

## 7 REFERÊNCIAS

- [1] Energy White Paper: Our Energy Future – Creating a Low Carbon Economy, Department of Trade and Industry. London, U.K., Feb. 2003. [Online]. Disponível em: <http://www.dti.gov.uk/files/file10719.pdf>
- [2] R. F. Sauer, “Um modelo para sazonalização da Energia Assegurada de Usinas Geradoras”, Florianópolis, 2002, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina
- [3] M. D. Simões, “Decisão de Sazonalização de Contratos de Fornecimento de Energia Elétrica através da Otimização da Medida Ômega ( $\Omega$ )”, Rio de Janeiro, 2009, Dissertação de Mestrado, IAG, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
- [4] A. Street, L. A. Barroso, B. Flach, M. V. Pereira, S. Granville, “Risk Constrained Portfolio Selection of Renewable Sources in Hydrothermal Electricity Markets”, IEEE Trans. Power Syst., vol. 24, no. 3, pp. 1136-1144 Agosto 2009
- [5] J. García-González, R. M. R. de la Muela, L. M. Santos, and A. M. Gonzalez, “Stochastic joint optimization of wind generation and pumpedstorage units in an electricity market,” IEEE Trans. Power Syst., vol. 23, no. 2, pp. 460–468, May 2008.
- [6] J. García-González, “Hedging strategies for wind renewable generation in electricity markets,” in Proc. IEEE Power and Energy Soc. General Meeting 2008, Pittsburgh, PA.
- [7] K. Hedman and G. Sheble, “Comparing hedging methods for wind power: Using pumped storage hydro units vs options purchasing,” in Proc. 9th Int. Conf. Probabilistic Methods Applied to Power Systems, KTH, Stockholm, Sweden, Jun. 11–15, 2006, pp. 1–6.

- [8] Boletim da Estatística Mensal de Energia Elétrica - Dezembro de 2005, Empresa de Pesquisa Energética. Disponível em:  
[http://www.epe.gov.br/BoletimMensal/20060203\\_1.pdf](http://www.epe.gov.br/BoletimMensal/20060203_1.pdf)
- [9] Boletim da Estatística Mensal de Energia Elétrica - Dezembro de 2006, Empresa de Pesquisa Energética. Disponível em:  
[http://www.epe.gov.br/BoletimMensal/20070301\\_1.pdf](http://www.epe.gov.br/BoletimMensal/20070301_1.pdf)
- [10] Boletim da Estatística Mensal de Energia Elétrica - Dezembro de 2007, Empresa de Pesquisa Energética. Disponível em:  
[http://www.epe.gov.br/BoletimMensal/20080505\\_1.pdf](http://www.epe.gov.br/BoletimMensal/20080505_1.pdf)
- [11] Boletim da Anual do Mercado de Energia Elétrica - 2004, Empresa de Pesquisa Energética. Disponível em:  
[http://www.epe.gov.br/mercado/Documents/Mercado\\_9/Boletim%20Anual%20do%20Mercado%20de%20Energia%20El%C3%A9trica%20-%202004.pdf](http://www.epe.gov.br/mercado/Documents/Mercado_9/Boletim%20Anual%20do%20Mercado%20de%20Energia%20El%C3%A9trica%20-%202004.pdf)
- [12] Boletim da Anual do Mercado de Energia Elétrica - 2005, Empresa de Pesquisa Energética. Disponível em:  
[http://www.epe.gov.br/mercado/Documents/Mercado\\_9/Boletim%20Anual%20do%20Mercado%20de%20Energia%20El%C3%A9trica%20-%202005.pdf](http://www.epe.gov.br/mercado/Documents/Mercado_9/Boletim%20Anual%20do%20Mercado%20de%20Energia%20El%C3%A9trica%20-%202005.pdf)
- [13] Boletim da Anual do Mercado de Energia Elétrica - 2006, Empresa de Pesquisa Energética. Disponível em:  
[http://www.epe.gov.br/mercado/Documents/Mercado\\_9/Boletim%20Anual%20do%20Mercado%20de%20Energia%20El%C3%A9trica%20-%202006.pdf](http://www.epe.gov.br/mercado/Documents/Mercado_9/Boletim%20Anual%20do%20Mercado%20de%20Energia%20El%C3%A9trica%20-%202006.pdf)
- [14] M.V.Pereira, N. Campodónico, R. Kelman, – “Long term Hydro Scheduling based on Stochastic Models”, EPSOM '98, Zurique, Setembro 1998. Disponível em: <http://www.psr-inc.com>
- [15] M.V.Pereira, M.; L.M.Pinto– “Multi-Stage Stochastic Optimization Applied to Energy Planning”, Mathematical Programming, Vol 52, 359-375, 1991
- [16] S. Granville, P. Lino, L. Soares, L. A. Barroso, and M. Pereira, “Sweet dreams are made of this: Bioelectricity in Brazil,” in Proc. IEEE PES General Meeting 2007, Tampa, FL.

- [17] L. A. Barroso, P. Lino, F. Ralston, F. Porrua, and B. Bezerra, “Cheap and clean energy: Can Brazil get away with that?” in Proc. 2008 IEEE PES General Meeting, Tampa, FL.
- [18] M. Carrión, A. J. Conejo, and J. M. Arroyo, “Forward contracting and selling price determination for a retailer,” IEEE Trans. Power Syst., vol. 22, no. 4, pp. 2105–2114, Nov. 2007.
- [19] J. Contreras, R. Espínola, F. Nogales, and A. Conejo, “ARIMA models to predict next-day electricity prices,” IEEE Trans. Power Syst., vol. 18, no. 3, pp. 1014–1020, Aug. 2003
- [20] M. V. F. Pereira, G. C. Oliveira, C. C. G. Costa, and J. Kelman, “Stochastic streamflow models for hydroelectric systems,” Water Resour. Res., vol. 20, no. 3, pp. 379–390, 1984.
- [21] B. Bezerra, L. A. Barroso, S. Granville, A. Guimarães, A. Street, and M. Pereira, “Energy call options auctions for generation adequacy in Brazil,” in Proc. 2006 IEEE General Meeting, Montreal, QC, Canada.
- [22] XPRESS-MP Linear Programming Solver by Dash Optimization.  
[Online]. Available: <http://www.dashoptimization.com>.
- [23] D. Luemberger, Investment Science. Oxford, U.K.: Oxford Univ. Press, 1998.
- [24] R. T. Rockafellar and S. P. Uryasev, “Optimization of conditional value-at-risk“, J. Risk, pp. 21–41, 2000.
- [25] C. Acerbi, D. Tasche, “Expected Shortfall: a natural coherent alternative to Value at Risk”, Bank for International Settlements, 2001, disponível em <http://www.bis.org/bcbs/ca/acertasc.pdf>.
- [26] Aguiar, A. S. “Equivalente Certo e Medidas de Risco em decisões de Comercialização de Energia Elétrica”. Rio de Janeiro. 2008. 174p. Tese de Doutorado – Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

## 8 ANEXO A – Despacho Hidrotérmico e o Preço Spot

Este capítulo discute a metodologia (apresentada em [14] e [15]) do cálculo do despacho econômico em sistemas centralizados e como se calcula o preço da energia no curto prazo (“spot”).

### 8.1 Sistemas Puramente Térmicos

#### 8.1.1 Despacho Econômico

Na maioria dos países, um Operador Independente do Sistema determina, a cada estágio, a produção de energia de cada usina geradora. O objetivo é atender a demanda de energia do estágio ao menor custo, o chamado despacho econômico. Em sistemas puramente térmicos, o despacho econômico, em sua versão mais simples, é formulado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 z &= \text{Min } \sum_j c_j g_j && \text{Multiplicador} && \text{(8-1)} \\
 \text{Sujeito a:} &&& && \\
 \sum_j g_j &= d && \pi_d && \text{(a)} \\
 g &\leq g,^- && && \text{(b)}
 \end{aligned}$$

onde  $z$ ,  $c_j$ ,  $d$ ,  $g_j$  e  $g,^-$  representam respectivamente o custo total de operação (valor a minimizar, em R\$); o custo variável de operação de cada gerador  $j$  (em R\$/MWh); a demanda do sistema (em MWh), a produção de energia elétrica (variável de decisão, em MWh) e as capacidades de geração de cada gerador  $j$  (também em MWh).

As restrições (8-1) (a) e (8-1) (b) representam respectivamente o atendimento da carga e os limites da capacidade de geração.

### **8.1.2 Solução do despacho econômico**

O modelo de despacho (8-1) é um problema de programação linear (PL), que neste caso simplificado pode ser resolvido por inspeção, acionando os geradores em ordem crescente de custo variável, até que a geração total iguale a demanda. No caso mais geral onde se representa, por exemplo, a rede de transmissão, o PL pode ser resolvido por pacotes computacionais disponíveis no mercado.

### **8.1.3 Preço spot**

O preço spot é, por definição, o custo de se atender a um incremento da demanda, ou seja, é a variação do custo de operação do sistema quando há um incremento de 1 MWh na demanda, dado pela derivada  $\partial z/\partial d$  do problema (8-1). Da teoria de programação linear, sabe-se que esta derivada é dada pelo variável dual,  $\pi_d$ , associada à restrição de atendimento à demanda (8-1) (a).

Neste caso simplificado, o valor de  $\pi_d$  também pode ser obtido por inspeção. Como um aumento da demanda seria atendido pelo aumento da geração do último gerador acionado na ordem econômica de despacho, conhecido como gerador marginal. Conclui-se, portanto, que  $\pi_d = c_j^*$ , onde “\*” identifica este último gerador.

### **8.1.4 Venda no mercado de curto prazo e renda líquida**

Cada gerador  $j$  recebe do mercado de curto prazo, que no Brasil é administrado pela Câmara de Comercialização de Energia Elétrica (CCEE), um montante (R\$) correspondente ao produto do preço spot  $\pi$  (em R\$/MWh) por sua produção de energia no despacho econômico,  $g_j$  (em MWh). Por sua vez, a demanda  $d$  desembolsa na CCEE um montante (R\$) dado por  $\pi$ . Como a produção total de energia é igual à demanda e há um único preço de compra e venda de energia, conclui-se imediatamente que o balanço financeiro na CCEE sempre “fecha”, isto é, o montante pago pela demanda é igual ao recebido pelos geradores.

Finalmente, a receita líquida de cada gerador pela venda de energia na CCEE é dada por  $R_j = (\pi - c_j)g_j$

### 8.1.5 Exemplo

Os conceitos acima serão ilustrados para um parque gerador composto de três termelétricas, cujas características – capacidade instalada e custo operacional variável – estão especificadas na Tabela 8-1.

Tabela 8-1 – Características das Termelétricas

| Nome           | Cap. (MWh) | Custo oper. (\$/MWh) |
|----------------|------------|----------------------|
| G <sub>1</sub> | 10         | 8                    |
| G <sub>2</sub> | 5          | 12                   |
| G <sub>3</sub> | 20         | 15                   |

O despacho de mínimo custo para atender uma demanda de 20 MWh em uma etapa de uma hora é:

$$G_1 = 10$$

$$G_2 = 5$$

$$G_3 = 5$$

O preço spot do sistema é \$15/MWh, que corresponde ao custo operacional da termelétrica marginal, G3. A renda líquida de cada gerador é:

$$RL_1 = (\pi_d - c_1)g_1 = (15 - 8)10 = 70$$

$$RL_2 = (15 - 10)5 = 25$$

$$RL_3 = (15 - 15)5 = 0$$

## 8.2 Sistemas Hidrotérmicos

### 8.2.1 Custos de oportunidade

À primeira vista, as usinas hidrelétricas seriam sempre acionadas primeiro no despacho econômico, pois seu custo variável de operação é muito pequeno<sup>2</sup>. Entretanto, o operador do sistema pode optar entre utilizar a água armazenada nos reservatórios para gerar hoje, ou deixá-la armazenada para uso futuro. Esta decisão depende do *custo de oportunidade* da geração hidrelétrica. Suponha, por exemplo, que o preço spot de hoje é 15 R\$/MWh. Isto significa que 1 MWh de geração hidrelétrica hoje “deslocará” 1 MWh do gerador marginal, economizando portanto R\$ 15. Suponha, entretanto, que o preço spot previsto para a próxima semana é maior, por exemplo, 20 R\$/MWh. Neste caso, vale a pena usar a água no futuro, pois haverá uma economia maior. Isto significa que o custo de oportunidade da geração hidrelétrica é 25 R\$/MWh. Para o despacho econômico, este custo de oportunidade tem todas as características de um custo “real”: por exemplo, seria preferível atender um aumento de demanda hoje com o gerador marginal a 15 R\$/MWh, do que acionar a hidrelétrica.

### 8.2.2 Árvore de decisões

O cálculo do custo de oportunidade da geração hidrelétrica é bastante complexo devido à incerteza das afluências futuras. Por exemplo, se a energia hidrelétrica for utilizada hoje, e ocorrer uma seca amanhã, pode ser necessário usar geração térmica mais cara no futuro, ou até mesmo interromper o fornecimento de energia elétrica (custo de oportunidade elevado). Se, por outro lado, os níveis dos reservatórios se mantiverem altos pelo uso mais intenso de geração térmica, e a afluência aumentar no futuro, os reservatórios poderão verter, desperdiçando energia (custo de oportunidade baixo). Como ilustra a Figura 8-1, é necessário resolver uma “árvore de decisão” e quantificar os efeitos de todas as possíveis decisões, escolhendo a que, em média, leva aos melhores resultados.

---

<sup>2</sup> O custo variável direto de usina hidrelétrica é, basicamente, a soma do custo variável de O&M da usina, mais as taxas ambientais.

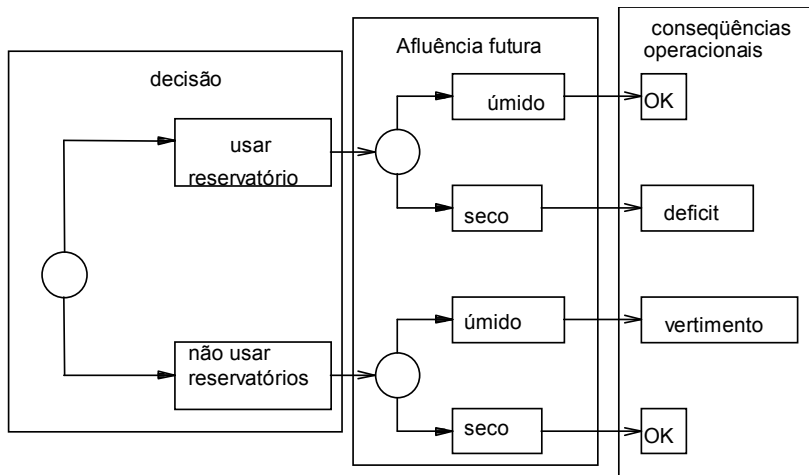


Figura 8-1 – Processo Decisório em Sistemas Hidrotérmicos

### 8.2.3 Custos Operacionais Imediatos e Futuros

Na prática, a busca pela melhor decisão operativa é baseada na composição dos custos operacionais *imediato* e *futuro*, como ilustrado na Figura 8-2.

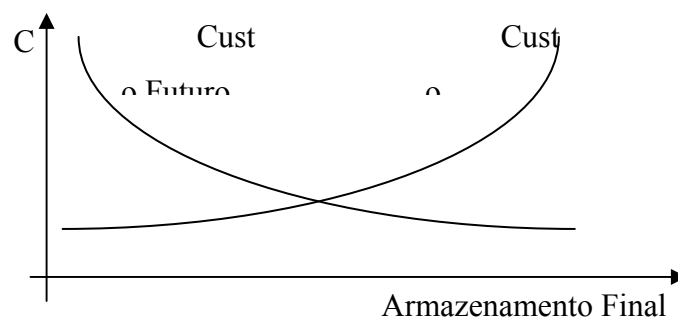


Figura 8-2 – Custos Imediatos e Futuros contra Armazenamento Final

A função de custo imediato – FCI – está relacionada aos custos de geração térmica no estágio  $t$ . À medida que o armazenamento final aumenta, um menor volume de água estará disponível para produção de energia nesta etapa. Como resultado, há necessidade de maior geração térmica para atender a demanda, e o custo imediato sobe. Por sua vez, a função de custo futuro – FCF – está associada às despesas esperadas de geração térmica da etapa  $t + 1$  até o final do período de planejamento. Podemos observar que a FCF diminui com o armazenamento final, à medida que um maior volume de água é disponibilizado para uso futuro.



A FCF é calculada simulando-se a operação do sistema no futuro para diferentes níveis de armazenamento inicial e calculando-se os custos operacionais. O horizonte de simulação depende da capacidade de armazenamento do sistema. Se a capacidade for relativamente pequena, como nos sistemas espanhol e norueguês, o impacto de uma decisão é diluído em vários meses. Se a capacidade for significativa, como no sistema brasileiro, o horizonte de simulação pode chegar a cinco anos.

Como visto, esta simulação torna-se mais complexa pela variabilidade da vazão afluente aos reservatórios, cujos níveis flutuam sazonalmente, regionalmente e de ano para ano. Como consequência, o cálculo da FCF deve ser feito de maneira *probabilística*, isto é, utilizando um grande número de cenários hidrológicos, como mostra a Figura 8-3.

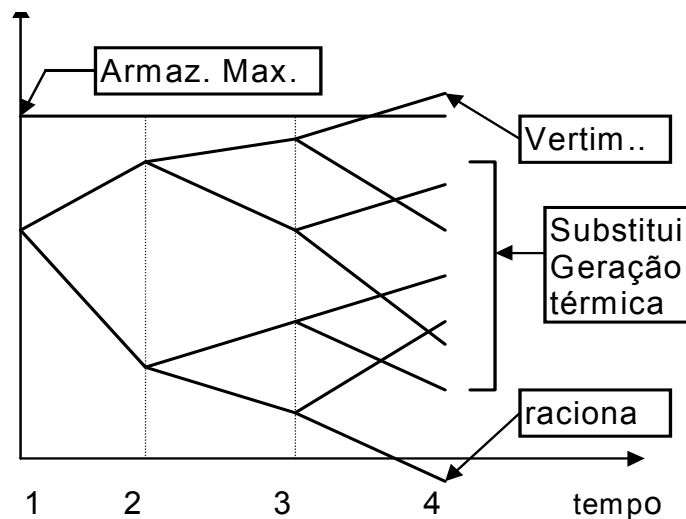


Figura 8-3 – Cálculo da FCF

#### 8.2.4 Valor da água

O uso ótimo da água armazenada corresponde ao ponto que minimiza a soma dos custos imediato e futuro. Como mostra a Figura 8-4, este também é o ponto em que as derivadas de ICF e FCF se igualam em módulo. Estas derivadas são conhecidas como *valores da água*.

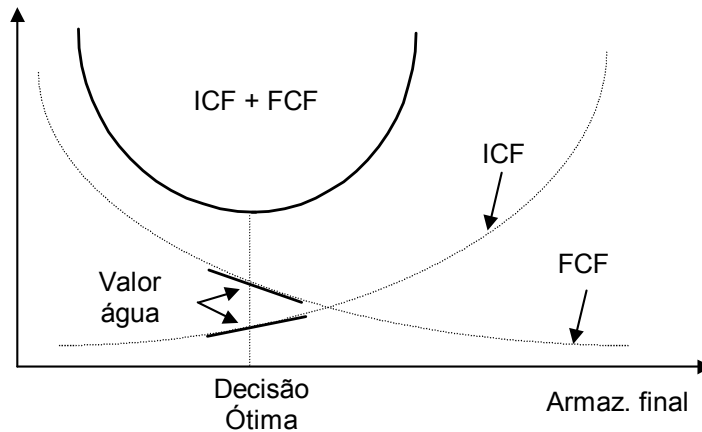


Figura 8-4 – Programação Hidrelétrica Ótima.

### 8.2.5 Formulação do Despacho Hidrotérmico para uma Etapa

Apresenta-se, a seguir, a formulação do despacho hidrotérmico para um determinado estágio  $t$ , supondo que foi calculada a função de custo futuro (o cálculo desta FCF será discutido mais adiante).

**a) Função Objetivo** – Como visto, o objetivo é minimizar a soma dos custos imediato e futuro:

$$z_t = \text{Min } \sum_j c_j g_{tj} + \alpha_{t+1}(v_{t+1}) \quad (8-2)$$

O custo imediato em (8-2) é dado pelos custos operacionais térmicos na etapa  $t$ ,  $\sum_j c_j g_{tj}$ . Por sua vez, o custo futuro é representado pela função  $\alpha_{t+1}(v_{t+1})$ , onde  $v_{t+1}$  é o vetor dos níveis de armazenamento do reservatório ao final da etapa  $t$  (início da etapa  $t+1$ ). As restrições operacionais nesta etapa são discutidas a seguir.

**b) Balanço Hídrico** – Como ilustrado na Figura 8-5, a equação de balanço hídrico relaciona o armazenamento e os volumes de entrada e saída do reservatório: o volume final no estágio  $t$  (início do estágio  $t+1$ ) é igual ao volume inicial menos os volumes de saída (turbinamento e vertimento) mais os volumes de entrada (afluência lateral mais os volumes de saída das usinas a montante).

$$v_{t+1}(i) = v_t(i) - u_t(i) - s_t(i) + a_t(i) + \sum_{m \in U(i)} [u_t(m) + s_t(m)] \quad (8-3)$$

para  $i = 1, \dots, I$

onde:

|              |  |
|--------------|--|
| $i$          | índice das hidrelétricas (1 número de hidrelétricas)                         |
| $v_{t+1}(i)$ | volume armazenado na usina $i$ ao final do estágio $t$ (variável de decisão) |
| $v_t(i)$     | volume armazenado na usina $i$ no início do estágio $t$ (valor conhecido)    |
| $a_t(i)$     | afluência lateral que chega na usina $i$ na etapa $t$ (valor conhecido)      |
| $u_t(i)$     | volume turbinado durante a etapa $t$ (variável de decisão)                   |
| $s_t(i)$     | volume vertido na usina $i$ durante a etapa $t$ (variável de decisão)        |
| $m \in U(i)$ | conjunto de usinas imediatamente a montante da usina $i$                     |

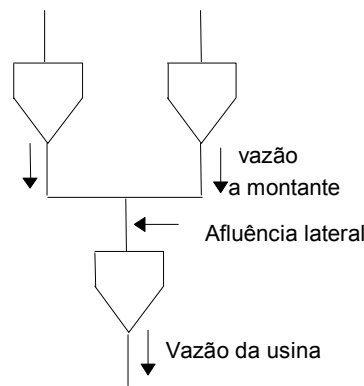


Figura 8-5 – Balanço hídrico do reservatório

### c) Limites de Armazenamento e Turbinamento

$$v_t(i) \leq v,^-(i) \quad \text{para } i = 1, \dots, I \quad (8-4)$$

$$u_t(i) \leq u,^-(i) \quad \text{para } i = 1, \dots, I \quad (8-5)$$

onde  $v,^-(i)$  e  $u,^-(i)$  são respectivamente o armazenamento máximo e a capacidade das turbinas.

### d) Limites de Geração Térmica

São os mesmos do despacho térmico, vistos no início deste capítulo.

$$g_{tj} \leq \bar{g}(j) \quad \text{para } j = 1, \dots, J \quad (8-6)$$

### e) Atendimento à Demanda

$$\sum_i \rho(i) u_t(i) + \sum_j g_{tj} = d_t \quad (8-7)$$

onde  $\rho(i)$  é o coeficiente de produção da usina  $i$  (MWh/hm<sup>3</sup>) (valor conhecido).

### 8.2.6 Solução do Problema e Custos Marginais

O problema (8-2)-(8-7) é em geral resolvido por um algoritmo de programação linear (PL). Assim como no caso térmico, o preço spot é o multiplicador associado à equação de atendimento da demanda (8-7). Por sua vez, o valor da água de cada hidrelétrica é o multiplicador associado à equação de balanço hídrico (8-3).

### 8.2.7 Exemplo

Suponha que ao sistema térmico do exemplo anterior (ver seção 8.1.5) foi adicionada uma hidrelétrica, cujas características são especificadas na Tabela 8-2.

Tabela 8-2 – Características da Hidrelétrica

| Nome           | cap.<br>(MW) | Coef. Prod.<br>(MWh/m <sup>3</sup> ) |
|----------------|--------------|--------------------------------------|
| H <sub>1</sub> | 15           | 2                                    |

Suponha também que a FCF da hidrelétrica,  $\alpha_{t+1}(v_{t+1})$ , é dada pela expressão linear  $-28v_{t+1} + 4000$ , ilustrado na Figura 8-6.

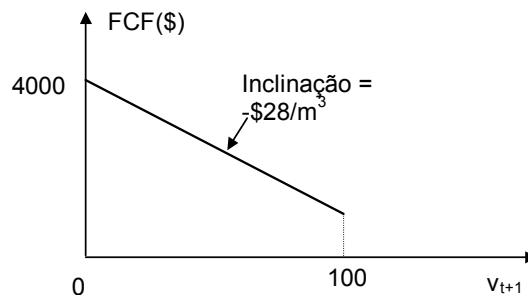


Figura 8-6 – Função de Custo Futuro.

Como visto, a FCF informa ao operador que o custo de oportunidade futuro de 1 m<sup>3</sup> de água é R\$ 28. Portanto, só vale a pena utilizar esta água hoje se o benefício imediato (redução de custo operativo) exceder este valor. Como este m<sup>3</sup> pode ser utilizado para produzir  $\rho \times 1 = 2$  MWh agora, conclui-se que só vale a pena utilizar a hidrelétrica se as alternativas térmicas custarem mais de  $28/2 = 14$  R\$/MWh. Em outras palavras, a energia hidrelétrica é, por um lado, mais “cara” que as térmicas 1 e 2, que custam respectivamente 8 e 12 R\$/MWh; e, por outro, mais “barata” que a térmica 3, que custa 15 R\$/MWh.

A ordem de acionamento dos geradores no despacho econômico hidrotérmico seria portanto  $(T_1, T_2, H_1, T_3)$ , e a produção de energia resultante, como mostrado na Tabela 8-3:

Tabela 8-3 – Despacho Ótimo – Sistema Hidrotérmico.

| Unidade        | Custo (\$/MWh) | Ger. (MWh) |
|----------------|----------------|------------|
| T <sub>1</sub> | 8              | 10         |
| T <sub>2</sub> | 12             | 5          |
| H <sub>1</sub> | 14             | 5          |
| T <sub>3</sub> | 15             | 0          |
| total          |                | 20         |

O preço spot do sistema, como sempre, reflete o custo da usina marginal, que no caso é a usina hidrelétrica. Portanto, o preço spot do sistema é o custo de oportunidade da hidrelétrica, 14 R\$/MWh. Este preço spot é usado de maneira idêntica ao apresentado no exemplo térmico para calcular a remuneração dos geradores e pagamentos da demanda na CCEE:

$$RL_1 = (\pi - c_1)g_1 = (14 - 8)10 = 60$$

$$RL_2 = (14 - 10)5 = 20$$

$$RL_H = (14 - 0)5 = 70$$

$$RL_3 = (14 - 15)0 = 0$$

### 8.3 Cálculo da Função de Custo Futuro

Como visto, as decisões operativas de um sistema hidrotérmico se baseiam no equilíbrio entre o custo de oportunidade hoje e seu valor esperado futuro, representado pela FCF,  $\alpha_{t+1}(v_{t+1})$ . Esta função é calculada através de um procedimento recursivo chamado programação dinâmica estocástica dual (PDDE), apresentado a seguir:

- a) para cada estágio  $t$  (tipicamente um mês) define-se um conjunto de *estados do sistema*, por exemplo, níveis de armazenamento 100%, 90% etc. até 0%. A Figura 8-7 ilustra a definição dos estados para um reservatório. Supõe-se conhecido o armazenamento inicial do primeiro estágio.

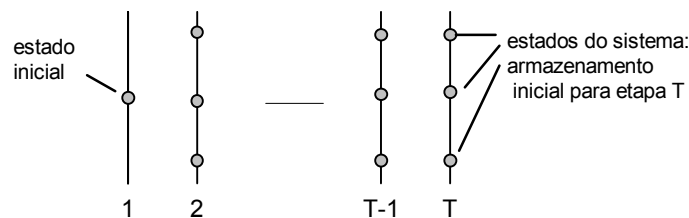


Figura 8-7 – Definição dos Estados do Sistema.

- b) iniciar no *último* estágio,  $T$ , e resolver o problema de despacho de um estágio supondo que o armazenamento inicial corresponde ao primeiro nível selecionado no passo (a) - por exemplo, 100%. Dado que se está no último estágio, supõe-se que a FCF é igual a zero. Resolva o problema de despacho para cada um dos  $N$  cenários de vazões para o estágio. O esquema está ilustrado na Figura 8-8.

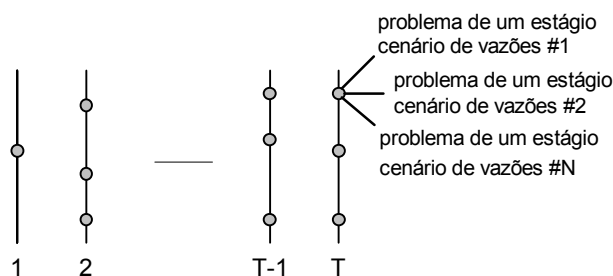


Figura 8-8 – Cálculo da Decisão Ótima por Cenário - Último Estágio

- c) Calcular o valor esperado do custo operativo associado ao nível 100% como a média dos custos dos  $N$  subproblemas de um estágio. Com isto se obtém o primeiro ponto da FCF para o estágio  $T-1$ , i.e.  $\alpha_T(v_T)$ . Observe que a *tangente* da FCF em torno deste ponto corresponde ao valor da água esperado (como mencionado na item 8.2.4, o valor da água é obtido do multiplicador simplex da equação de balanço hídrico). O procedimento está ilustrado na Figura 8-9.

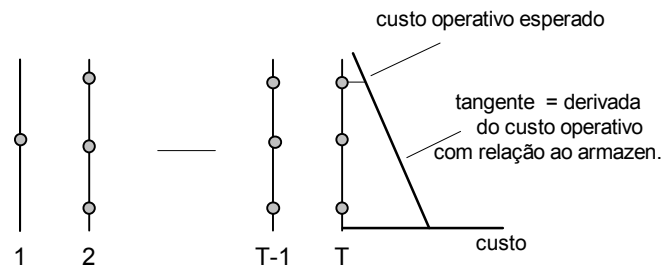


Figura 8-9 – Cálculo do primeiro segmento da FCF

- d) Repetir o cálculo do custo operativo e das tangentes da superfície de custo futuro para cada estado de armazenamento no estágio  $T$ . O resultado final é uma superfície linear por partes, que representa a FCF  $\alpha_T(v_T)$  para o estágio  $T-1$ , como mostrado na Figura 8-10.

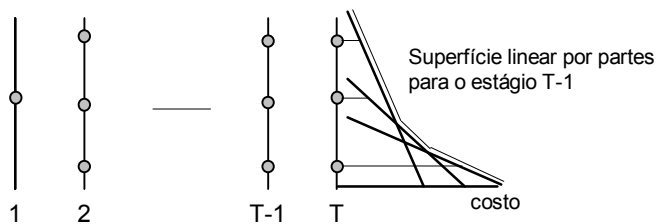


Figura 8-10 – FCF Linear por partes para o Estágio T-1

- e) Repetir o processo para todos os estados de armazenamento selecionados nos estágios  $t-1$ ,  $t-2$  etc. como mostrado na Figura 8-11. Observe que o objetivo agora é minimizar o custo operativo imediato no estágio  $t-1$  mais o custo

futuro esperado, dado pela função linear por partes calculada no passo anterior.

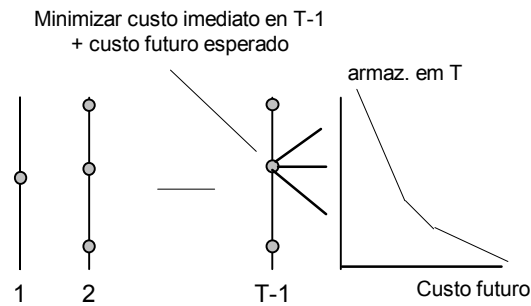


Figura 8-11 – Cálculo do custo operativo para o estágio T-1 e FCF para T-2.

O resultado final do esquema PDE (a)-(e) é um conjunto de FCFs  $\{\alpha_{t+1}(v_{t+1})\}$  para todos os estágios  $t = 1, \dots, T$ . Observe que o cálculo desta função requer a representação da operação conjunta do sistema, com o conhecimento completo dos estados de armazenamento de todas as usinas do sistema. Em outras palavras, o valor da água de uma usina hidrelétrica é uma função não-separável do estado das demais usinas do sistema.



## 9 ANEXO B – Formulação do CVaR<sub>α</sub> através de restrições lineares

O objetivo deste anexo é demonstrar como o CVaR<sub>α</sub> pode ser representado através de um conjunto de restrições lineares. A demonstração aqui apresentada foi extraída do trabalho original publicado por R. T. Rockafellar e S. P. Uryasev [24].

A definição clássica para o Conditional Value at Risk (CVaR<sub>α</sub>) de uma variável aleatória (v.a.) R com função de probabilidade acumulada  $F_R(r) = P(R \leq r)$  é:

$$\text{CVaR}_\alpha(R) = E[R | \Psi] = \int_{\Psi} R \cdot dF_{R|\Psi} \quad (9-1)$$

Onde,  $\Psi = \{R : R \leq \text{VaR}_\alpha(R)\}$  é o conjunto de valores inferiores a VaR<sub>α</sub>(R) que a v.a. R pode assumir,  $F_{R|\Psi}$  é a função de probabilidade condicionada ao evento  $\Psi$  e

$$\text{VaR}_\alpha(R) = \inf_{(r)} \{ r : F_R \geq 1 - \alpha \} \quad (9-2)$$

Neste caso, o CVaR<sub>α</sub>(R) é obtido através do valor esperado condicionado aos valores de R inferiores VaR<sub>α</sub>(R), que, por sua vez, pode ser entendido como um quantil desta mesma variável aleatória. Esta definição, apesar de bastante intuitiva, não oferece uma forma eficiente de inserção em problemas de programação linear.

No entanto, segundo demonstrado em [24], o Conditional Value at Risk de uma v.a. R também pode ser escrito através do seguinte problema de otimização linear:

$$\text{CVaR}_\alpha(R) = \text{Max}_{(z)} \{ z + E[(R-z)^-]/(1-\alpha) \} \quad (9-3)$$

Onde  $^-$  é a função truncamento negativo definida da seguinte maneira:

$$x^- = \begin{cases} x, & \text{se } x \leq 0 \\ 0, & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (9-4)$$

Além disso, segundo [24], no ponto ótimo,

$$z^* = \operatorname{argmax}_{(z)} \{z + E[(R-z)^-]/(1-\alpha)\} = \operatorname{VaR}_\alpha(R) \quad (9-5)$$

Dessa maneira, se considerarmos os cenários e probabilidades  $\{R_s, p_s\}_{s=1,\dots,S}$  que caracterizam a distribuição de  $R$ , a formulação (9-3) pode ser reescrita através do seguinte PL:

$$\operatorname{Maximizar}_{\beta, z} z + \sum_{s=1}^S p_s \cdot \beta_s \quad (9-6)$$

Sujeito a

$$\beta_s \leq 0, \quad \forall s=1,\dots,S \quad (9-7)$$

$$\beta_s \leq \frac{R_s - z}{1 - \alpha}, \quad \forall s=1,\dots,S \quad (9-8)$$

Onde a função truncamento negativo  $^-$  é representada pelas restrições (9-7) e (9-8)

e inserida na função objetivo através do valor esperado  $\sum_{s=1}^S p_s \cdot \beta_s$ .

Um dos fatos mais interessantes desta formulação é que permite que ela seja implementada por um PL (como apresentado acima), reside no fato de que ela é definida para todo valor de  $R$ , ao contrário da formulação original (9-1), onde os valores de  $R$  no cálculo do valor esperado condicionado devem estar restritos ao conjunto  $\Psi$ .

Uma observação importante que deve ser feita é que no trabalho original [24], a expressão (9-3) é definida para perdas financeiras de percentis superiores a  $\alpha\%$ .

No entanto, na aplicação apresentada neste trabalho, o CVaR<sub>α</sub> foi utilizado dentro do contexto não das maiores perdas financeiras, mas sim das menores receitas líquidas de maneira a expressar um limite inferior da distribuição de probabilidade da renda líquida.

Dessa maneira, será apresentada a seguir a demonstração para os resultados (9-3) e (9-5) adaptados ao nosso caso, que trata de rendas líquidas e não de perdas.

Demonstração para (9-5):

Conforme a expressão (9-3), temos que:

$$\text{CVaR}_\alpha(R) = \text{Max}_{(z)} H(R,z) \quad (9-9)$$

Onde,

$$H(R, z) = z + \frac{1}{(1-\alpha)} \cdot \int (R-z)^- \cdot dF_R \quad (9-10)$$

Como a função truncamento negativo  $( )^-$  retornará zero para  $R \geq z$ , esta expressão pode ser manipulada da seguinte maneira:

$$H(R, z) = z + \frac{1}{(1-\alpha)} \cdot \int_{\{R \leq z\}} (R-z) \cdot dF_R \quad (9-11)$$

$$H(R, z) = z + \frac{1}{(1-\alpha)} \cdot \left( \int_{\{R \leq z\}} R \cdot dF_R - \int_{\{R \leq z\}} z \cdot dF_R \right) \quad (9-12)$$

$$H(R, z) = z + \frac{1}{(1-\alpha)} \cdot \left( \int_{\{R \leq z\}} R \cdot dF_R - z \cdot F_R(z) \right) \quad (9-13)$$

$$H(R, z) = z \cdot \left( 1 - \frac{F_R(z)}{(1-\alpha)} \right) + \frac{1}{(1-\alpha)} \cdot \left( \int_{\{R \leq z\}} R \cdot dF_R \right) \quad (9-14)$$

Derivando (9-14) em relação à  $z$  e igualando este derivada a zero (já que estamos maximizando  $H(R,z)$ ), chega-se a seguinte expressão:

$$\frac{\partial H(R, z^*)}{\partial z} = 1 - \frac{F_R(z^*)}{(1-\alpha)} - \frac{z^* \cdot f_R(z^*)}{(1-\alpha)} + \frac{z^* \cdot f_R(z^*)}{(1-\alpha)} = 1 - \frac{F_R(z^*)}{(1-\alpha)} = 0 \quad (9-15)$$

Que por fim, resulta em:

$$F_R(z^*) = (1-\alpha) \quad (9-16)$$

Logo, conforme definido em (9-2), temos que:

$$z^* = \text{VaR}_\alpha(R) \quad (9-17)$$

Concluindo, desta maneira, a demonstração da equação (9-5). Para finalizar este resultado, pode-se constatar que  $z^*$  é um ponto de máximo analisando a segunda derivada de  $H(R,z)$ . Como esta será negativa, para todo o valor de  $z$ ,  $z^*$  será obrigatoriamente um ponto de máximo.

Demonstração de (9-3):

Para demonstrar a equação (9-3), basta verificar que esta ocorre quando avaliamos  $H(R,z)$  em  $z^*$ . Para isso, seja a equação (9-13) que estabelece que:

$$H(R, z) = z + \frac{1}{(1-\alpha)} \cdot \left( \int_{\{R \leq z\}} R \cdot dF_R - z \cdot F_R(z) \right) \quad (9-18)$$

Avaliando a equação acima em  $z^*$  temos:

$$H(R, z^*) = z^* + \frac{1}{(1-\alpha)} \cdot \left( \int_{\{R \leq z^*\}} R \cdot dF_R - z^* \cdot F_R(z^*) \right) \quad (9-19)$$

Devido à equação (9-16), a equação acima pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$H(R, z^*) = z^* + \frac{1}{(1-\alpha)} \cdot \left( \int_{\{R \leq z^*\}} R \cdot dF_R - z^* \cdot (1-\alpha) \right) \quad (9-20)$$

$$H(R, z^*) = z^* + \frac{1}{(1-\alpha)} \cdot \int_{\{R \leq z^*\}} R \cdot dF_R - \frac{1}{(1-\alpha)} \cdot z^* \cdot (1-\alpha) \quad (9-21)$$

$$H(R, z^*) = z^* + \frac{1}{(1-\alpha)} \cdot \int_{\{R \leq z^*\}} R \cdot dF_R - z^* = \frac{1}{(1-\alpha)} \cdot \int_{\{R \leq z^*\}} R \cdot dF_R \quad (9-22)$$

Na equação (9-22), o termo  $(1-\alpha)^{-1}$  representa a probabilidade  $P(R \leq \text{VaR}_\alpha(R))^{-1}$ , que ao ser convenientemente combinada com  $F_R$ , e integrada em  $\Psi = \{R \leq z^*\}$ , reflete a esperança condicional do CVaR, conforme a definição original dada em (9-1):

$$H(R, z^*) = \int_{\Psi} R \cdot dF_{R|\Psi} \quad (9-23)$$

Finalizando assim a demonstração de (9-3).