

### 3 Modelo Matemático

A mecânica dos fluidos é, no vasto campo da mecânica aplicada, a disciplina que se dedica ao estudo do comportamento dos fluidos, em repouso e em movimento. A disciplina da mecânica dos fluidos que estabelece as leis que regem o movimento dos fluidos é chamada hidrodinâmica.

O estudo do movimento dos fluidos já vem sendo desenvolvido há séculos, a primeira tentativa de descrever as equações de movimento dos fluidos foi feita por Leonard Euler, considerado um dos fundadores da hidrodinâmica. Porém, somente no século XIX o estudo ganhou força com o desenvolvimento das equações de Navier-Stokes, a partir dos trabalhos pioneiros dos franceses Claude Navier (1822) e Siméon Denis Poisson (1829) e do inglês George Stokes (1845) (Fortuna, 2000).

A condição física de um fluido é totalmente determinada se forem conhecidas as componentes  $u$ ,  $v$  e  $w$  da velocidade, relativas ao eixo cartesiano  $x$ ,  $y$  e  $z$  respectivamente, assim como os valores da densidade  $\rho$  e da pressão  $p$ , para qualquer tempo  $t$  de todos os pontos ocupados pelo fluido. Há, portanto cinco incógnitas ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\rho$ ,  $p$ ) e quatro variáveis independentes ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$ ) no problema relativo ao escoamento dos fluidos.

Há ainda dois métodos de abordagem do problema: método de Lagrange e método de Euler. O primeiro consiste em acompanhar as partículas individuais em seu movimento ao longo de sua trajetória. O segundo estuda as grandezas físicas do fluido no decorrer do tempo, em um determinado volume de controle, fixo no espaço. O método Euleriano é usado na maior parte dos problemas de fluidos (Kundu & Cohen, 2002).

As equações que modelam o escoamento dos fluidos são baseadas nas seguintes leis de conservação: conservação da massa, conservação da quantidade de movimento e conservação da energia. Essas leis podem ser expressas na forma integral, e nessa forma as expressões podem ser aplicadas a um volume fixo no espaço ou a um volume material, que consiste das mesmas partículas fluidas e, no qual a superfície de contorno move-se com o fluido.

Um volume fixo no espaço é chamado de volume de controle, e é um volume arbitrário no espaço através do qual o fluido escoar. O contorno

geométrico do volume de controle é chamado de superfície de controle (Fox & MacDonalds, 1985).

### 3.1. Conservação da Massa

O volume de controle usado para deduzir o princípio da conservação da massa é um cubo infinitesimal de lados  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$  Figura 13. A densidade no centro,  $O$ , do volume de controle é  $\rho$  e a velocidade é  $\mathbf{u} = \hat{i}u + \hat{j}v + \hat{k}w$ .

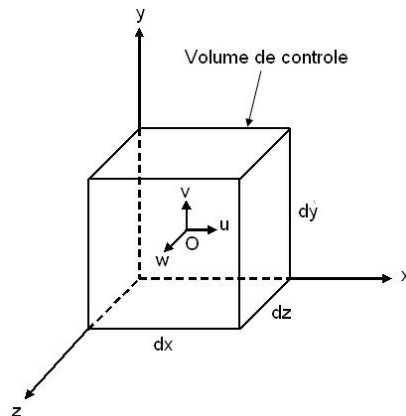


Figura 13 - Volume de controle em coordenadas retangulares

Para avaliar as propriedades em cada uma das seis faces do volume de controle, usamos a expansão em série de Taylor em torno de ponto  $O$ . Por exemplo, na face da direita tem-se:

$$\rho_{x+dx/2} = \rho + \left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)\frac{dx}{2} + \left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}\right)\frac{1}{2!}\left(\frac{dx}{2}\right)^2 + \dots \quad (2)$$

Desprezando os termos de ordem elevada, obtém-se:

$$\rho_{x+dx/2} = \rho + \left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)\frac{dx}{2} \quad (3)$$

$$u_{x+dx/2} = u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{dx}{2}$$

As expressões, correspondentes ao lado esquerdo do volume de controle, são:

$$\begin{aligned} \rho_{x-dx/2} &= \rho + \left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)\left(-\frac{dx}{2}\right) = \rho - \left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)\frac{dx}{2} \\ u_{x-dx/2} &= u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(-\frac{dx}{2}\right) = u - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{dx}{2} \end{aligned} \quad (4)$$

A lei da conservação da massa estabelece que:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Taxa líquida de fluxo} \\ \text{de massa através da} \\ \text{superfície de controle} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{l} \text{Taxa de variação da} \\ \text{massa dentro do volume} \\ \text{de controle} \end{array} \right] = 0 \quad (5)$$

Para avaliar o primeiro termo da eq. (5), deve-se considerar o fluxo de massa através de cada uma das seis faces da superfície de controle. Assim, a taxa líquida de fluxo de massa através da superfície de controle é dada por:

$$\int_{sc} \rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} = \left[ \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right] dx dy dz \quad (6)$$

A massa dentro do volume de controle em qualquer instante é o produto da massa por unidade de volume,  $\rho$ , e o volume,  $dx dy dz$ . Então, a taxa de variação de massa dentro do volume de controle é dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz \quad (7)$$

Em coordenadas retangulares a equação diferencial para a conservação da massa é:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (8)$$

Sendo o operador diferencial,  $\nabla$ , em coordenadas cartesianas tridimensionais, definido por:

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (9)$$

Logo:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = \nabla \cdot \rho \vec{V} \quad (10)$$

Assim a conservação da massa pode ser escrita então como:

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (11)$$

A taxa total de variação,  $D/Dt$ , de uma variável qualquer,  $F$  do fluxo é geralmente chamada de derivada material (também conhecida como derivada substancial, derivada da partícula ou derivada total) para enfatizar o fato de que a partícula é tomada em relação a um elemento fluido, eq. (12). Ela é composta de duas parcelas: a derivada local  $\partial F/\partial t$  é a taxa local de variação de  $F$  em um dado ponto fixo, e é zero para fluxos permanentes. A segunda parcela  $u_i \partial F/\partial x_i$  é chamada derivada advectiva, isto porque ela representa a variação de  $F$  como resultado da advecção da partícula de um local para outro, sendo o valor de  $F$  diferente (Kundu & Cohen, 2002).

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + u_i \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i \quad (12)$$

Com isso, pode-se reescrever o termo divergente da eq. (11) da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \quad (13)$$

Logo, define-se a equação da continuidade como:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (14)$$

Onde o termo  $D\rho/Dt$  representa a taxa de variação da densidade seguindo a partícula fluida. Esse termo pode ser diferente de zero devido a variação da pressão, temperatura ou composição do fluido, tal como a salinidade da água do mar. O fluido é usualmente chamado de incompressível se essa densidade não varia com a pressão, caso contrário são denominados compressíveis. Líquidos são praticamente incompressíveis, entretanto gases são compressíveis. Para velocidades inferiores a  $100 \text{ m/s}$ , as variações absolutas da pressão no fluido são pequenas. Neste, e em diversos outros casos, a variação da densidade no fluido também é pequena.

Para fluidos satisfazendo determinadas condições, Boussinesq em 1903 sugeriu que a variação da densidade no fluido pode ser desprezada, exceto nos termos que contém a parcela da gravidade, onde  $\rho$  é multiplicado por  $g$  (Spiegel & Veronis, 1960). Logo, o termo  $\rho^{-1} D\rho/Dt$ , na eq. (14) pode ser desprezado, neste caso a equação da continuidade é reduzida para a forma incompressível, dada por:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (15)$$

sendo o fluido permanente ou não.

### 3.2. Conservação da Quantidade de Movimento

A lei da conservação da quantidade de movimento pode ser expressa na forma diferencial aplicando-se diretamente a segunda Lei de Newton em um elemento de fluido infinitesimal.

Considere o movimento de um elemento de fluido infinitesimal conforme mostrado na Figura 14.

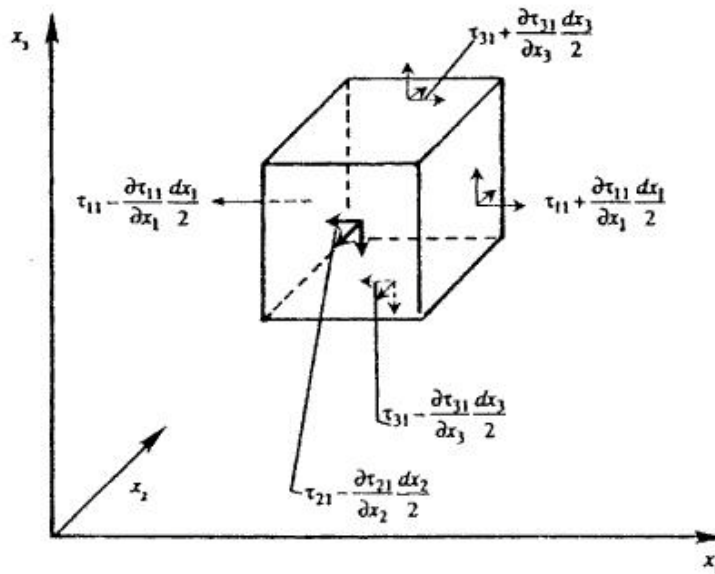


Figura 14 – Tensões na direção  $x$  de um elemento infinitesimal de um fluido

A lei de Newton exige que a força no elemento seja igual à massa multiplicada pela aceleração do elemento. A soma da força na superfície na direção  $x_1$  é igual a:

$$\begin{aligned} & \left( \tau_{11} + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} \frac{dx_1}{2} - \tau_{11} + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} \frac{dx_1}{2} \right) dx_2 dx_3 \\ & + \left( \tau_{21} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} \frac{dx_2}{2} - \tau_{21} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} \frac{dx_2}{2} \right) dx_1 dx_3 \\ & + \left( \tau_{31} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} \frac{dx_3}{2} - \tau_{31} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} \frac{dx_3}{2} \right) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (16)$$

Simplificando a eq. (16), tem-se:

$$\left( \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{\partial \tau_{i1}}{\partial x_i} dV \quad (17)$$

Onde  $dV$  é o volume do elemento infinitesimal. Generalizando, tem-se que a componente  $i$  da força de superfície pela unidade de volume do elemento é dado por:

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} \quad (18)$$

Nota-se que na eq. (18) foi usada a propriedade da simetria,  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ . Sendo  $g$  a força de corpo pela unidade de massa, logo,  $\rho g$  é à força de corpo por unidade de volume. Assim, a lei de Newton fornece:

$$\rho \frac{Du_j}{Dt} = \rho g_j + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} \quad (19)$$

A eq. (19) é, portanto, a equação de movimento que relaciona a aceleração com a força, e é conhecida como equação de movimento de Cauchy.

Reescrevendo-se a derivada material da eq.(19), tem-se:

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \rho \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} + \rho g_j \quad (20)$$

### 3.3. Modelo Matemático Para as Correntes de Turbidez

As equações para o movimento das correntes de turbidez no contexto deste trabalho são governadas pela lei de conservação da massa e pela lei da conservação da quantidade de movimento.

A conservação da massa, eq. (11), para fluidos incompressíveis pode ser escrita da seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (21)$$

Onde  $u_i$  é a velocidade na direção  $x_i$ .

E a lei de conservação da quantidade de movimento, eq. (20), pode ser escrita como:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = T'_j + g_j \quad (22)$$

Onde  $j$  corresponde a direção 1, 2 e 3,  $t$  é o tempo,  $g_j$  é a força de corpo e  $T'_j$  é a força de superfície na direção  $i$  do plano perpendicular a direção  $j$  e é dada por:

$$T'_j = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} \quad (23)$$

Utilizando-se as equações de velocidade média, apenas  $j = 1$  ou  $j = 2$  interessam, uma vez que a direção  $j = 3$  corresponde à direção vertical. Isto faz com que a força de corpo no lado direito da eq. (22) desapareça.

Integrando a eq. (21) e (22) ao longo da altura  $h$  do fluxo, e utilizando o teorema de Leibniz (Abramowitz & Stegun, 1965), tem-se:

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (h \bar{u}_i) + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (24)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t}(h\bar{u}_j) + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i}(h\bar{u}_i\bar{u}_j) = h\bar{T}_j' \quad (25)$$

Onde os termos com barra significam uma quantidade média na profundidade. Finalmente, combinando as eq. (24) e (25) obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{u}_j) + \sum_{i=1}^2 \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{u}_j) = \bar{T}_j \quad (26)$$

A eq. (26) é simplesmente a versão 2D da eq. (22). As eq. (24) e (26) são utilizadas para modelar a evolução da espessura do fluxo e a velocidade do fluxo respectivamente. Essas expressões são absolutamente gerais, visto que não fazem nenhuma hipótese com relação a propriedades reológicas, tipo de fluxo (laminar, turbulento ou granular) ou sobre como a densidade do fluxo varia no tempo e espaço. Esses fatores são incorporados ao modelo através do termo que relaciona a tensão no lado direito da eq. (26).

### 3.3.1. Tensão de Cisalhamento em Fluxos Newtonianos Turbulentos

A tensão em um fluido Newtoniano é definida pela seguinte relação, (Acheson, 1990):

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (27)$$

Onde  $p$  é a pressão e  $\mu$  é a viscosidade.

Para escoamentos turbulentos, como os considerados neste trabalho, as velocidades podem ser estendidas como um grupo de médias, isto é, são as médias das velocidades de uma grande quantidade de fluxos idênticos avaliados, e  $\mu$  é a viscosidade turbulenta.

Segundo Waltham *et al* (2008), para correntes de turbidez de baixa concentração a densidade do fluxo é quase constante, isto é, pode ser aproximada a densidade da água,  $\rho = \rho_w$ , assim combinando as eq. (23) e (27) obtém-se:

$$\bar{T}_j \approx \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \mu \nabla^2 \bar{u}_j + \tau_j(h) - \tau_j(0) \right) \quad (28)$$

Onde  $\nabla^2 = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$  e  $\tau_j = \mu \partial u_j/\partial x_3$  é a tensão de cisalhamento horizontal na direção  $j$ .

O termo que relaciona a viscosidade turbulenta na eq. (28) é equivalente a equação da velocidade-difusão, e esta simplesmente suaviza o campo de velocidades resultante. O coeficiente de difusão é dado por  $\mu/\rho_w$ , este por sua

vez depende da velocidade do fluxo e pode ser anisotrópico (Waltham *et al*, 2008). Entretanto, por simplicidade, esse termo será considerado como um parâmetro constante na modelagem, escolhido apenas para garantir a estabilidade numérica.

A altura da lâmina de fluido ambiente é muito maior do que a altura da corrente de turbidez. Logo, o escoamento é considerado similar ao escoamento de camada limite. Isto é, como a escala horizontal é muito maior que a espessura do fluido, pode-se utilizar uma aproximação hidrostática apropriada para obter o gradiente de pressão hidrostático. Além disso, é considerada a concentração do fluxo constante. Assim, para o gradiente de pressão hidrostático no ponto  $P$ , Figura 15, tem-se:

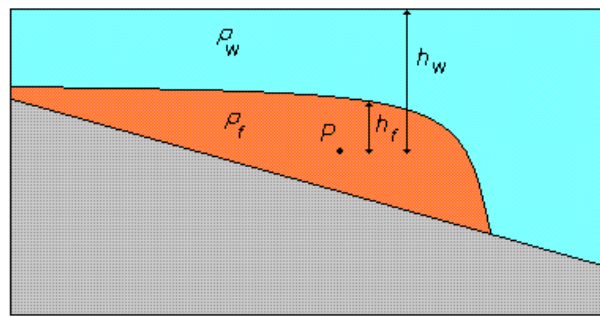


Figura 15 - Gradiente de pressão no ponto P

$$P = \rho_w g (h_w - h_f) + \rho_f g h_f \quad (29)$$

Sendo a altura  $h_w$  constante ao longo da direção  $x$ , tem-se o gradiente de pressão definido por:

$$\frac{\partial P}{\partial x_j} = -\rho_w g \frac{\partial h_f}{\partial x_j} + \rho_f g \frac{\partial h_f}{\partial x_j} \quad (30)$$

Logo:

$$\frac{\partial P}{\partial x_j} = \frac{\partial P}{\partial x_j} = \Delta \rho g \frac{\partial h_f}{\partial x_j} \quad (31)$$

onde  $g$  é a aceleração devido à gravidade,  $\rho_f$  é a densidade do fluxo,  $\rho_w$  é a densidade do meio circundante,  $\Delta \rho$  é a diferença entre a densidade do sedimento e a densidade do meio circundante e  $h_f$  é a altura do topo do fluido.

O gradiente de pressão hidrostático ocorre devido à declividade. O fluxo se move até que o gradiente de pressão seja equilibrado com a tensão de cisalhamento. Por outro lado, a tensão de cisalhamento, tanto no topo quanto na base do fluxo, aumenta com a velocidade.



A eq. (31) mostra que o gradiente de pressão hidrostático não depende da declividade da superfície da base, sendo função apenas da declividade do topo do fluxo e da diferença de densidade entre o meio circundante e o fluxo, como ilustrado na Figura 16.

Na Figura 16a o mar não se move na direção da declividade da terra. Porém, na Figura 16b o rio move-se na direção da declividade da terra, conforme eq. (31).

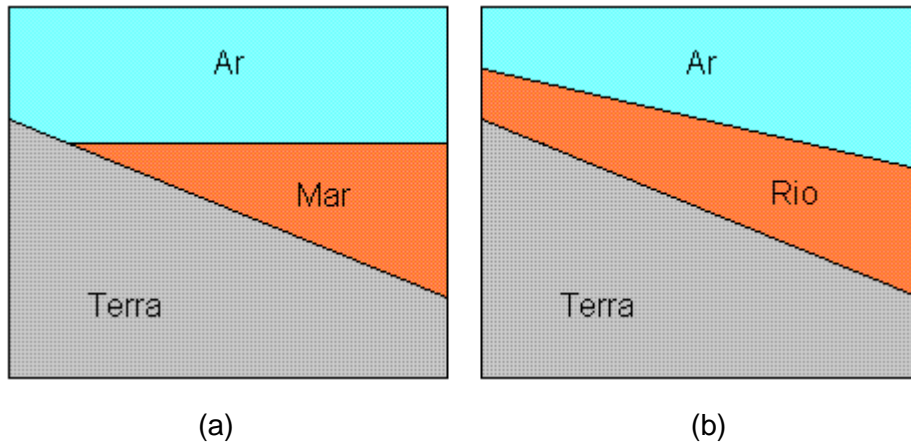


Figura 16 - Exemplos de gradiente de pressão

Uma aproximação razoável para as correntes de turbidez é assumi-las como um escoamento permanente, isto porque, tipicamente essas correntes podem durar longos períodos, o que torna essa hipótese válida. Essas correntes não são completamente uniformes, uma vez que a largura do canal ou a inclinação do talude variam com a distância e, o fluxo é influenciado pela entrada ou perda de água e sedimentos. Porém, como esses fatores variam suavemente ao longo da distância, a hipótese de escoamento uniforme pode ser uma boa aproximação local (Waltham, 2008). Assim, para escoamentos permanentes e uniformes, a tensão gravitacional é balanceada puramente pelo atrito, logo:

$$\tau = \Delta\rho ghS \quad (32)$$

onde  $\tau$  é a tensão de cisalhamento,  $\Delta\rho$  é a diferença de densidade entre o fluxo e o meio circundante,  $g$  é a aceleração devido à gravidade,  $h$  é a altura do fluxo,  $S$  é a declividade e  $\rho$  é a densidade do fluxo. Sendo a gravidade reduzida definida como:

$$g' = g \frac{\Delta\rho}{\rho} \quad (33)$$

Substituindo a eq. (33) na eq. (32) tem-se:

$$\tau = -\rho hg'S \quad (34)$$

A tensão de cisalhamento tem componentes na base e no topo do fluxo, porém iremos adotar que a tensão na base é dominante. O sinal negativo na eq. (34) indica que a tensão de cisalhamento atua na direção contrária a direção da velocidade.

Segundo Duncan *et al* (1960), a tensão de cisalhamento na base pode ser representada em termos da velocidade, essa teoria é conhecida como *Mixing-Length* (vide Apêndice A). O primeiro passo é representar a tensão por meio de uma velocidade de atrito equivalente,  $u_*$ , dada por:

$$\tau = -\rho u_*^2 \quad (35)$$

Combinando as eq. (34) e (35), tem-se:

$$u_* = \sqrt{-hg'S} \quad (36)$$

Dentro da camada limite turbulenta, próximo à base do fluxo, a velocidade de atrito ou velocidade de cisalhamento é relacionada com a velocidade do fluxo através da lei da parede (Duncan *et al*, 1960).

$$u = \frac{u_*}{k} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad z_0 < z < z_b \quad (37)$$

onde  $k$  é a constante de Von Kármán, que para água limpa é 0,41,  $z$  é a altura acima da base da parede, ou superfície sólida, enquanto que  $z_0$  e  $z_b$  definem as faixas de profundidade da camada limite. A altura acima da base da parede até a base da camada limite podem ser diretamente relacionadas com a rugosidade da superfície desde que a espessura da parede seja inferior a  $30z_0$  (Raudkivi, 1998).

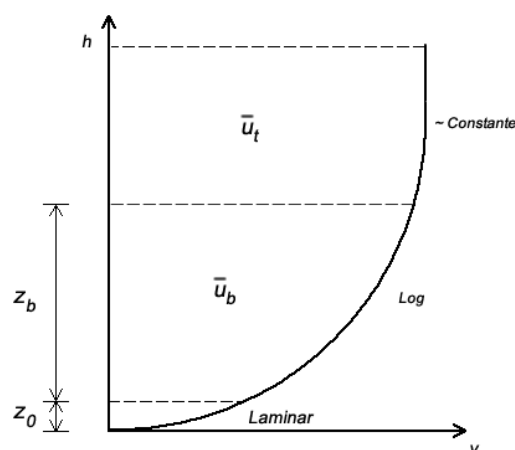


Figura 17 - Esquema do perfil de velocidades próximo à parede

A altura do topo da camada limite pode ser estimada através de experimentos de laboratório. Segundo Kneller *et al* (1999), a espessura fracionária da camada limite,  $f = z_b/h$ , é em torno de 0.05, Figura 17.

A velocidade média na camada limite é obtida integrando-se a eq. (37) e assumindo  $z_b \gg z_0$ .

$$\bar{u}_b = \frac{u_*}{k} \left[ \ln\left(\frac{z_b}{z_0}\right) - 1 + \frac{z_0}{z_b} \right] \approx \frac{u_*}{k} \left[ \ln\left(\frac{z_b}{z_0}\right) - 1 \right] \quad (38)$$

Acima da camada limite Kneller *et al* (1999) mostraram experimentalmente que o perfil de velocidades aproxima-se muito bem de uma função gaussiana. Entretanto, para uma maior generalização, assim como, a fim de se obter uma simplicidade matemática, a média das velocidades na parte superior do fluxo pode ser representada pela velocidade no topo da camada limite multiplicada por uma constante.

$$\bar{u}_t = a u(z_b) = \frac{a u_*}{k} \ln\left(\frac{z_b}{z_0}\right) \quad (39)$$

Onde  $\bar{u}_t$  é a média das velocidades na parte superior do fluxo e  $a$  é a uma constante de ordem um. Combinando a eq. (38) e (39), tem-se a velocidade média ao longo da altura de todo o fluxo.

$$\begin{aligned} \bar{u} &= f \bar{u}_b + (1 - f) \bar{u}_t \\ \bar{u} &= \frac{u_*}{k} \left[ (f + (1 - f)a) \ln\left(\frac{z_b}{z_0}\right) - f \right] \end{aligned} \quad (40)$$

$$\bar{u} = \frac{u_*}{k} b \ln\left(\frac{z_b}{z_0}\right) = \frac{u_*}{k} b \ln\left(\frac{hf}{z_0}\right)$$

Onde  $b = f + (1 - f)a$  é uma nova contante de ordem um.

Assim, combinando as eq. (35) e (40), tem-se:

$$\tau = -\rho \left( \frac{k \bar{u}}{b \ln\left(\frac{hf}{z_0}\right)} \right)^2 \quad (41)$$

Para o caso de fluxos 2D considerado neste trabalho, a eq. (41) pode ser generalizada para:

$$\tau_j = -\rho \bar{u}_j V \left( \frac{k}{b \ln\left(\frac{hf}{z_0}\right)} \right)^2 \quad (42)$$

onde  $V$  é velocidade média, isto é,  $V^2 = \bar{u}_1 + \bar{u}_2$ .

Assim a fricção basal é controlada por duas constantes:  $b$  no qual assume-se um valor unitário e  $z_0/f$  que é fortemente relacionada com a rugosidade da superfície. Essa aproximação utilizada para calcular a tensão de atrito basal é formalmente equivalente a lei de fricção de Chézy, exceto pelo fato do coeficiente de Chézy resultante ter uma fraca dependência com a espessura do

fluxo e, mais importante, esta é diretamente relacionada com um parâmetro potencialmente qualificável, a rugosidade da superfície.

### 3.3.2. Transporte de Sedimentos e Deposição de Partículas

O espalhamento de partículas pelo movimento molecular aleatório (movimento Browniano) e pela turbulência é referido como difusão ou dispersão. Por outro lado, aquele devido ao gradiente de velocidades é conhecido como dispersão convectiva ou gradiente difusivo, embora difusão turbulenta seja também um gradiente difusivo (Raudkivi, 1998).

De acordo com Raudkivi (1998), para que haja a suspensão de sedimentos por difusão, o valor quadrático médio ou rms (*root mean square*) da velocidade vertical flutuante,  $u'$ , precisa exceder a velocidade de queda,  $v_k$  (onde  $k$  é avaliado para cada diâmetro de grão). Entretanto, estudos experimentais conduzidos em laboratório mostram que o valor quadrático médio da velocidade vertical flutuante é similar a magnitude da velocidade de cisalhamento.

A taxa de sedimentação,  $s_k$ , é conseqüentemente zero para  $u_* > v_k$ , porém é igual a  $c_k v_k$  onde  $c_k$  é a concentração do tamanho do grão quando o fluxo é estacionário. Um modelo matemático simples consistente é dado por:

$$\begin{aligned} s_k &= c_k(v_k - u_*) & u_* &\leq v_k \\ s_k &= 0 & u_* &> v_k \end{aligned} \quad (43)$$

A velocidade de queda pode ser obtida utilizando-se um grande número de formulações diferentes. Porém, neste trabalho, adoto-se a lei de Stokes para obtenção desta.

Cada diâmetro de grão é então modelado de forma independente usando uma forma modificada da eq. (24).

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (L_k \bar{u}_i) + \frac{\partial L_k}{\partial t} = -s_k \quad (44)$$

Onde  $L_k$  é a carga de sedimentos associada com o grão  $k$ , isto é:

$$L_k = c_k h \quad (45)$$

A altura do fluxo é então recalculada:

$$h = c \sum_k L_k \quad (46)$$

onde  $c$  é a concentração total do fluxo. A fim de garantir a consistência com as hipóteses anteriormente adotadas, esse valor é assumido constante.

### 3.4. Resumo das Equações Propostas para as Correntes de Turbidez

Com base no exposto nas seções anteriores, o problema da simulação numérica para correntes de turbidez e seus depósitos, proposta neste trabalho, é obtido pela solução das seguintes equações:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(h\bar{v}) = -\frac{S_k}{c_k} \quad (47)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{u}\bar{v}) = -\frac{1}{\rho} \left[ \Delta\rho g \frac{\partial H}{\partial x} + \rho\bar{u}\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2} \left( \frac{k}{b \ln\left(\frac{hf}{z_0}\right)} \right)^2 \right] \quad (48)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{v}^2) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}\bar{v}) = -\frac{1}{\rho} \left[ \Delta\rho g \frac{\partial H}{\partial y} + \rho\bar{v}\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2} \left( \frac{k}{b \ln\left(\frac{hf}{z_0}\right)} \right)^2 \right] \quad (49)$$

A eq. (47) é a equação da continuidade modificada usada para modelar a evolução da espessura da corrente, enquanto que as eqs. (48) e (49) são as equações de movimento utilizadas para modelar a evolução da velocidade.

O lado esquerdo das eqs. (48) e (49) contém os termos advectivos, e os lado direito contém os termos das forças de pressão e fricção respectivamente.