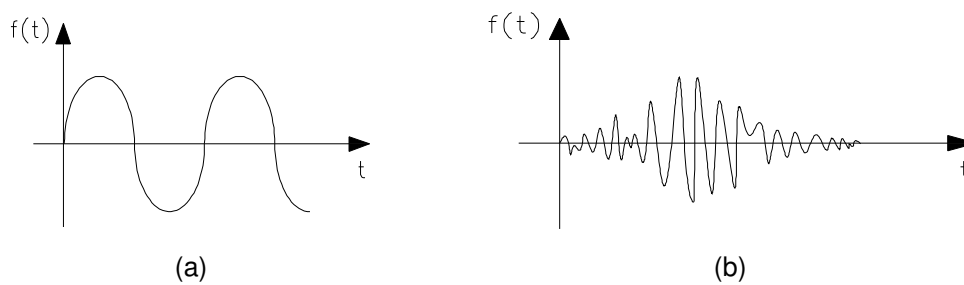


Figura 2-1 - Tipos de carregamento: (a) periódico, (b) não periódico

2.1. Graus de liberdade

Definem-se graus de liberdade como o número de coordenadas necessárias para definir a posição de um sistema estrutural em qualquer instante do tempo; na análise dinâmica é comum trabalhar com sistemas de um grau de liberdade (S1GL), pelo seu fácil entendimento e pelo fato que estruturas contínuas com n graus de liberdade podem ser discretizadas em n S1GL. Um dos modelos idealizados para S1GL é apresentado na Figura 2-2, onde a inércia é representada pela massa infinitamente rígida m , a elasticidade do sistema está representada pela mola com constante de rigidez k , e o amortecimento é representado pelo amortecedor viscoso sem massa, com coeficiente de amortecimento c . A força externa dependente do tempo, representada por $F(t)$ e $u(t)$, corresponde à resposta em deslocamento do sistema (Clough & Penzien, 1975).

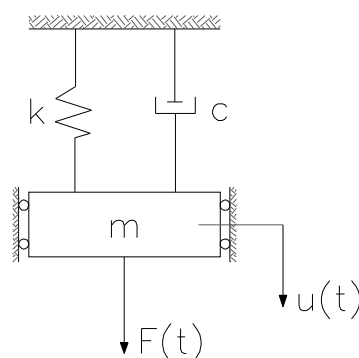


Figura 2-2 - Sistema dinâmico com um grau de liberdade (S1GL)

São assumidas quatro hipóteses no uso do modelo de S1GL:

- (a) A mola é assumida com massa desprezível.
- (b) A mola apresenta uma resistência ao movimento proporcional ao deslocamento.

- (c) O amortecedor apresenta uma resistência ao movimento proporcional à velocidade.
- (d) Não existem perdas de energia por atrito externo ao sistema.

2.2. Tipos de vibração

As vibrações dinâmicas podem ser livres, quando a vibração é causada exclusivamente pela troca de energia potencial e cinética presentes no sistema; ou vibrações forçadas nas quais além da energia do sistema, incorporam as ações externas variáveis no tempo. Mais ainda dentro destes tipos de vibração existem as vibrações amortecidas e não amortecidas; na primeira o sistema dissipa energia em cada ciclo de vibração, e na segunda não existe dissipação de energia, sendo simplesmente uma idealização teórica que ajuda ao entendimento de situações limites das vibrações amortecidas (Clough & Penzien, 1975).

A equação diferencial de segunda ordem que descreve o movimento do sistema amortecido mostrado na Figura 2-2 é a apresentada na eq. (2.1):

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = F(t) \quad (2.1)$$

A eq. (2.1) pode ser usada para analisar a resposta de qualquer sistema que seja representado como um S1GL.

2.2.1. Resposta em vibração livre

O S1GL usado para descrever este tipo de vibração é apresentado na Figura 2-3.

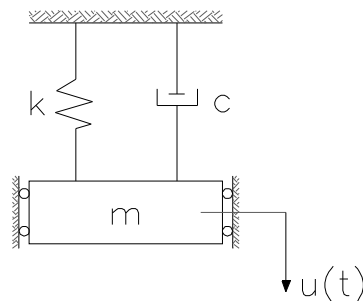


Figura 2-3 - S1GL para vibração livre

A equação diferencial de segunda ordem que descreve a vibração do sistema apresentado na Figura 2-3 corresponde à eq. (2.2) (Clough & Penzien, 1975):

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad (2.2)$$

Assumindo que a solução da eq. (2.2) é da forma da eq. (2.3):

$$u(t) = Ge^{st} \quad (2.3)$$

Substituindo a solução dada pela eq. (2.3) na eq. (2.2) temos a eq. (2.4):

$$(ms^2 + cs + k)Ge^{st} = 0 \quad (2.4)$$

Dividindo a eq. (2.4) pelo fator mGe^{st} , obtemos a eq. (2.5):

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} = 0 \quad (2.5)$$

Introduzindo a notação dada pela eq. (2.6):

$$\omega_o^2 = \frac{k}{m} \quad (2.6)$$

Onde $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$ é a frequência circular do movimento medida em rad/s.

Substituindo a eq. (2.6) na eq. (2.5) temos a eq. (2.7):

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \omega_o^2 = 0 \quad (2.7)$$

O valor de s pode ser obtido da eq. (2.7) e depende dos valores de c , m e ω_o^2 ; assim o tipo de movimento representado pela eq. (2.3) está determinado pelo amortecimento, pela massa e pela rigidez do sistema.

2.2.1.1. Vibração livre sem amortecimento

Para sistemas sem amortecimento, i.e., $c = 0$, a eq. (2.7) é da forma apresentada na eq. (2.8) (Clough & Penzien, 1975):

$$s^2 + \omega_o^2 = 0 \quad (2.8)$$

Resolvendo a eq. (2.8) temos (eq. (2.9)):

$$s = \pm i\omega_o \quad (2.9)$$

Assim, a resposta do sistema dada pela eq. (2.3) fica da forma da eq. (2.10):

$$u(t) = G_1 e^{i\omega_o t} + G_2 e^{-i\omega_o t} \quad (2.10)$$

Introduzindo a transformada do Euler apresentada na eq. (2.11):

$$e^{\pm i\omega_o t} = \cos \omega_o t \pm i \sin \omega_o t \quad (2.11)$$

Substituindo a eq. (2.11) na resposta do sistema sem amortecimento, dada pela eq. (2.10) temos a eq. (2.12):

$$u(t) = A \sin \omega_o t + B \cos \omega_o t \quad (2.12)$$

Na eq. (2.12) A e B dependem das condições iniciais, i.e., do deslocamento $u(0)$ e da velocidade $\dot{u}(0)$ no tempo $t=0$ no qual inicia a vibração livre do sistema; assim seus valores são os apresentados na eq. (2.13):

$$u(0) = B \quad \text{e} \quad \dot{u}(0) = A \omega_o \quad (2.13)$$

Substituindo as expressões da eq. (2.13) na solução dada na eq. (2.12), obtemos a eq. (2.14) que representa o movimento harmônico simples, apresentado na Figura 2-4.

$$u(t) = \frac{\dot{u}(0)}{\omega_o} \sin \omega_o t + u(0) \cos \omega_o t \quad (2.14)$$

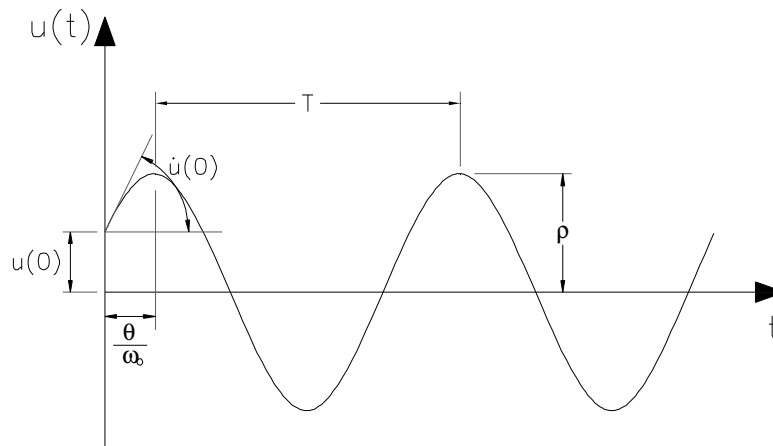


Figura 2-4 - Resposta em vibração livre para um S1GL sem amortecimento

A frequência, que representa o número de ciclos na unidade do tempo, vem dada pela expressão da eq. (2.15):

$$f = \frac{\omega_o}{2\pi} \quad (2.15)$$

E seu recíproco, o período, que representa o tempo que leva cada ciclo do movimento, vem dado pela eq. (2.16):

$$T = \frac{2\pi}{\omega_o} = \frac{1}{f} \quad (2.16)$$

Devido a que os dois harmônicos da resposta dada pela eq. (2.14) têm a mesma frequência ω_o , é possível escrever a resposta do sistema em um único harmônico, da forma da eq. (2.17):

$$u(t) = \rho \cos(\omega_o t - \theta) \quad (2.17)$$

A eq. (2.17) pode ser representada no diagrama de Argand (Figura 2-5); assim, a amplitude do movimento ρ , vem dada pela resultante da soma dos vetores, como na eq. (2.18):

$$\rho = \sqrt{[u(0)]^2 + \left[\frac{\dot{u}(0)}{\omega_o}\right]^2} \quad (2.18)$$

E o ângulo de fase das duas componentes é (eq. (2.19)):

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\dot{u}(0)}{u(0)\omega_o} \quad (2.19)$$

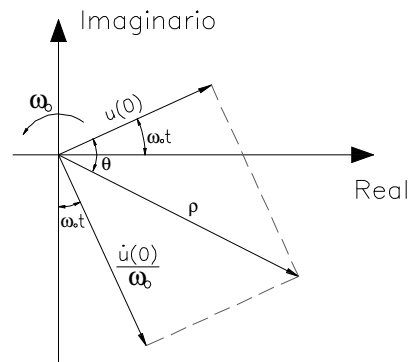


Figura 2-5 - Decomposição dos harmônicos da resposta em vibração livre

2.2.1.2. Vibração livre com amortecimento

Se o sistema tem amortecimento, a solução da eq. (2.7), que define a resposta do sistema é dada pela eq. (2.20) (Clough & Penzien, 1975):

$$s = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_o^2} \quad (2.20)$$

Assim, a resposta do sistema depende do valor da quantidade dentro do radical da eq. (2.20), que pode adotar valores positivos, negativos e também pode ser nulo.

2.2.1.2.1. Movimento criticamente amortecido

Este tipo de movimento é definido matematicamente quando o radical da eq. (2.20) é igual a zero. Para conseguir a anulação do radical é preciso que ocorra a igualdade da eq. (2.21) (Clough & Penzien, 1975):

$$\frac{c}{2m} = \omega_o \quad (2.21)$$

Isolando o valor de c da eq. (2.21) obtemos a definição do amortecimento crítico dada na eq. (2.22), que é definido como o valor mínimo de amortecimento para que sistema retorne à posição de equilíbrio sem oscilar:

$$c_c = 2m\omega_o \quad (2.22)$$

A solução do sistema, dada pela eq. (2.3) é da forma da eq. (2.23):

$$u(t) = e^{-\omega_o t} (C_1 + C_2 t) \quad (2.23)$$

As constantes C_1 e C_2 da eq. (2.23) dependem das condições iniciais do movimento e seus valores são apresentados na eq. (2.24):

$$C_1 = u(0) \quad \text{e} \quad C_2 = \dot{u}(0) + \omega_o u(0) \quad (2.24)$$

Substituindo os valores das constantes dadas na eq. (2.24) na eq. (2.23) temos a eq. (2.25):

$$u(t) = e^{-\omega_o t} [u(0) + (\dot{u}(0) + \omega_o u(0))t] \quad (2.25)$$

A solução da eq. (2.25) é plotada na Figura 2-6, onde fica evidente que um sistema em vibração livre com amortecimento crítico não oscila ao redor da posição de equilíbrio, pelo contrario retorna para zero com uma taxa de decaimento exponencial da eq. (2.25).

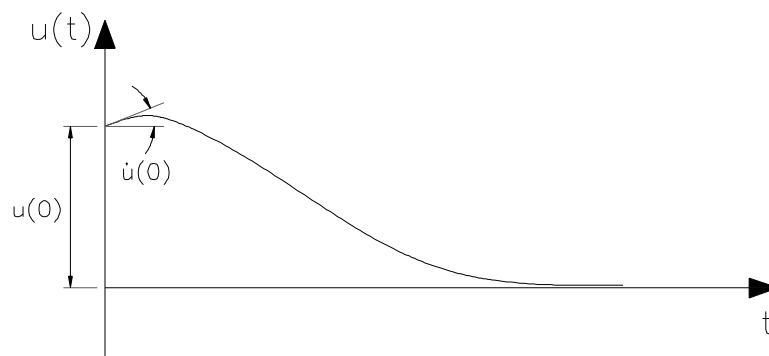


Figura 2-6 - Resposta em vibração livre para um S1GL com amortecimento crítico

2.2.1.2.2.

Movimento subamortecido

Para sistemas com amortecimento menor do amortecimento crítico o radical da eq. (2.20) tem um valor negativo. Introduzindo a notação ξ , conhecida como coeficiente de amortecimento, definida como a relação entre o amortecimento do sistema c e o amortecimento crítico c_c que matematicamente tem o valor dado pela eq. (2.26) (Clough & Penzien, 1975):

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_o} \quad (2.26)$$

Substituindo a eq. (2.26) na eq. (2.20) obtém-se a eq. (2.27):

$$s = -\xi\omega_o \pm \sqrt{\omega_o^2(\xi^2 - 1)} \quad (2.27)$$

Introduzindo a notação ω_a , conhecida como a freqüência circular amortecida, definida pela relação dada na eq. (2.28):

$$\omega_a = \omega_o \sqrt{1 - \xi^2} \quad (2.28)$$

Substituindo o valor de ω_a da eq. (2.28) na eq. (2.27) (eq. (2.29)):

$$s = -\xi\omega_o \pm i\omega_a \quad (2.29)$$

A resposta em vibração livre para um sistema subamortecido é obtida substituindo a eq. (2.29) na eq. (2.3) (eq. (2.30)):

$$u(t) = e^{-\xi\omega_o t} (C_1 e^{i\omega_a t} + C_2 e^{-i\omega_a t}) \quad (2.30)$$

Introduzindo a transformada de Euler da eq. (2.11) na solução anterior dada pela eq. (2.30), obtemos a eq. (2.31):

$$u(t) = e^{-\xi\omega_o t} (A \cos \omega_a t + B \sin \omega_a t) \quad (2.31)$$

As constantes A e B da eq. (2.31) dependem das condições iniciais do movimento e seus valores são dados na eq. (2.32):

$$A = u(0) \quad \text{e} \quad B = \frac{\dot{u}(0)}{\omega_a} + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} u(0) \quad (2.32)$$

Substituindo os valores das constantes da eq. (2.32) na solução dada na eq. (2.31), obtemos a eq. (2.33) que representa a resposta de um sistema subamortecido:

$$u(t) = e^{-\xi\omega_o t} \left(u(0) \cos \omega_a t + \left(\frac{\dot{u}(0)}{\omega_a} + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} u(0) \right) \sin \omega_a t \right) \quad (2.33)$$

Alternativamente esta resposta dada na eq. (2.33) pode ficar em função de um único harmônico, da forma da eq. (2.34):

$$u(t) = \rho e^{-\xi\omega_o t} \cos(\omega_a t - \theta) \quad (2.34)$$

Na eq. (2.34) o valor de ρ e θ são dados pelas eq. (2.35) e eq. (2.36):

$$\rho = \sqrt{u(0)^2 + \left(\frac{\dot{u}(0)}{\omega_a} + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} u(0) \right)^2} \quad (2.35)$$

$$\theta = \arctan \left(\frac{\frac{\dot{u}(0)}{\omega_a} + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} u(0)}{u(0)} \right) \quad (2.36)$$

A Figura 2-7 representa a resposta de um sistema subamortecido com condições iniciais $u(0) = u_o$ e $\dot{u}(0) = 0$, representada pela eq. (2.33).

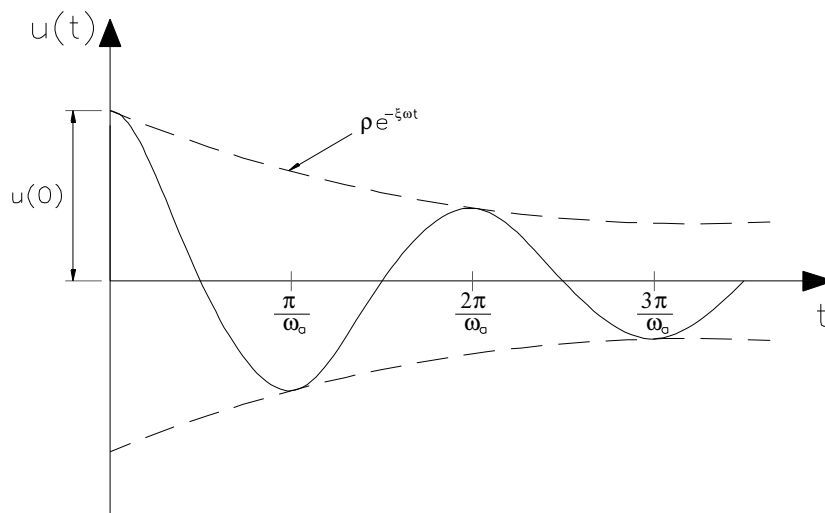


Figura 2-7 - Resposta em vibração livre para um S1GL subamortecido

2.2.1.2.3. Movimento superamortecido

As forças de amortecimento governam este tipo de movimento. No caso de sistemas com $\xi > 1$ a eq. (2.20) é da forma da eq. (2.37) (Clough & Penzien, 1975):

$$s = \omega_o \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right) = -\omega_o \xi \pm \omega_a' \quad (2.37)$$

Na eq. (2.37) $\omega_a' = \omega_o \sqrt{\xi^2 - 1}$. Assim, substituindo a eq. (2.37) na eq. (2.3) obtemos a relação que descreve o movimento para sistemas superamortecidos, eq. (2.38):

$$u(t) = e^{-\xi\omega_o t} \left(C_1 e^{\omega_a' t} + C_2 e^{-\omega_a' t} \right) \quad (2.38)$$

Trabalhando com as propriedades dadas pela eq. (2.39) que substituindo-lhas na eq. (2.38) obtemos a eq. (2.40):

$$e^\theta = \cosh \theta + \sinh \theta \quad e \quad e^{-\theta} = \cosh \theta - \sinh \theta \quad (2.39)$$

$$u(t) = e^{-\xi\omega_o t} \left[C_1 (\cosh(\omega_a' t) + \sinh(\omega_a' t)) + C_2 (\cosh(\omega_a' t) - \sinh(\omega_a' t)) \right] \quad (2.40)$$

Na eq. (2.40) $C_1 + C_2 = A$, $C_1 - C_2 = B$; simplificando, tem-se a eq. (2.41):

$$u(t) = e^{-\xi\omega_a t} [A \cosh(\omega_a t) + B \sinh(\omega_a t)] \quad (2.41)$$

Na eq. (2.41) as constantes A e B dependem das condições iniciais do movimento e são dadas na eq. (2.42):

$$A = u(0) \quad \text{e} \quad B = \frac{\dot{u}(0)}{\omega_a} + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} u(0) \quad (2.42)$$

Substituindo os valores das constantes da eq. (2.42) na solução dada na eq. (2.41), obtemos a eq. (2.43) que representa a resposta de um sistema superamortecido:

$$u(t) = e^{-\xi\omega_a t} \left[u(0) \cosh(\omega_a t) + \left(\frac{\dot{u}(0)}{\omega_a} + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} u(0) \right) \sinh(\omega_a t) \right] \quad (2.43)$$

A Figura 2-8 representa a resposta para um sistema superamortecido com três diferentes condições iniciais.

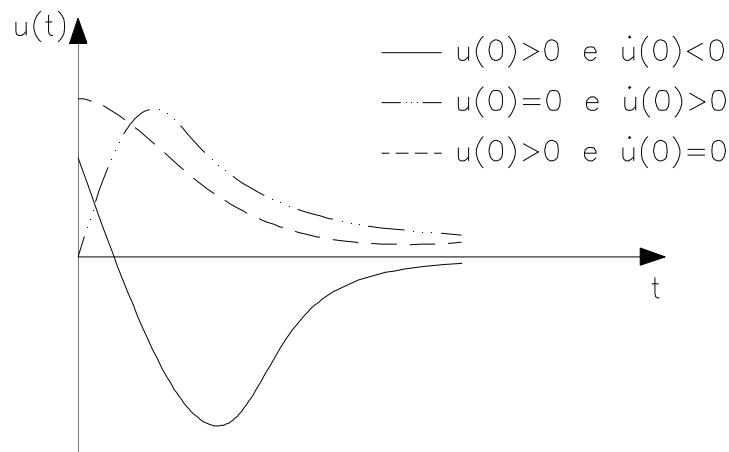


Figura 2-8 - Resposta em vibração livre para um S1GL superamortecido

2.3.

Medição experimental do coeficiente de amortecimento ξ

Amortecimento é uma propriedade dos sistemas em vibração de dissipar energia em cada ciclo, que fisicamente pode ser gerado por três mecanismos diferentes; quando o amortecimento é gerado por viscosidade e arrasto de fluidos é conhecido como amortecimento fluido; quando a dissipação de energia é produto do atrito entre os diferentes componentes de uma estrutura é dito amortecimento estrutural; é por último o amortecimento do material que é a propriedade intrínseca de cada material de dissipar energia. Assim o

$$\xi = \frac{1}{2\pi k} \ln \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} \right) \quad (2.46)$$

2.4. Análise modal

A análise modal constitui uma ferramenta usada para construir modelos que representem a dinâmica dos sistemas vibratórios. Suas principais aplicações são: identificação e avaliação do fenômeno de vibração; validação, correção e atualização de modelos dinâmicos analíticos; desenvolvimento de modelos dinâmicos baseados em testes experimentais; avaliação da integridade estrutural e detecção do dano (Maia & Silva, 1997).

Dentro da análise modal são assumidas três considerações:

- A estrutura é um sistema linear, e seu comportamento dinâmico pode ser descrito por um modelo representado por um conjunto de equações diferenciais de segunda ordem.
- A estrutura obedece ao teorema de reciprocidade de Maxwell.
- A estrutura é invariante no tempo.

2.4.1. Função de transferência

Existem muitas formas de solucionar as equações de segunda ordem que descrevem o movimento de sistemas em vibração sob qualquer tipo de carregamento; uma delas foi apresentada anteriormente e outra é pelo método da transformada de Laplace, que transforma a equação diferencial em uma equação algébrica de fácil manipulação. Esse método oferece muitas vantagens, pois permite trabalhar com funções descontínuas que automaticamente levam em conta as condições iniciais do problema (Maia & Silva, 1997).

A transformada de Laplace da função $u(t)$ é denotada como $U(s)$ e está definida da forma da eq. (2.47):

$$U(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} u(t) dt \quad (2.47)$$

Na eq. (2.47) s é conhecida como a variável de Laplace que geralmente tem um valor complexo. Fazendo a transformada de Laplace em cada lado da eq. (2.1), temos a eq. (2.48) e a eq. (2.49):

$$\mathcal{L}(m\dot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t)) = m[s^2U(s) - su(0) - \dot{u}(0)] + c[sU(s) - u(0)] + kU(s)$$

$$= (ms^2 + cs + k)U(s) - msu(0) - m\dot{u}(0) - cu(0) \quad (2.48)$$

$$\mathcal{L}(F(t)) = F(s) \quad (2.49)$$

Juntando as duas transformadas de Laplace, eq. (2.48) e eq. (2.49), obtemos a eq. (2.50):

$$(ms^2 + cs + k)U(s) = F(s) + m\dot{u}(0) + (ms + c)u(0) \quad (2.50)$$

Na eq. (2.50) $u(0)$ e $\dot{u}(0)$ são as condições iniciais em deslocamento e velocidade do movimento respectivamente. Se as condições iniciais são nulas, a relação entre a transformada da resposta e a transformada da excitação pode ser expressada como a eq. (2.51):

$$H(s) = \frac{U(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \quad (2.51)$$

Sendo $H(s)$ uma função de valor complexo de s , conhecida como a função de transferência do sistema. Cabe ressaltar que o denominador da eq. (2.51) é correspondente com um dos fatores da eq. (2.4).

2.4.2. Funções de Resposta em Freqüência (FRF)

Avaliando a função de transferência dada na eq. (2.51) no domínio da freqüência, i.e., $s = i\omega$, obtemos a definição matemática das FRF definida pela eq. (2.52):

$$H(\omega) = H(s)|_{s=i\omega} = \frac{1}{(k - \omega^2 m) + i\omega c} \quad (2.52)$$

A FRF definida na eq. (2.52) representa uma das possíveis formas das funções de resposta em freqüência, comumente conhecida como receptância, geralmente denotada como $\alpha(\omega)$, e representa a relação entre a resposta do sistema em deslocamentos e a força aplicada avaliadas no domínio da freqüência (Maia & Silva, 1997).

As propriedades dinâmicas do sistema podem ser expressas em termos de qualquer característica da resposta de vibração, sendo possível expressar as FRF em termos de deslocamento, velocidade ou aceleração. Assim a resposta do sistema em termos de velocidade é conhecida como mobilidade, e em termos de aceleração é conhecida como acelerância:

$$\alpha(\omega) = \frac{\text{Resposta em deslocamento}}{\text{Força aplicada}} = \text{Receptância}$$

$$Y(\omega) = \frac{\text{Resposta em velocidade}}{\text{Força aplicada}} = \text{Mobilidade}$$

$$A(\omega) = \frac{\text{Resposta em aceleração}}{\text{Força aplicada}} = \text{Acelerância}$$

Como deslocamento, velocidade e aceleração são quantidades físicas relacionadas, as FRF estão correlacionadas também. Considerando uma vibração harmônica e assumindo que a FRF é dada em termos de mobilidade, temos a eq. (2.53):

$$Y(\alpha) = \frac{\dot{u}(t)}{F(t)} = \frac{i\omega\bar{U}e^{i\alpha t}}{Fe^{i\alpha t}} = i\omega\frac{\bar{U}}{F} = i\omega\alpha(\omega) \quad (2.53)$$

Para FRF em termos de acelerância (eq. (2.54)):

$$A(\alpha) = \frac{\ddot{u}(t)}{F(t)} = \frac{-\omega^2\bar{U}e^{i\alpha t}}{Fe^{i\alpha t}} = -\omega^2\alpha(\omega) \quad (2.54)$$

2.4.2.1. Representação das FRF

Existem muitas alternativas de representação gráfica das FRF; as apresentadas no presente documento correspondem às usadas no análise de vibrações.

Devido a que as FRF são funções complexas avaliadas no domínio da frequência, é comum representar-lhas em dois gráficos separados, um para a parte real (Figura 2-10 (a)) e outro para a parte imaginária (Figura 2-10 (b)); as duas figuras correspondem a um S1GL de $m=1kg$, $k=100N/m$ e $c=0.6Ns/m$ com frequência natural $\omega_o = 10 rad/s$ (Maia & Silva, 1997).

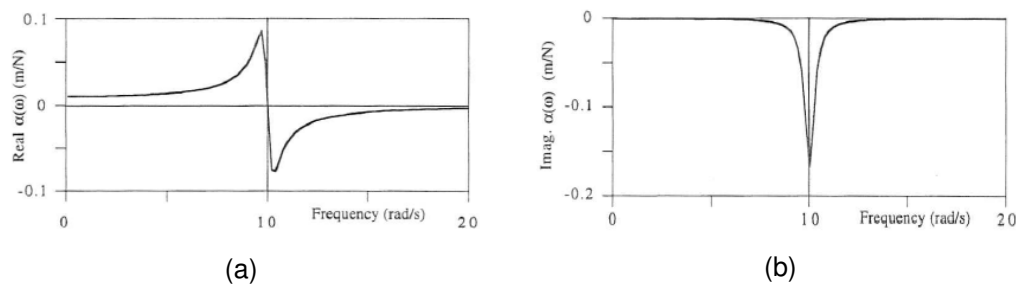


Figura 2-10 - Representação da receptância para S1GL: (a) parte real, (b) parte imaginária. (Maia & Silva, 1997)

Outra forma de representar as FRF é plotar a parte real da resposta contra a parte imaginária; este tipo de gráfico conhecido como o gráfico de Nyquist é apresentado na Figura 2-11, que corresponde ao mesmo S1GL do exemplo anterior.

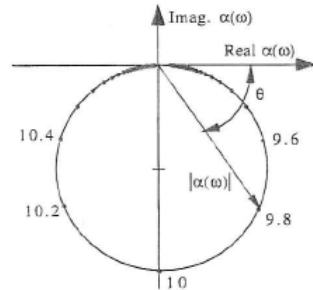


Figura 2-11 - Gráfico de Nyquist da receptância. (Maia & Silva, 1997)

Atualmente a forma mais comum é conhecida como o diagrama de Bode, que corresponde à representação da magnitude e a fase da FRF em função da frequência (Figura 2-12); o exemplo plotado corresponde ao mesmo S1GL trabalhado anteriormente e cabe ressaltar que na Figura 2-12 (a) o ponto onde ocorre o máximo de $\alpha(\omega)$ corresponde ao valor de ω_b do sistema. Na Figura 2-12 (b) o valor de ω_b corresponde à interseção da fase com o eixo da frequência.

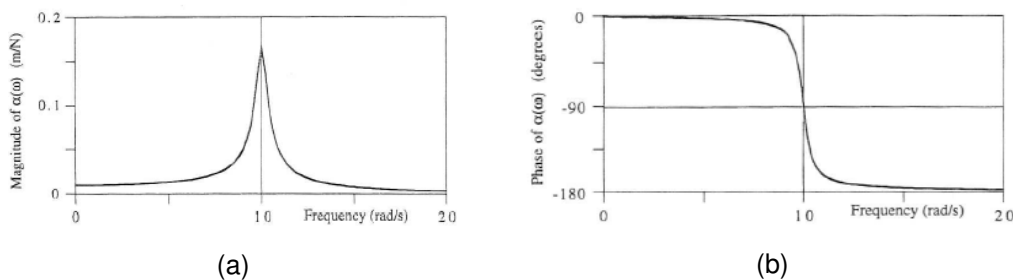


Figura 2-12 - Diagrama de Bode: (a) magnitude da receptância, (b) fase da receptância (Maia & Silva, 1997)

Para a representação gráfica das FRF na pratica são comumente usadas escalas logarítmicas para os eixos da magnitude e da frequência, pois para S1GL a obtenção das características dinâmicas do sistema é direta. A Figura 2-13 apresenta o gráfico log-log da magnitude contra a frequência para o mesmo S1GL trabalhado anteriormente.

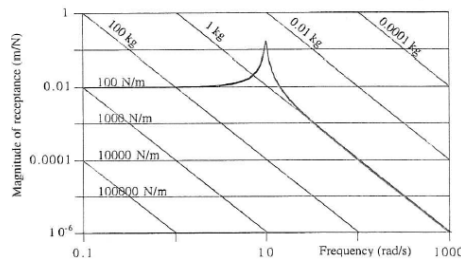


Figura 2-13 - Gráfico log-log da magnitude da receptância contra a freqüência. (Maia & Silva, 1997)

Dentro do análise de vibrações a escala logarítmica da magnitude da receptância é expressa em decibéis (dB), definida de forma análoga à escala usada em acústica. Assim, para uma receptância de amplitude α , seu valor em decibéis é (eq. (2.55)):

$$\alpha(dB) = 20 \log_{10} \left(\frac{\alpha}{\alpha_{ref}} \right) \quad (2.55)$$

Na eq. (2.55) α_{ref} é um valor de referencia que deve ser conhecido com antecipação; caso não se possua informação este valor de referencia é tomado como a unidade.

Os gráficos log-log também podem ser aplicados para medições em termos de mobilidade ou acelerância, apresentados na Figura 2-14 (a) e (b) respectivamente; o gráfico corresponde ao mesmo S1GL trabalhado nesta seção.

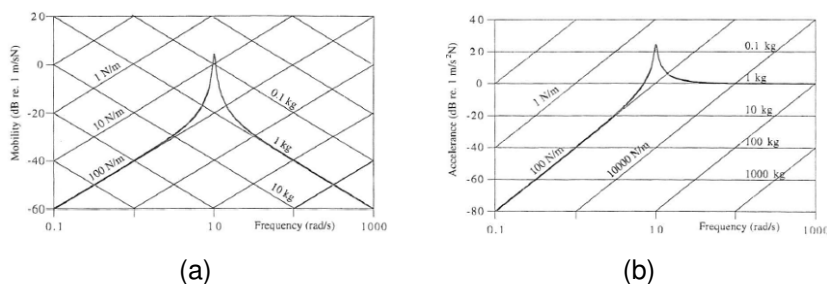


Figura 2-14 - Gráfico log-log da magnitude da FRF contra a freqüência: (a) da mobilidade, (b) da acelerância (Maia & Silva, 1997)

2.4.3. Métodos de identificação modal

Como foi dito anteriormente as FRF contêm todas as características dinâmicas dos sistemas. Experimentalmente, quando uma estrutura é excitada, são obtidas varias FRF correspondentes aos diferentes pontos selecionados previamente para determinar as propriedades dinâmicas; os dados provenientes

das FRF devem ser tratados numericamente para conhecer as características do sistema que estão contidas nelas.

Existem métodos de identificação modal que trabalham no domínio do tempo e no domínio da frequência; os primeiros em geral tendem a fornecer melhores resultados quando existe uma ampla faixa de frequência ou um número grande de modos de vibração que querem ser analisados; os modelos no domínio da frequência são usados quando a faixa de frequência é limitada e o número de modos de vibração é pequeno.

Tanto os métodos que trabalham no domínio do tempo como no domínio da frequência podem ser divididos em métodos indiretos (ou modais) e diretos. O primeiro significa que a identificação das FRF é baseada num modelo modal, i.e., nos parâmetros modais (frequências naturais, coeficientes de amortecimento, constantes modais e suas fases). O segundo (diretos) significa que a identificação é diretamente baseada no espaço modal, i.e., na equação matricial geral de equilíbrio dinâmico (Maia & Silva, 1997).

2.4.3.1.

Método dos polinômios de fração racional (RFP)

O método dos polinômios de fração racional é um método indireto que trabalha no domínio da frequência, cuja formulação matemática foi definida no ano 1982 (Richardson & Formenti, 1982) e, hoje em dia, constitui o método de identificação modal mais usado. A FRF obtida experimentalmente é expressa na forma de frações racionais e a função do erro, que tem que ser minimizada, é estabelecida de forma que o sistema de equações resultantes seja linear; uma das principais vantagens desse método é que não precisa de uma estimativa inicial dos parâmetros modais. Devido a que o sistema de equações lineares obtidas envolve matrizes auto-condicionadas, a forma de frações racionais das FRF é expressa em termos de polinômios ortogonais (Maia & Silva, 1997).

A formulação matemática na que está baseado esse método é apresentada no Anexo A.

2.5.

Estrutura do bambu

A estrutura externa do bambu está constituída por quatro partes principais: um sistema subterrâneo de rizomas, colmo, galhos y folhas (Ghavami & Marinho, 2005). Os colmos são formados por nós e entrenós, distribuídos de forma

alternada ao longo do comprimento do bambu, constituídos principalmente por fibras, vasos vasculares e condutores de seiva, envolvidos em uma matriz de parênquima (Ghavami & Marinho, 2005). O comprimento dos colmos, espessura da parede, distancia internodal, diâmetro e resistência, difere entre as diferentes espécies de bambu.

Do ponto de vista anatômico, de modo geral, a seção transversal dos colmos de bambu está constituída por 40% de fibras de celulosa, 50% de células parenquimosas e 10% de vasos vasculares (Liese, 1998). Assim, segundo Ghavami et al. (2003) a estrutura interna dos bambus pode ser considerada como um material compósito de fibras de celulosa longas e alinhadas dentro de uma matriz de lignina; a distribuição das fibras varia ao longo da espessura da parede do colmo, sendo maior na parte externa, onde o material está mais solicitado aos esforços produzidos pelo vento; este comportamento é conhecido como funcionalidade graduada. A Figura 2-15 apresenta a variação da fração volumétrica das fibras na espessura do colmo.

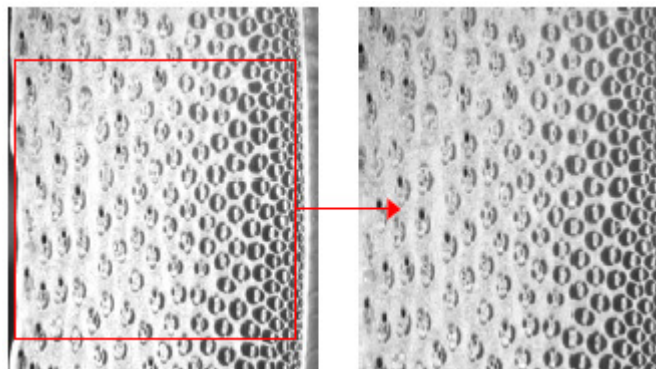


Figura 2-15 - Variação da fração volumétrica das fibras na espessura do colmo do bambu da espécie *Guadua Angustifolia* (Ghavami & Marinho, 2005).

2.6. Pesquisas anteriores

Ghavami et al. (2003) desenvolveu o primeiro trabalho do que se tem conhecimento no estudo das propriedades dinâmicas do bambu; foram ensaiados pequenos segmentos de bambu em balanço da espécie *Dendrocalamus Giganteus* com dimensões aproximadas de 3 mm x 12 mm de seção transversal com comprimento de 50 mm, cujo objetivo era a medição do seu coeficiente de amortecimento com ensaios de vibração livre. A resposta dos segmentos foi obtida com acelerômetros fixados na extremidade livre e os

amortecimentos obtidos pelo método do decremento logarítmico. Os resultados deste ensaio são mostrados na Tabela 2.1.

ESPÉCIME 1		ESPÉCIME 2	
Teste	ξ (%)	Teste	ξ (%)
1	0.690	1	0.542
2	0.645	2	0.539
3	0.507	3	0.427
4	0.516	4	0.537
Média	0.590	Média	0.511

Tabela 2.1 - Coeficiente de amortecimento do bambu para a espécie *Dendrocalamus giganteus* (Ghavami et al, 2003)

O segundo trabalho foi desenvolvido por Coelho (2005), onde foram determinados os coeficientes de amortecimento e frequências naturais de vibração para as espécies *Dendrocalamus Giganteus*, *Phyllostachys Áurea* e *Guadua Angustifólia* em testes de vibração livre e modais. Os segmentos usados na vibração livre tinham aproximadamente 40 mm x 5 mm de seção transversal e 550 mm de comprimento. Para os testes modais foram usados colmos inteiros das três espécies de 33 cm e 100 cm de comprimento. Nesta pesquisa foram utilizadas as bases de bambu, sem nenhum tratamento; os bambus da espécie *Dendrocalamus Giganteus* e *Guadua Angustifólia* foram corados no ano 2003 e da espécie *Phyllostachys Áurea* no ano 2001. Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 2.2.

ESPÉCIE	SEGMENTOS 55 cm		COLMOS 33 cm		COLMOS 100 cm	
	ξ (%)	fo (Hz)	ξ (%)	fo (Hz)	ξ (%)	fo (Hz)
<i>Dendrocalamus giganteus</i>	1.52	8.00	1.89	2890.99	1.75	567.65
<i>Phyllostachys áurea</i>	1.32	9.50	1.05	856.90	0.96	254.10
<i>Guadua angustifólia</i>	0.99	11.25	1.60	2798.49	1.20	540.16

Tabela 2.2 - Parâmetros dinâmicos para bambus das espécies *Dendrocalamus Giganteus*, *Phyllostachys Áurea* e *Guadua Angustifólia* (Coelho, 2005)