

4 Transmissão Através de Canal Ruidoso

4.1 Modelos de Canais

O canal de comunicação modela o meio físico através do qual é transportada a informação desde o transmissor até o receptor, diferentes tipos de canais podem ser considerados dependendo basicamente das seções do sistema que se estejam observando. Por exemplo entre a saída do modulador e a entrada do demodulador se tem um canal de forma de onda (ou canal de tempo contínuo), o qual pode se modelar de forma simples como um canal aditivo como se mostra na Figura 4.1.

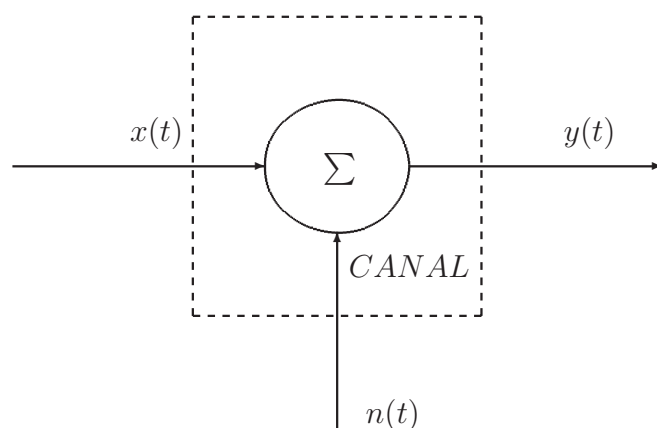


Figura 4.1: Modelo de um canal contínuo aditivo.

Neste canal, a forma de onda a entrada, $x(t)$, é o sinal de informação transmitido por o modulador, $n(t)$ representa o ruído adicionado pelo canal e a forma de onda, $y(t)$, o sinal recebido. O canal estará completamente caracterizado pela distribuição de probabilidade do ruído. Ao assumir que este

ruído é gaussiano admite-se que a variável aleatória (v.a) $n(t)$ é uma v.a. gaussiana com função densidade de probabilidade $\mathcal{P}(\alpha)_{n(t)} = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma_n^2}}$ ou, abreviadamente $N(0, \sigma_n^2)$, esta modelagem é razoável do ponto de vista físico em muitas aplicações e do ponto de vista matemático é muito útil, este canal é conhecido como um canal AWGN (*Additive White Gaussian Noise*).

4.2

Canal de Tempo Discreto

Um canal de tempo discreto é caracterizado por um alfabeto de entrada $\mathcal{X} = \{a_i\}_{i=1}^{N_{\mathcal{X}}}$, um alfabeto de saída $\mathcal{Y} = \{b_j\}_{j=1}^{N_{\mathcal{Y}}}$, onde $N_{\mathcal{X}} = |\mathcal{X}|$ e $N_{\mathcal{Y}} = |\mathcal{Y}|$ e um conjunto de probabilidades condicionais

$$p_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, N_{\mathcal{X}}, \quad j = 1, 2, \dots, N_{\mathcal{Y}} \quad (4-1)$$

Em (4-1) $p_{ij} \triangleq P(Y_t = y_j | X_t = x_i)$ representa a probabilidade de receber o símbolo $y_j \in \mathcal{Y}$, dado que foi transmitido $x_i \in \mathcal{X}$. Assumindo que o canal não tem memória, se tem

$$P(Y_1, \dots, Y_n = y_1, \dots, y_n | X_1, \dots, X_n = x_1, \dots, x_n) = \prod_{t=1}^n P(Y_t = y_t | X_t = x_t) \quad (4-2)$$

Onde x_1, \dots, x_n e y_1, \dots, y_n representam os n símbolos transmitidos e recebidos respectivamente. Um modelo como alfabeto de entrada $\mathcal{X} = \{a_1, a_2\} = \{0, 1\}$ e alfabeto de saída $\mathcal{Y} = \{b_1, b_2\} = \{0, 1\}$ ou seja com $N_{\mathcal{X}} = N_{\mathcal{Y}} = 2$, se mostra na Figura 4.2. Este canal é conhecido como canal BSC.

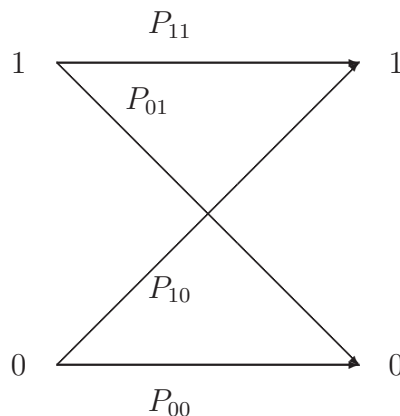


Figura 4.2: Canal BSC.

Cada seta representa a transição do símbolo do alfabeto de entrada ao símbolos do alfabeto de saída, ou seja, a transmissão de um símbolo pertencente a \mathcal{X} e a recepção de um símbolo pertencente ao \mathcal{Y} . para cada transição é atribuído um valor de probabilidade condicional. A soma de todas probabilidades que pertence a um mesmo símbolo de entrada deve ser igual a um.

4.3

Modelo de canais com apagamentos

Introduzido em 1954 por P. Elias [2], o canal com apagamento é usado freqüentemente em teoria da informação. Neste modelo de canais com apagamento um símbolo de entrada é recebido livre de erro ou é convertido a um apagamento.

Em um canal com apagamento, o conjunto $\mathcal{B} = \{a_0, \dots, a_{q-1}, a_q\}$, de q possíveis símbolos à saída do canal, possui um símbolo a mais (a_q), do que o alfabeto de entrada $\mathcal{A} = \{a_0, \dots, a_{q-1}\}$. O alfabeto de saída \mathcal{B} é composto pelos “ q ” símbolos de \mathcal{A} e por um símbolo adicional que corresponde ao “símbolo apagado” denotado por “ a_q ”.

Seja uma seqüencia de v.a.’s (variáveis aleatórias) independentes $\mathbf{X} = X_1, \dots, X_t, \dots, X_n$ e tem-se que a probabilidade condicional que relaciona a v.a. X_t à entrada do canal, com a v.a. Y_t , à saída do canal, também designada por probabilidade de transição do canal, é

$$P(Y_t = a_m | X_t = a_i) = \begin{cases} 1 - P_a, & m = i \in \{0, 1, \dots, q-1\} \\ P_a, & m = q \\ 0, & m \notin \{0, 1, \dots, q-1\} \end{cases}$$

4.3.1

Canal BEC

Em geral tem-se $q = 2^\ell$. Neste trabalho considera-se o caso $\ell = 1$, denomina-se o canal, *BEC* (*Binary Erasure Channel*), Neste caso

$$\mathcal{A} = \{a_0, a_1\}, e$$

$$\mathcal{B} = \{a_0, a_1, a_2\}.$$

Na Figura 4.3 encontra-se ilustrado um canal binário BEC, com apagamento, o qual possui uma probabilidade $(1 - P_a)$ de transmitir sem erro um

símbolo de entrada, e uma probabilidade P_a de produzir na saída o símbolo a_2 .

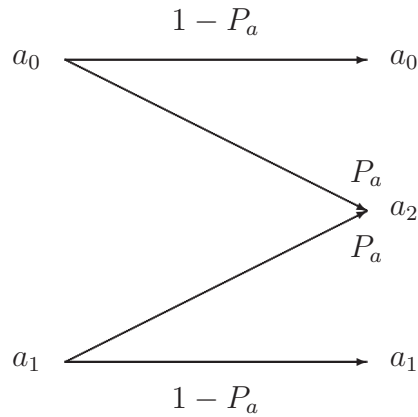


Figura 4.3: Canal BEC.

4.4 Modulação BPSK

A seleção do esquema de modulação na maioria dos casos busca incidir sobre parâmetros de desempenho como largura de banda e potência de transmissão. No campo das comunicações de satélite os projetistas estão interessados mais na redução da potência de transmissão devido a que fatores como a autonomia, espaço, e peso da bateria são relevantes para o sistema. Neste trabalho iremos usar a modulação BPSK (*Binary Phase-Shift keying*). Em BPSK o modulador usa o pulso:

$$-s_0(t) = s_1(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos \omega t, & \text{para } 0 \leq t < T \\ 0, & \text{para } t \notin [0, T) \end{cases} \quad (4-3)$$

e a forma de onda transmitida quando a sequência de entrada é $\{\dots, x_0, \dots, x_n, \dots\}$, onde $x_i \in 0, 1$:

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} s_{x_i}(t - iT) \quad (4-4)$$

Supondo que a entrada é uma sequência de variáveis aleatórias, x_0, x_1, \dots, x_n , independentes, com valores pertencentes ao conjunto $\mathcal{A} = 0, 1$ e assumindo que no canal se tem uma forma de onda caracterizada como ruído aditivo gaussiano branco (AWGN) $N(t)$ com média zero e densidade espectral de potência plana com valor $\frac{N_0}{2}$ adicionada à forma de onda transmitida $x(t)$, tem-se então:

$$y(t) = x(t) + N(t) \quad (4-5)$$

$$E[N(t)] = 0 \tag{4-6}$$

$$E[n(t + \tau)N(t)] = \frac{\mathcal{N}_0}{2} \delta(\tau) \tag{4-7}$$

Baseado na forma de onda recebida durante um intervalo de sinalização, o modulador produz uma estimativa do símbolo transmitido. O receptor ótimo é um filtro casado com resposta ao impulso.

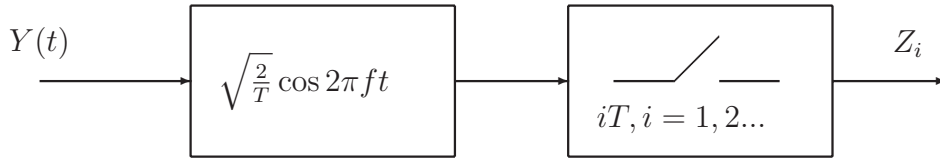


Figura 4.4: Filtro casado ao receptor.

$$h(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{T}} \cos 2\pi ft, & \text{para } 0 \leq t < T \\ 0, & \text{para } t \notin [0, T) \end{cases} \tag{4-8}$$

o qual é amostrado cada T segundos. A saída do filtro casado Z_i observada no instante de amostragem iT , considerando-se que a entrada é um processo estocástico $Y(t)$

$$Z_i = \int_{(i-1)T}^{iT} Y(\tau)h(iT - \tau)d\tau \tag{4-9}$$

é uma variável aleatória gaussiana $N(\mu, \sigma)$ com media:

$$\mu = \pm \int_0^T (\sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos 2\pi f\tau)(\sqrt{\frac{2}{T}} \cos 2\pi f(T - \tau) d\tau \tag{4-10}$$

$$= \pm \sqrt{E_s} \tag{4-11}$$

Onde os sinais (+) ou (-), de acordo as entradas do modulador 1 e 0 respectivamente, e variância,

$$\sigma^2 = \frac{\mathcal{N}_0}{2} \int_0^T (\sqrt{\frac{2}{T}} \cos 2\pi f\tau)^2 d\tau = \frac{\mathcal{N}_0}{2}. \tag{4-12}$$

Depois de amostrar pode-se fazer *hard decision* (decisão binária) isto é uma quantização binária com limiar zero da variável aleatória Z_i assim se obtém o mais simples e importante modelo de canal o canal *Binary Simetric Channel* (BSC). A probabilidade de transição esta diretamente relacionada com a relação sinal ruído, assim a saída do canal num intervalo de sinalização

depende do pulso transmitido durante o intervalo de sinalização e não de outras transmissões. O canal é chamado canal sem memória.

Devido a simetria, podemos mapear 0 em $-\sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos 2\pi ft$, e, se acontece um erro a saída do filtro casado, no tempo de amostragem iT é maior que zero e, desta forma,

definindo-se o evento erro por $e_b = \{Z_i > 0, x_i = 0\} \cup \{Z_i < 0, x_i = 1\}$ chega-se, após algum desenvolvimento, a

$$\begin{aligned}
 P(e_b) &= P(Z_i > 0 | x_i = 0) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi\mathcal{N}_0}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(z+\sqrt{E_s})^2}{\mathcal{N}_0}} dz \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi\mathcal{N}_0}} \int_{\sqrt{\frac{2E_s}{\mathcal{N}_0}}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\
 &= Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{\mathcal{N}_0}}\right)
 \end{aligned} \tag{4-13}$$

onde

$$Q(x) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \tag{4-14}$$

é chamada função Q .

Quando Codificação é usada preferencialmente a medição da energia se faz por bit de informação E_b que por símbolo, mas para uma modulação BPSK, se tem que $E_b = E_s$. Denotando $P(e_b)$ como a probabilidade de erro de bit, ou seja, a probabilidade de que um bit seja entregue com erro ao destinatário, se tem para BPSK

$$P(e_b) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\mathcal{N}_0}}\right) \tag{4-15}$$

A seguir na Figura 4.5, se mostra o desempenho da modulação BPSK sem código.

4.5

Modelo de canal usado

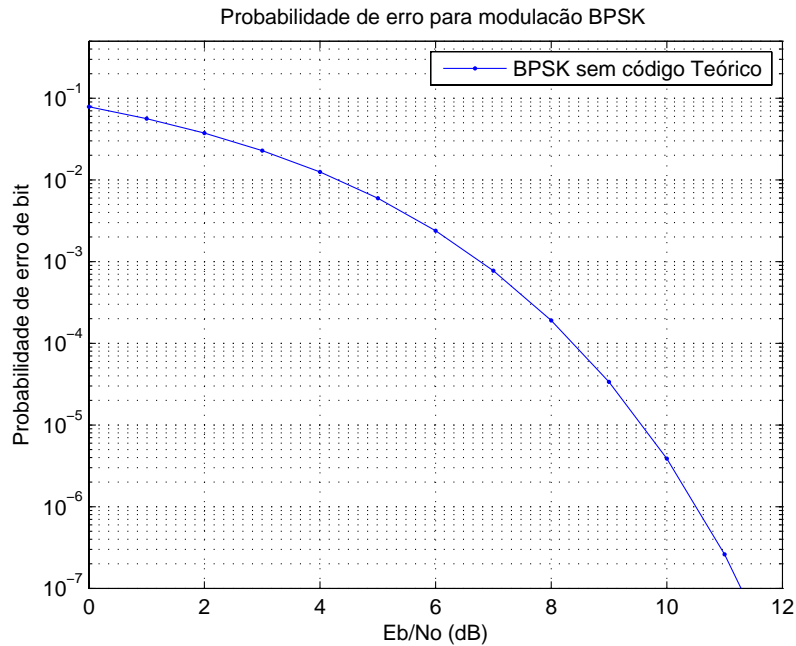


Figura 4.5: Desempenho da modulação BPSK sem código

4.5.1

Sistemas de comunicação BPSK com código LT

Os Códigos LT foram originalmente desenvolvidos para canais com apagamento, um estudo do desempenho do códigos *rateless* sobre canais BSC e AWGN foi feito por Palanki e Yedidia em [8], mostrando um desempenho fraco para o código LT. Para melhorar o desempenho deste código a proposta do seu estudo em um canal AWGN com modificação na decisão no receptor pode ser de utilidade [4]. Isto pode ser feito baseados no conceito de *soft decision*, introduzindo um novo parâmetro definido como zona de apagamento, uma região do espaço de decisão onde se faz que aqueles bits depois do processo de demodulação que se encontrarem nela sejam definidos como apagamentos.

Seja $x_i = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ os bit da mensagem, a modulação BPSK mapeia o sinal $\{0, 1\}$ a $\{1, -1\}$ onde ± 1 representa “0” e “1” respectivamente. Depois da transmissão sobre o canal AWGN, ruído gaussiano branco é adicionado ao sinal original e o receptor recebe o vetor de sinal análoga $\mathbf{z}_i = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ onde $z_i \in \mathbb{R}$ são valores ao redor de $+1$ e -1 . Em *hard decision* o demodulador BPSK estima o vetor recebido $\mathbf{y}_i = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ baseado no sinal do componente z_i , ou seja,

$$\begin{cases} y_i = 1, & \text{para } z_i > 0 \\ y_i = 0, & \text{para } z_i < 0 \end{cases}$$

para a implementação do esquema BPSK com modificação no demodulador é introduzida uma zona de apagamento arbitrária, $\pm\theta$ declarando aquelas sinais recebidas nesta zona como apagamento. O modulador estimará o símbolo recebido da seguinte forma

$$\begin{cases} y_i = 1, & \text{para } z_i > \theta \\ y_i = 0, & \text{para } z_i < -\theta \\ y_i = 2(\text{apagamento}), & \text{para } |z_i| < \theta \end{cases}$$

Na Figura 4.6-a se mostra uma zona de apagamento de comprimento igual a zero e na Figura 4.6-b uma zona de apagamento com comprimento diferente de zero, neste caso as sinais que fiquem nessa região de apagamento serão declaradas como apagamentos, diminuindo em grande parte a probabilidade de erro de símbolo, mas não eliminando-a completamente.

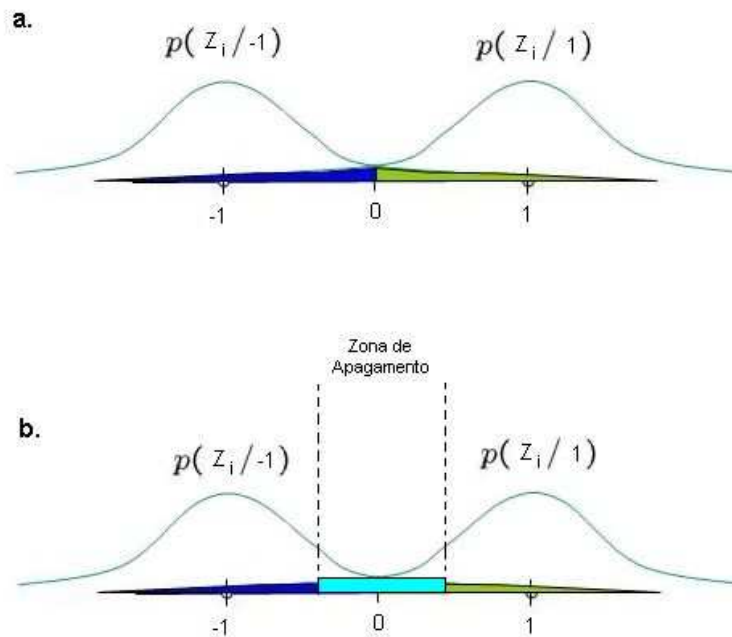


Figura 4.6: Zona de apagamento para $\theta = 0$ (a), e $\text{para } \theta \neq 0$ (b).

O canal resultante é uma combinação entre um canal BEC e um canal BSC, já que as sinais corrompidas podem conter erros ou podem se converter em apagamentos. Na Figura 4.7 mostra se o modelo discreto de dito canal.

Por tanto com a escolha de uma apropriada zona de apagamento os erros de símbolo podem se reduzir.

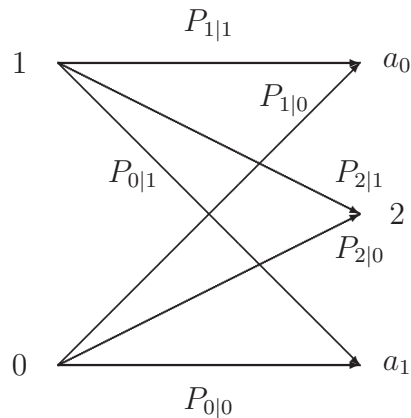


Figura 4.7: Canal BESC.

Para o análise do comportamento do canal BESC¹ (*Binary Erasure and Symmetric Channel*) foi usado o esquema da Figura 4.8. Nas figuras 4.9, 4.10 e 4.11 amostra-se os comportamentos do canal BESC obtidos por simulação para valores de θ iguais 0.2, 0.5 e 0.7.

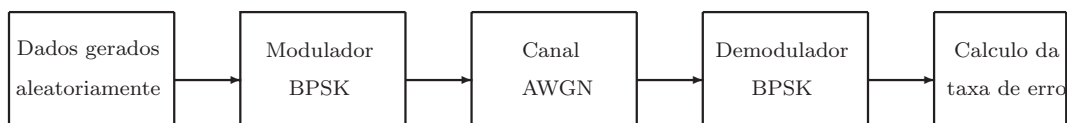


Figura 4.8: Diagrama de blocos do sistema de comunicação proposto

Das figuras 4.9, 4.10 e 4.11 Pode-se notar que para obter uma diminuição na taxa de erros de símbolo é preciso fazer um incremento no valor do θ , mas como consequência direta de isto, a taxa de apagamento também será aumentada, estes dois parâmetros são os principais a levar em conta no projeto de um sistema com uma probabilidade de erro baixa além de uma complexidade não muito alta.

4.6 Codificação LT em um canal BESC

Para o aproveitamento do esquema de codificação LT é necessário que o canal tenha um comportamento o mais próximo possível a um canal BEC, ou seja, temos que procurar que em nosso sistema exista uma mínima probabilidade de erro de símbolo, mas sem levar ao limite a quantidade de apagamentos.

¹Nome sugerido

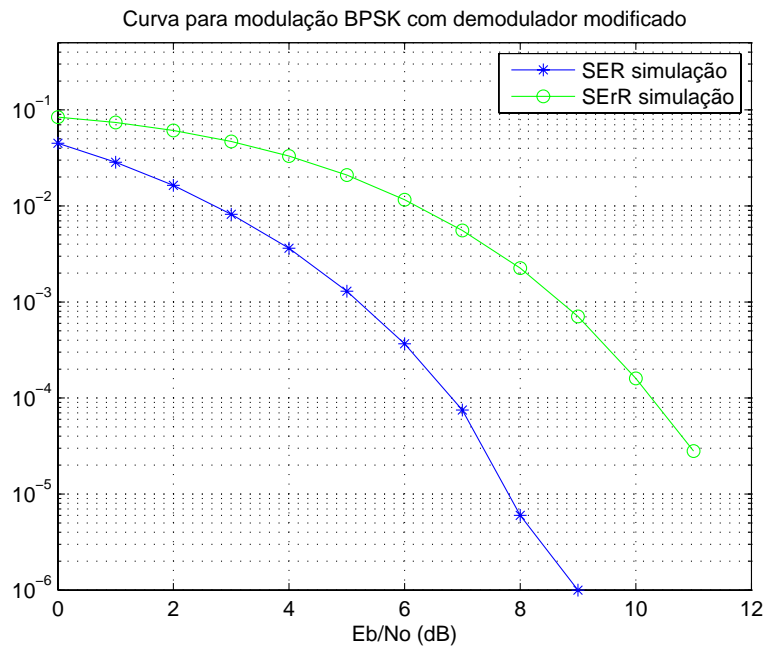


Figura 4.9: SER (*Symbol Error Rate*) e SErR (*Symbol Erasure Rate*) versus E_b/N_0 (dB), para canal BESC derivado de BPSK, $\theta= 0.2$.

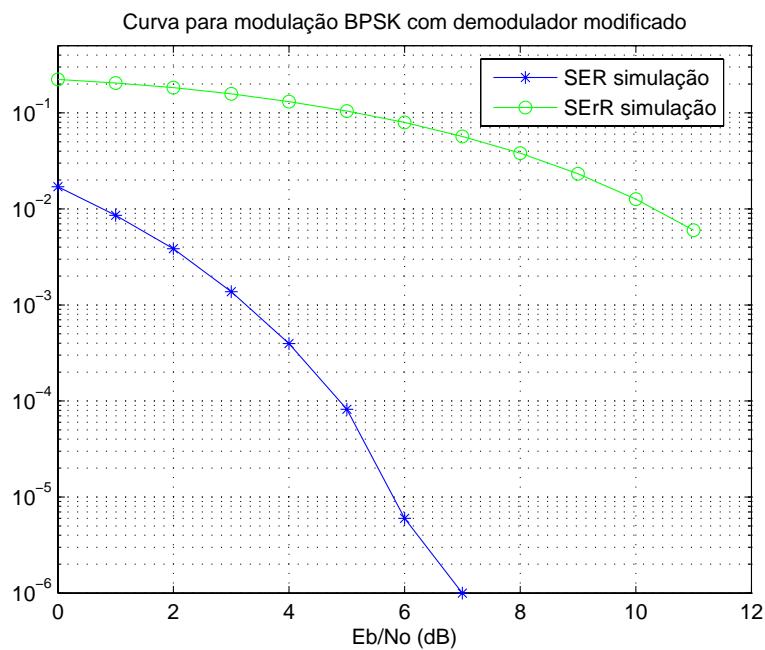


Figura 4.10: SER(*Symbol Error Rate*) e SErR (*Symbol Erasure Rate*) versus E_b/N_0 (dB), para canal BESC derivado de BPSK, $\theta = 0.5$.

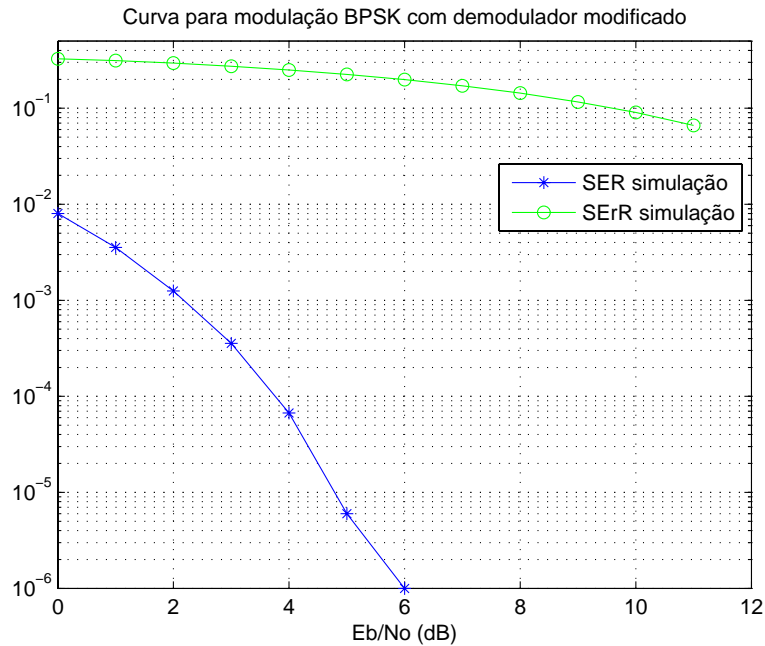


Figura 4.11: SER (*Symbol Error Rate*) e SErR (*Symbol Erasure Rate*) versus E_b/N_0 (dB), para canal BESC derivado de BPSK, $\theta = 0.7$.

Os erros de símbolo afetam o processo de decodificação já que para o decodificador LT resulta impossível detetar erros e quando eles se apresentam o processo de recuperação da informação é levado a cabo usando dados errados, terminando numa decodificação completa mas, pode ocorrer que $\hat{\mathbf{x}} \neq \mathbf{x}$ e a $P(e_b)$ ser muito alta. Na Figura 4.12 pode se notar que para baixos níveis de relação sinal-ruído o aumento de redundância (*Overhead*)² não diminui a P_{e_b} , Isto é pela presença permanente de erros de símbolos no processo de decodificação, nesta simulação, quando o decodificador não conseguiu recuperar a totalidade dos símbolos, aqueles símbolos não descobertos se lhes da o valor de zero para o cálculo da taxa de erro.

Em níveis mais baixos de relação sinal-ruído a probabilidade de erro de símbolo é maior, assim para obter um melhor desempenho deve se encontrar o mínimo de E_b/N_0 e de *overhead* que garanta que se possa ter uma decodificação bem sucedida e ela aconteça com um mínimo de erro.

A quantidade de símbolos necessários para uma decodificação com sucesso dependerá obviamente da taxa de apagamento (SErR), assim nas próximas simulações para estimar o *overhead* necessário para obter sucesso na decodificação usaram-se as distintas taxas de apagamento obtidas nas simulações das Figuras 4.9 e 4.10 correspondentes as taxas de apagamento em

²Para um código LT com taxa $R = k/n$, com $n = k(1 + \text{Overhead})$

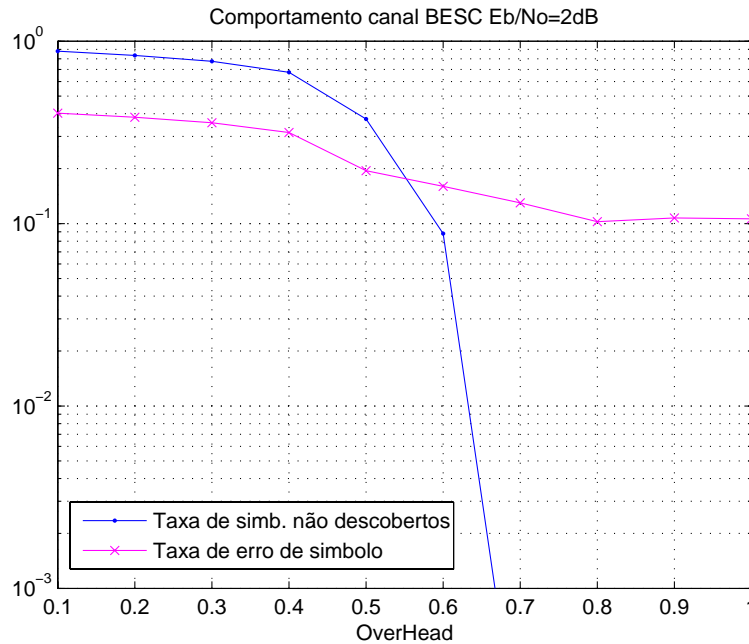


Figura 4.12: Falha na decodificação e erro .

$E_b/\mathcal{N}_0 = 0$ dB, ou seja, na pior das situações simuladas. Para $\theta = 0.2$ e $\theta = 0.5$. Os Histogramas que mostram a quantidade de símbolos necessários para obter uma decodificação bem sucedida para aqueles valores de SErR se mostram nas figuras 4.13 e 4.14.

Nas simulações que produziram os gráficos das figuras 4.13 e 4.14. pode-se notar que mesmo com uma alta probabilidade de sucesso na decodificação ao redor de certa quantidade de símbolos, existirá uma probabilidade, embora ela seja baixa, de que uma vez é fixado o overhead não se tenha sucesso na decodificação. Por exemplo, para o caso da Figura 4.13, se é fixado o *Overhead* em 0.5 (ou 50%), valor por acima do valor com maior probabilidade, pode acontecer que a decodificação não tenha sucesso, foi observado em alguns simulações, a necessidade de uma quantidade superior de 1500 símbolos para completar a decodificação.

A seguir mostramos o desempenho da codificação LT usando este esquema de canal BESC, como taxa $R = 1/2$, ou seja, *Overhead*=1 (100%) e para thresholds de 0.2 e 0.5 (se fizeram 100 simulações). Os resultado são mostrados nas figuras 4.15 e 4.16. Uma outra simulação para um comprimento de bloco maior $k = 10000$, e um θ de 0.7, mostra-se na Figura 4.17 fizeram-se o mesmo número de simulações e se manteve a taxa de código em $R = 1/2$. A seguir comentamos estes resultados.

Os erros de símbolo (SER), obtidos das simulação e mostrados nas

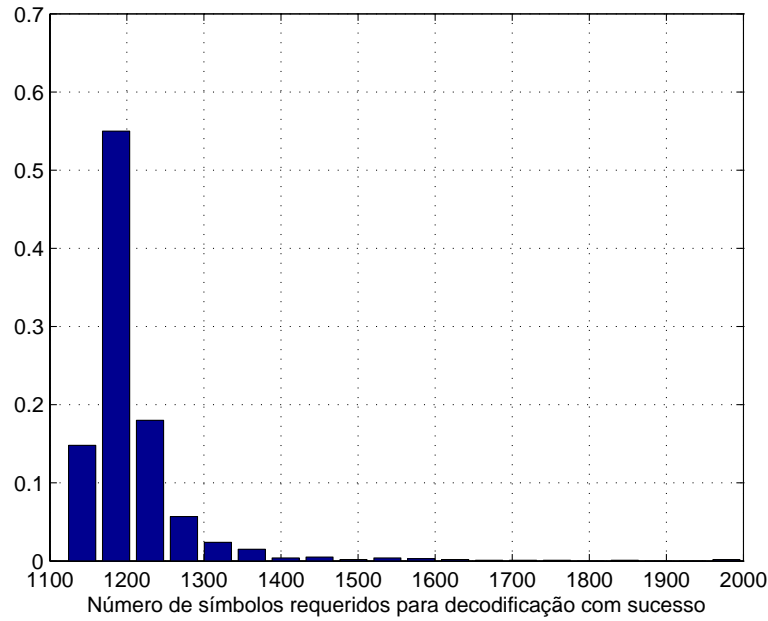


Figura 4.13: Histograma normalizado de símbolos requeridos para decodificação com sucesso, usando $\theta=0.2$ com taxa de apagamento de 8%, $k=1000$.

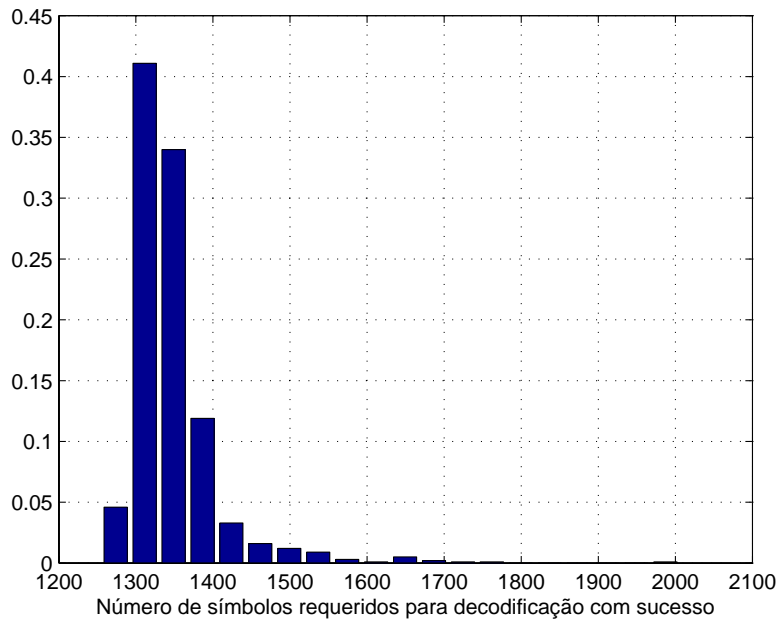


Figura 4.14: Histograma normalizado de símbolos requeridos para decodificação com sucesso, usando $\theta=0.5$ com taxa de apagamento de 20%, $k=1000$.

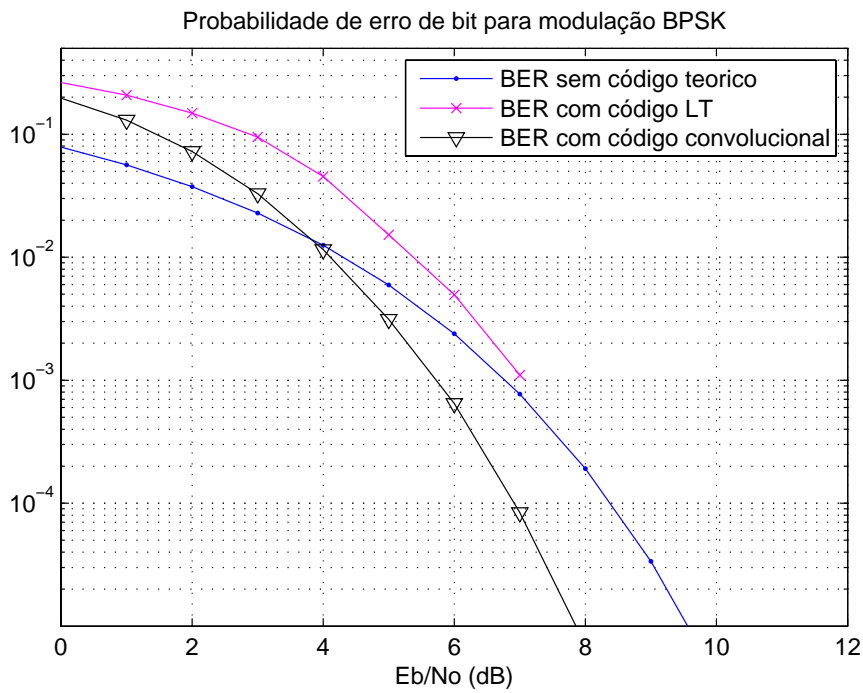


Figura 4.15: Desempenho código LT em BPSK, com $\theta = 0.2$, $R = 1/2$

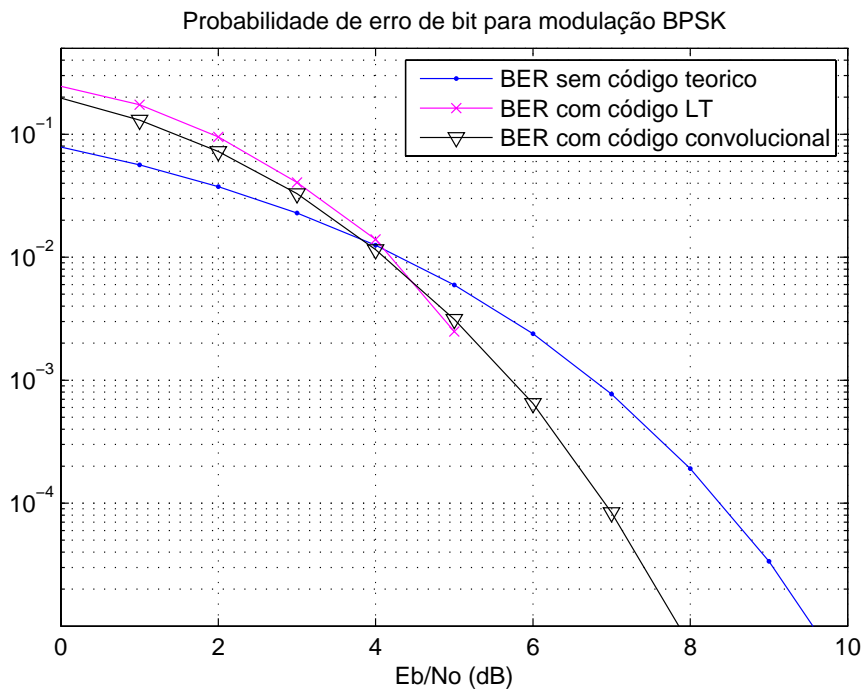


Figura 4.16: Desempenho código LT em BPSK, $\theta = 0.5$, $R = 1/2$

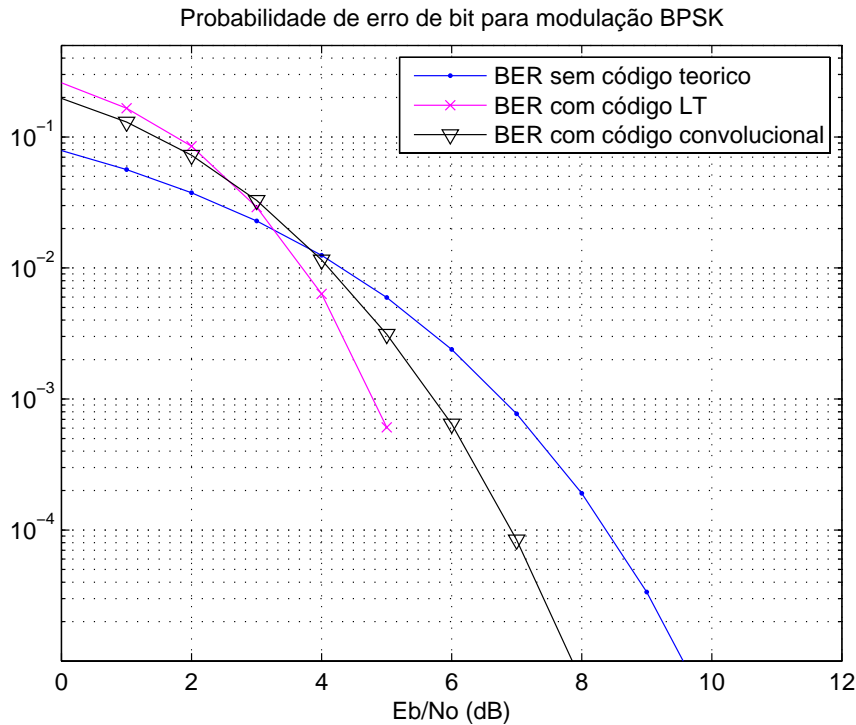


Figura 4.17: Desempenho código LT em BPSK, $\theta = 0.7$, $R = 1/2$

figuras 4.15, 4.16 e 4.17, são claramente o limitante para que o codificador LT tenha um melhor desempenho neste esquema, se obtém maior ganho de código uma vez é aumentado o valor de θ , esta ganância esta diretamente relacionada ao aumento do θ , mais também ela verá acompanhada com um aumento na taxa de apagamento, precisando assim, pelas características do código LT de um bloco de comprimento maior para obter uma decodificação com sucesso, em conseqüência aumentará o custo nos processos de codificação e decodificação. Note-se que a partir do valor E_b/N_0 onde há ausência de erros de símbolo, $P(SER) = 0$, não se apresentam erros no mensagem recuperado, por tanto logo da desapareção dos erros de símbolo o código terá o desempenho que apresenta num canal BEC.

Nas simulações anteriores mostrou-se que a presença de erros de símbolo na saída do modulador conduz a uma probabilidade de erro na saída do decodificador LT final considerável, relacionada com a quantidade de eles. Para algumas aplicações resulta bom o uso deste esquema já que resulta de uma baixa complexidade para o transmissor e uma complexidade moderada no receptor, onde se precisa fazer a mudança no receptor e o processo de decodificação. Observa-se que com o incremento de θ pode-se diminuir até certo nível a quantidade de erros de simbolo, mas o custo se verá refletido em

que os apagamentos serão aumentados e por tanto se precisará de um tamanho de bloco maior para que com uma taxa fixa consiga-se recuperar a informação transmitida. Na procura de minimizar a quantidade de erros na entrada do decodificador LT, consideramos a possibilidade de analisar um outro esquema no qual seja possível minimizar ainda mais estes erros.

4.7

Usando um código Hamming para detecção de erro

Para esta nova análise do código LT em AWGN usaremos o fato que um canal ruidoso com um código detector de erro pode modelar melhor a um canal com apagamento. Neste caso, um pacote de informação recebido que contenha erros detectáveis pelo código detector de erro, será descartado (interpretado como apagado). Isto será feito concatenando um codificador LT e um codificador Hamming para ser usado como ferramenta de detecção de erro. Com isto esperamos impedir que a informação que sai do codificador LT e passa através do canal seja entregue com erro ao decodificador LT. Para testar esta idéia o esquema utilizado empregou um código hamming (15, 11) sistemático (ver apêndice A), deste código foi usado só sua função de detecção de erro, assim quando no processo de decodificação encontrava-se uma palavra código errada, (síndrome diferente de zero), a palavra código correspondente a este síndrome é considerada apagada. Com este esquema o desempenho vai depender da eficiência de identificar erros em palavras código do Código Hamming e da capacidade do código LT de recuperar a informação para o nível de apagamentos gerados na detecção. O esquema proposto mostra-se na Figura 4.18.

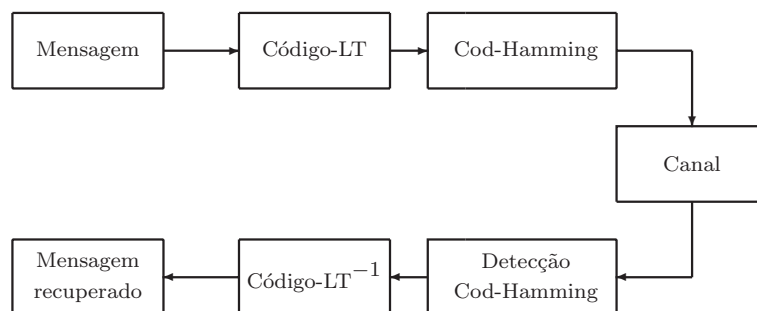


Figura 4.18: Esquema de proteção com detecção de erros.

No caso do esquema LT-Hamming, deve-se notar que a redundância vai aumentar devido a que além da redundância do código LT deve-se adicionar

a redundância do código Hamming. Foram realizadas 100 simulações para $k = 10000$, e se testou o desempenho dos esquemas: convolucional de taxa $R = 1/2$, com treliça $[7, 5]$ decodificado com o Algoritmo de Viterbi e *hard decision*, um código Reed Solomon (255, 223) e LT-Hamming, os resultados mostram-se na Figura 4.19.

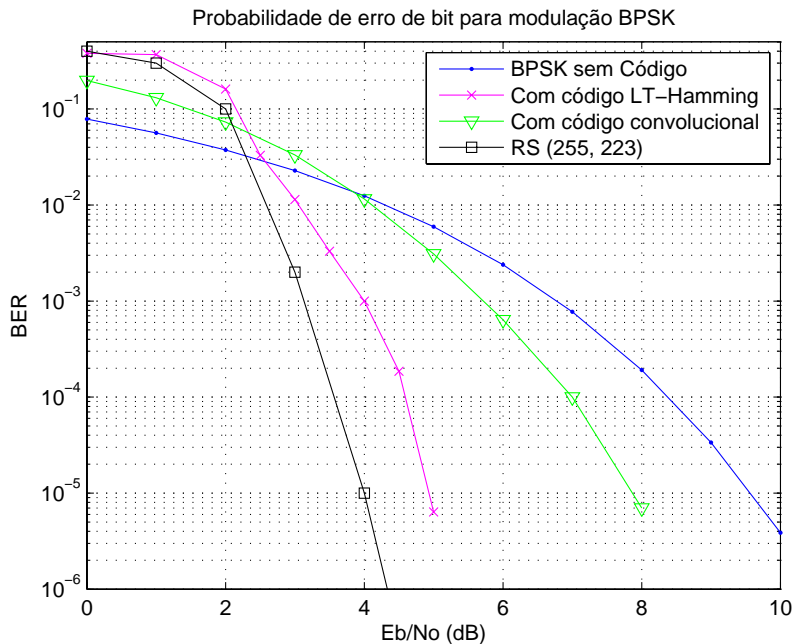


Figura 4.19: Desempenho código LT-Hamming

Cabe notar que embora seja concatenado a um código de taxa fixa, a versatilidade na taxa além das outras características do código LT se mantém. No análise LT-Hamming se encontra que o desempenho melhora, mais o custo se reflete em que a redundância vai aumentar devido a que além da redundância do código LT se adiciona redundância do código Hamming. A característica do Código LT pode compensar esta dificuldade usando um tamanho de bloco grande que precise uma redundância menor para que ele seja recuperado e assim a taxa total do código não ser muito incrementada. Ainda o desempenho do código Reed solomon e melhor respeito ao LT-Hamming deve-se considerar que a complexidade do código Reed Solomon e maior e ele tem limitações tais como tamanho de blocos fixos e pequenos.

4.8

Resumo

Neste capítulo foram apresentados alguns dos modelagens matemáticas dos canais mais usados, foi descrita a modulação BPSK e foi apresentada sua probabilidade de erro de bit em termos da relação sinal-ruído. Foi

descrita uma técnica para introduzir apagamentos em um canal BSC através da definição de uma zona de apagamentos e assim conseguir usar o código LT num canal AWGN. Foi testado o modelo deste canal BESC para distintos valores de θ , parâmetro usado para a definição da zona de apagamento, e assim evidenciar seu comportamento em termos da taxa de apagamentos e taxa de símbolos errados para diferentes valores de E_b/\mathcal{N}_o , logo foi testado o desempenho do código LT com taxa 1/2 usando o modelo de canal BESC e foi comparado com um código convolucional com treliça [7, 5] também de taxa 1/2, isto foi feito para valores de $\theta = 0.2$, $\theta = 0.5$ e $\theta = 0.7$. Foi proposto logo um esquema de concatenação de códigos LT e Hamming (15, 11) com o propósito de melhorar o desempenho obtido com o modelo de canal BESC, foi simulado e comparado com o código convolucional com treliça [7, 5] e com um código Reed Solomon (255, 223), mostrando um melhor desempenho o esquema LT-Hamming comparado com uso de canal BESC mas sendo só superado por o código Reed Solomon que possui uma complexidade maior, além de outras limitações.