5
Solução numérica

5.1
Aproximações

Sob a ótica da Economia do Setor Público, supõe-se que, como base principal, a empresa esteja inserida em um país cujo Estado exerça otimamente as suas obrigações normativas[57]. Nesse contexto, ao desenvolver um novo produto/serviço patenteado, a empresa estará completamente protegida contra qualquer cópia não autorizada até o término do período estabelecido por lei por um órgão regulador. Nesse sentido, Schwartz (2002) traz duas principais suposições:

- Mesmo que no futuro seja interessante financeiramente, a empresa não poderá retomar o investimento uma vez abandonado o projeto; nesse caso, será somente considerada a opção de abandono;
- O investidor possui somente duas possibilidades de estratégia: investir o máximo possível por período (Im) ou não investir nada. Essa política, denominada pelo autor de *Bang-Bang*[58], é ótima quando o fluxo de caixa e o custo são descorrelacionados. O autor afirma que, para baixas correlações, a política de investimentos com taxas menores do que o investimento máximo é desprezível.

As duas suposições têm como o maior objetivo simplificar o problema. Em relação à segunda simplificação, uma interpretação possível, a qual será utilizada aqui, é aquela relacionada com o período limitado (da Etapa II) de proteção por patente, estabelecido por um órgão regulador (usualmente por volta de vinte anos no Brasil)[59]: quanto mais tempo a empresa demorar a desenvolver o produto, menor o tempo que ela usufruirá dos privilégios do monopólio; i. e., existe um custo crescente de não entrada no mercado. Dessa forma, enquanto o projeto

---

[57] Atenda o inciso XXIX do artigo 5 (privilégio da invenção industrial) da Constituição Brasileira. Para mais detalhes acerca da Economia do Setor Público, ver ARVATE & BIDERMAN (2004).

[58] Ver Anexo A.3.3.

[59] Usualmente, a proteção por patente começa a ser contabilizada desde o primeiro dia de desenvolvimento.

estiver rentável, a empresa investirá o máximo possível para finalizar o desenvolvimento do projeto.

Outro ponto importante que pode levar a uma má interpretação diz respeito à própria definição do que vem a ser "investir o máximo possível". Para muitos (inclusive para Schwartz[60]), com o objetivo de simplificar o problema, este termo significa investir o máximo que a empresa suporta por período. O autor afirma que, para baixas correlações entre fluxo de caixa e o custo, essa aproximação gera resultados satisfatórios.

Todavia, a fim de se tornar o mais fiel possível da realidade, o trabalho oferece outra interpretação acerca do significado desse termo. Por meio das simulações, foram identificados contextos em que não era necessário investir o máximo da capacidade total de investimento para diminuir ao máximo o custo; bem ao contrário, bastava investir bem menos. Tal fato se dá nas situações terminais, onde o valor residual para o término do custo de desenvolvimento do projeto é menor do que o valor da capacidade máxima de investimento por período. Em outras palavras, se, em um determinado período estiver faltando somente $15.000,00, para terminar o projeto não tem sentido aplicar $3.000.000,00 (capacidade máxima de investimento por período).

Logo, no contexto da dissertação, "investir o máximo possível" significa investir otimamente[61] de forma a minimizar os custos do desenvolvimento do produto, respeitando às limitações financeiras da empresa. Nem sempre é possível investir o valor necessário para "zerar" os custos; nesse caso, investe-se o máximo possível no período. Além disso, na seção dos 6.2.8 será feito um comparativo entre a abordagem de Schwartz (2002) e a proposta da dissertação, através do teste da sensibilidade. Assim, os efeitos da nova abordagem ficarão mais claros.

Como poderá ser observado nos próximos capítulos, devido à grande complexidade algorítmica, optou-se em utilizar um método heterodoxo[62] para estimar o fator (ou velocidade) decaimento da reversão, baseado no conceito da Meia Vida.[63]

---

[60] Por *email*, confirmou-se com Schwartz que a sua interpretação do termo "investir o máximo possível" significa investir a taxa máxima possível por mês.

[61] Não necessariamente será igual ao máximo que a empresa possa pagar por período.

[62] O termo heterodoxo deve-se ao fato de não existirem estudos na literatura que confirmem ou critiquem a idéia apresentada.

[63] Caso fosse utilizado o método tradicional, explicado no anexo A4, seria necessário estimar uma regressão para cada um dos 218.400 caminhos gerados, o que elevaria demasiadamente o tempo

Conhecendo o tempo para alcançar a metade do valor de equilíbrio, H, e supondo que se trata de uma reversão a média de Uhlenbeck & Orsntein, uma alternativa para estimar o fator de decaimento, é por meio de uma simples manipulação algébrica da equação da Meia Vida[64], descrita a seguir:

$$\eta = \ln(2)/H \tag{5.1}$$

Para ficar mais claro, suponha-se que, devido a justificativas econômicas, um processo siga a reversão à média de Uhlenbeck & Orsntein. Com valor de equilíbrio $\overline{x}$ igual a 20 (descrito pela linha horizontal em vermelho) e o valor inicial de 25. O histórico de uma realização desse processo seria assim descrito na figura 11:

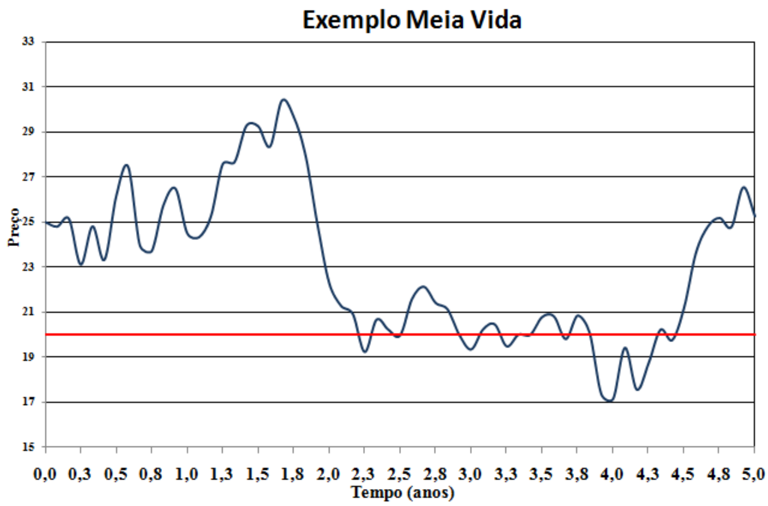

Figura 11: Exemplo Meia Vida

A diferença entre o valor inicial e o valor de equilíbrio é cinco. Logo, para calcular a metade do valor de equilíbrio, basta pegar a metade deste valor e somar ao valor inicial, obtendo 22,5.

Observando-se o gráfico, o tempo vida total até a metade do equilíbrio seria, aproximadamente, 2. Usando-se a equação 5.1, poder-se-ia encontrar a velocidade da reversão à média (η).

$$\eta = \ln(2)/(2) = 0{,}35 \tag{5.2}$$

computacional. Mesmo com o método heterodoxo, utilizando 4 computadores em paralelo, foram necessários 2 dias e meio para simular todos os procedimentos.

[64] $H = \ln(2)/\eta$

Logo o fator de decaimento aproximado dessa série é de 0,35.

Por fim, o problema só se torna implementável se, com base nas ideias de Frota(2003) e Nascimento (2005)[65], em vez de uma análise contínua de abandono, está será aproximada por uma opção Bermuda com 4 períodos por ano (o que seria equivalente à tomada de decisão trimestral). Observe-se que, na "vida real", tal suposição se mostra bastante razoável, visto que as decisões de investimentos (ou abandono) das empresas são tomadas em períodos espaçados – devido à necessidade de análise de um conjunto de informações (coleta e processamento).

5.2
Padronização

O primeiro passo, para a solução do problema, é organizar e padronizar a simulação e, para tal, todos os parâmetros foram escritos em função do ano. Quando se pretender uma análise em períodos diferentes do padronizado (por exemplo, semestral ou mensal), basta transformá-los através da multiplicação por um fator de ajuste (dt) – obtido pelo inverso do número de períodos em um ano. Por exemplo, supondo-se que a taxa máxima de investimento anual, Im, seja R$200.000/ano e se queira fazer uma análise semestral. Como um ano possui dois semestres, o dt será igual a 0,5. Logo, para achar o resultado desejado, resta efetuar a operação $I_m \times dt$, a partir da qual se chegará a R$100.000/semestre.

Outra consequência dessa estrutura está relacionada com o número de períodos analisados por caminho, obtido quando, para um determinado horizonte de tempo de análise, "ta", este deverá ser multiplicado pelo inverso de dt. Como a proposta aqui exposta avalia o projeto trimestralmente em um horizonte de tempo de 100 anos, o número encontrado será de 400 períodos por caminho.

Não obstante, para facilitar futuras explicações envolvendo matrizes de dados (por exemplo, *Custo(i,j)*), a seguinte padronização será obedecida:

- As representações i e j remetem a qualquer caminho dentro de todas as simulações e para qualquer período da análise, respectivamente;
- Já as representações i* e j* especificam a coordenada (ou uma restrição) específica de uma matriz.

[65] Conforme foi explicado na seção 3.3.2.2.2.

A representação Custo(i, j < j*), por exemplo, significa para todos a elementos do Custo, cujo período seja inferior a j*. A mesma idéia aplica-se quando se escreve Custo(i < i*, j < j*) – para todos elementos cujo período seja inferior a j* relacionado até i* simulação. Já o Custo(i*,j*) significa o valor do custo no caminho i* e período j*.

5.3
Geração de cenários

Com a definição e estruturação dos parâmetros, a próxima etapa é gerar os diversos caminhos da evolução das variáveis de estado (custo do investimento e fluxo de caixa), discretizados de acordo com o número de períodos totais, com o objetivo de descreverem a realidade. Haja vista que, nessa etapa, somente são gerados os cenários, os dados se armazenarão nas suas respectivas matrizes, sem que seja avaliada a opção de abandono.

5.3.1
Custo do investimento

A geração dos cenários requer que as equações que descrevem os eventos sejam discretizadas. Schwartz (2002) discretiza o custo esperado [66] da seguinte forma:

$$\begin{cases} \mathrm{K(t+dt)=K(t)-I_m dt+\beta(I}_m\ \mathrm{K(t))}^{1/2}\,\mathrm{(dt)}^{1/2}\,\varepsilon_1 \\ K(0) = \text{Custo incial estimado} \end{cases} \quad (5.3)$$

Para ficar mais evidente a padronização do investimento anual, ao rearrumar a equação da seguinte obtém a seguinte fórmula:

$$\begin{cases} \mathrm{K(t+dt)=K(t)-I_m dt+\beta\ (I}_m \mathrm{dt\ K(t))}^{1/2}\varepsilon_1 \\ K(0) = Custo \text{ incial estimado} \end{cases} \quad (5.4)$$

---

66 $\mathrm{dK = -I \times dt + \sigma \times (I \times K)^{\frac{1}{2}} \times dz}$

Sendo que:

- dt = é tamanho do passo tomado entre períodos em função do ano;
- K(t) = é o custo faltante para o término do projeto no período t;
- Im = é taxa máxima de desconto possível em um ano;
- Imdt= é taxa máxima de desconto possível entre períodos;
- β = é a volatilidade do custo;
- ε_1= é uma normal padronizada responsável pela aleatoriedade do custo;
- $\beta\ (I_m dt\ K(t))^{1/2}\varepsilon_1$ = são as incertezas técnicas do custo entre períodos.

Como não existe o custo negativo, dando ideia de ganhos (o que não faz sentido), reescreve-se a equação 5.4 da seguinte forma:

$$\begin{cases} K(t+dt)=\max\left\{K(t)-I_m dt+\beta\ (I_m dt\ K(t))^{1/2}\varepsilon_1\,;0\right\} \\ \mathit{Sendo}\ k(0) = \text{Custo incial estimado} \end{cases} \qquad (5.5)$$

Todavia, para tornar-se o mais fiel possível à realidade, a equação anterior, requer outra interpretação acerca do custo, já introduzido no inicio da seção: o valor máximo investido será aquele que minimiza otimamente o custo (aplicando somente o necessário). Logo, trata-se de um problema de otimização conforme as equações a seguir:

$$\begin{aligned} &K(t+dt)=\min_{i}\left(\text{máx}(K(t)-Idt+\beta(IK(t)dt)^{1/2}\varepsilon_1,0)\right) \qquad (5.6)\\ &\text{Sujeito a :}\\ &0<I(t)<I_{\text{máximo}}\\ &K(0) = \mathit{Custo}\ \text{inicial estimando} \end{aligned}$$

A função objetivo da otimização é descrita por uma equação quadrática. Assim, trata-se de um problema de otimização não linear que exige uma solução numérica. Para solucioná-lo, optou-se pela ferramenta de Newton-Raphson[67], por figurar como um procedimento relativamente simples de ser implementado no

[67] Descrito no apêndice B.1.

VBA[68] e, ao mesmo tempo, por ter uma boa convergência.

Para a obtenção de bons resultados (precisos e que convergiam rapidamente), por meio dessa metodologia, é fundamental que sejam escolhidos valores iniciais próximos das vizinhanças do valor ótimo - na medida em que por se trata de uma equação quadrática, podem existir alguns mínimos locais que não sejam ótimos globais. No contexto da dissertação, há duas possibilidades de gerar valores iniciais:

1. Para os custos elevados (acima do investimento máximo que a empresa pode investir por período), é intuitivo que, para minimizar ao máximo esse custo, a empresa aplique o máximo possível nesse período (já que é de interesse dela em desenvolver o mais rápido possível a tecnologia). Logo, nessa situação, utiliza-se como o valor inicial o investimento máximo por período.
2. Nos outros casos, quando o custo resultante está abaixo do investimento máximo (ou um pouco acima deste), é razoável supor que, igualmente, a possibilidade do valor ótimo seja menor do que o custo máximo. Caso o modelo fosse determinístico, para zerar o custo residual bastaria investir no que está faltando. Contudo, com a aleatoriedade, provocada pelas incertezas técnicas e econômicas, o ótimo provavelmente descolou-se para alguma região vizinha. Logo, nessa situação utilizam-se dois valores inicias (executando duas otimizações independentes). O primeiro aplica-se o custo remanescente, do período anterior; já para o segundo, conforme a situação anterior, utiliza-se o investimento máximo. Assim sendo, bastaria comparar os dois resultados e escolher o que culminou a melhor resposta.

Na qualidade de método numérico, o Newton-Raphson, na maioria dos casos, gera valores aproximados com alto nível de precisão. Contudo, esta pode deixar o algoritmo mais pesado, devido a uma maior alocação de memória[69] e operações mais complexas. Uma forma simples de contornar esse ponto, sem prejudicar o resultado final, é arredondando esses valores (não permitindo casas decimais)[70].

---

[68] Linguagem utilizada na dissertação.
[69] Por se tratar de uma aproximação numérica em vez de alocar um valor correspondente ao 0, por exemplo, é gerado o valor 0,0000000000059.
[70] Tal arredondamento não prejudicará o resultado final, pois, quando comparado com o montante total analisado, este se torna insignificante. Por exemplo, 3.000.000,0024257 para 3.000.000.

$$K(t+dt)=\text{arredondar}(\min_{i}(\text{máx}(K(t)-Idt+\beta(IK(t)dt)^{1/2}\varepsilon_1,0))) \quad (5.7)$$
$$\text{Sujeito a :}$$
$$0<I(t) \leq I_{máximo}$$
$$K(0) = Custo \text{ inicial estimando}$$

Somado a isso, após algumas simulações, observou-se que a aplicação desse procedimento para todas as etapas era muito rigorosa e exigia novamente um tempo computacional não desprezível[71]. Também foi constatado que, quando os custos eram muito maiores do que o investimento máximo, o resultado final sempre foi aplicar o investimento máximo. Logo, em vez de se utilizar tal procedimento para todas as situações, a fim de diminuir a complexidade computacional sem interferir no resultado final, o ideal seria aplicá-lo somente nas situações em que há a possibilidade de gerar resultados diferentes do investimento máximo. Para tal fato, foi definido uma região crítica onde seria aplicada a otimização, tal qual se apresenta a seguir[72]:

$$Se\ K(t)<(1{,}15\times I_m):$$
$$\begin{cases} K(t+dt)=\text{arredondar}(\min_{i}(\text{máx}(K(t)-Idt+\beta(IK(t)dt)^{1/2}\varepsilon_1,0))) \\ \text{Sujeito a :} \\ 0<I(t) \leq I_{máximo} \\ k(0) = \text{Custo incial estimado} \end{cases} \quad (5.8)$$

$$Se\ K(t) \geq (1{,}15\times I_m):$$
$$\begin{cases} K(t+dt)=\max\left\{K(t)-I_m dt+\beta\ (I_m dt\ K(t))^{1/2}\varepsilon_1;0\right\} \\ k(0) = \text{Custo incial estimado} \end{cases}$$

No momento em que o custo atingir o zero, não haverá mais a necessidade de investir mais, uma vez que o produto já foi desenvolvido. A partir daí, os custos e os investimentos equivalerão a zero.

Para cada caminho, por meio da aplicação recursiva da equação anterior

---

[71] Cada estimação leva aproximadamente 0,8 segundos. Para o exemplo do capítulo 6, observou-se que, em média, para cada caminho, são necessários 20 realização até "zerar" os custos, logo, ao aplicar unicamente o método de Newton Raphson são necessários, em média, aproximadamente, 16 segundos por caminho.
[72] Com intuito bastante rigoroso escolheu o valor crítico de 115% do investimento máximo.

(que começa pelo tempo inicial, ti, e progride em passos de tamanho Δt em direção ao ultimo período de análise[73], ta, totalizando (ta-ti)/ Δt passos por caminho), são gerados e armazenados todos os cenários na suas respectivas matrizes de dados, isto é:

- Os custos restantes na matriz de dados *Custo(i,j)*;
- Os investimentos feitos na matriz de dados *Investimento(i,j).*

Por último, devido à necessidades futuras, serão armazenados também no vetor[74] de dados, th(i), os tempos necessários para a alcançar a metade do custo estimado (valor de equilíbrio) término do investimento.

5.3.2 Fluxo de caixa com intangível

Consoante a figura 10, o fluxo de caixa possui três etapas principais. Na Etapa II, devido à proteção da patente até o período T (estabelecido por um órgão regulador), a empresa possui o monopólio de venda sobre o seu produto/serviço. Assim, Schwartz (2002), baseado na equação 4.5, discretiza a sua evolução da seguinte maneira:

$$\begin{cases} C(t+\Delta t) = C(t)\exp\left[\left(\alpha^* - \dfrac{\phi^2}{2}\right)\Delta t + \phi\left(\Delta t\right)^{1/2}\varepsilon_2\right] \\ C(0) = \textit{fluxo} \text{ de caixa previsto} \end{cases} \tag{5.9}$$

Sendo que:

- Δt = é tamanho do passo tomado entre períodos em função do ano;
- C(t) = é o fluxo de caixa no período t;
- α* = parâmetro relacionado com a tendência livre de risco;
- Φ = volatilidade do fluxo de caixa;
- ε_2 = é uma normal padronizada, responsável pela aleatoriedade do

[73] O comentário parece um pouco redundante, porém é utilizado para enfatizar que se trata de procedimento forward. E com isso, contrastar com etapas posteriores que será o inverso de trás para frente (backward)
[74] Utiliza-se como padrão um vetor vertical, isto é, n linhas e 1 coluna.

fluxo de caixa, correlacionando ρ com a normal padronizada do custo ε_1[75].

Com o fim da proteção da patente, parte I da Etapa III, diversas empresas começam a tentar a entrar nesse novo mercado. Contudo, devido aos ativos intagiveis, segundo Teece (2000), esta tarefa é bastante complexa e exige bastante trabalho para obter as qualidades (requisitos) necessárias. Por isso, é de se esperar que, na maioria das vezes, a absorção do mercado não seja imediata.

O período de adaptação do mercado estará baseado na equação 4.13, cuja duração se dá até quando o fluxo de caixa atingir o valor equivalente de um mercado de competição perfeita/oligopólio, denominado Cequilíbrio* (indicando que as empresas concorrentes já absorveram completamente a tecnologia, tendo como reflexo o preço e, em perpetuidade, o valor do fluxo de caixa será Cequilíbrio*).

Para gerar os cenários da simulação a discretização é obtida da seguinte forma:

$$\begin{cases} C(t+\Delta t) = C(t)\exp(-\eta\Delta t) + Cequilíbrio^*\left(1-\exp(-\eta\Delta t)\right) \\ \qquad + \varepsilon_2\phi\sqrt{\left(1-\exp(-2\eta\Delta t)\right)/\left(2\eta\right)},\ \text{Se C(t)} > Cequilíbrio^* \\ \\ C(t+\Delta t) = Cequilíbrio^*, Se\ \text{C(t)} \le Cequilíbrio^* \end{cases} \tag{5.10}$$

Considerando que:

- Δt = é tamanho do passo tomado entre períodos em função do ano;
- C(t) = é o fluxo de caixa no período t;
- Π = premio de risco;
- □ = volatilidade do fluxo de caixa;
- ε_2 = é uma normal padronizada responsável pela aleatoriedade do fluxo de caixa;
- η = é a velocidade de decaimento. Esse fator é o responsável direto pela demora do mercado em absorver o produto (quanto maior for o

[75] Uma forma simples de gerar os números aleatórios correlacionados é por meio de correlação e a decomposição de Cholesky (ver apêndice B.2.).

seu valor, mais rápido o mercado irá absorver o produto);

- Cequilibrio* = é o fluxo de caixa no equilíbrio livre de risco;
- Cequilibrio = é o fluxo de caixa no equilíbrio original;
- $C(0) = C_{Etapa\ 2}(\tau)$;
- Cequilíbrio* = Cequilíbrio-Π/η .

A grande dificuldade desta etapa é obter a velocidade de decaimento. Na teoria, este poderia ser estimado por meio da comparação com um modelo base (benchmark). Todavia, por tratar-se de um tema bastante atual e também devido a motivos de confidencialidade, não existe um banco de dados (e muito menos um estudo sobre esse ponto) que permita calculá-lo.

Contudo, observe que tanto a Etapa I quanto a primeira parte da Etapa III descrevem empresas que estão tentando desenvolver (absorver) um determinado produto (ou tecnologia). A diferença da abordagem entre as etapas (alem do tempo de execução) reside no fato de que a análise proposta se promove segundo a ótica de um gestor da empresa que inicialmente desenvolveu e patenteou a tecnologia (definida como empresa X). Devido a tal fato, somente as informações confidenciais dos investimentos da empresa X são acessíveis e a equação 5.8 poderá ser aplicada unicamente na Etapa I.

Na etapa III, ao observar que a empresa X está auferindo lucros[76], as empresa externas começam a investir (absorver a tecnologia) e o ganho obtido pela empresa X tende a depreciar. Desta forma, é possível constatar que o fator de decaimento do fluxo de caixa da empresa X está diretamente relacionado com o tempo de absorção (ou investimento) das empresas externas.

Caso as empresas externas pudessem ser representadas pela empresa X, o fator de decaimento de absorção do mercado poderia ser estimado por meio do conceito de meia vida sobre o custo, já simulado na Etapa I, descrito a seguir:

$$\eta_x = \frac{\ln(2)}{H_x} \tag{5.11}$$

[76] Caso contrário, a empresa inovadora já teria abandonado na primeira etapa.

Porem usualmente essa aproximação não é verdadeira, pois a empresa X possui características (e tempos de absorção[77]) diferentes do mercado. Assim, como último passo, é necessário ajustar essa diferença por meio de um fator de correção sobre η_x. Devido aos seus bons fundamentos e, também, por ter sido criada e utilizada pelo BNDES, serão utilizadas as métricas de Deutscher (2008). Na expressão a seguir, R_m e R_x são os *Ratings* do mercado e da empresa X, respectivamente, obtidas após aplicar a assim chamada métrica de Deutscher:

$$\eta = \left(\frac{\mathrm{Rm}}{\mathrm{Rx}}\right)\eta_x \tag{5.12}$$

$$\eta = \left(\frac{\mathrm{Rm}}{\mathrm{Rx}}\right)\frac{\ln(2)}{\mathrm{H_x}} \tag{5.13}$$

Substituindo-se 5.13 em 5.10, obtém-se a equação da discretização final da primeira parte etapa 3.

$$\begin{cases} C(t+\Delta t) = C(t)\exp\left(-\left(\frac{Rm}{Rx}\right)\frac{\ln(2)}{H_x}\Delta t\right) + Cequilibrio^*\left(1-\exp\left(-\left(\frac{Rm}{Rx}\right)\frac{\ln(2)}{H_x}\Delta t\right)\right) \\ \qquad + \varepsilon_2\phi\sqrt{\frac{\left(1-\exp\left(-2\left(\frac{Rm}{Rx}\right)\frac{\ln(2)}{H_x}\right)\Delta t\right)}{\left(2\left(\frac{Rm}{Rx}\right)\frac{\ln(2)}{H_x}\right)}}, \text{Se C(t)>}Cequilibrio^* \\ C(t+\Delta t) = Cequilibrio^*, Se\ \mathrm{C(t)} \le Cequilibrio^* \end{cases} \tag{5.14}$$

Considerando que:

- $\mathrm{C(0)} = \mathrm{C_{Etapa\,2}}(\tau)$;
- $\mathrm{Cequilíbrio^*} = \mathrm{Cequilíbrio} - \Pi \Big/ \left(\left(\frac{\mathrm{Rm}}{\mathrm{Rx}}\right)\frac{\ln(2)}{\mathrm{H_x}}\right).$

[77] Quanto mais preparado estiver o mercado em relação à empresa que desenvolveu o produto, menor será o tempo necessário para ele absorvê-lo (e maior será a velocidade de decaimento).

Um das vantagens desta abordagem é que ela propicia o cálculo dinâmico do η, tornando possível refletir uniformemente as dificuldades enfrentadas pela empresa em cada cenário.

A partir do instante em que o valor do fluxo de caixa se igualar ao do fluxo de caixa em situação de equilíbrio (monopólio e competição perfeita), Cequilíbrio*, é uma evidencia que o mercado terá finalmente absorvido a tecnologia. Até o termino do período de análise, descrito na segunda parte da Etapa III, o fluxo de caixa seguirá alguma regra estocástica de Teoria de Jogos ou alguma aproximação. Na proposta desta dissertação, como o modelo já está bastante complexo, este valor será aproximado por outro constante e representado pelo próprio Cequilíbrio*.

Com a aplicação recursiva das três etapas do fluxo de caixa, são obtidos todos os fluxos de caixas em todos instantes. Diferentemente da geração de cenário dos custos, o fluxo de caixa só será armazenado na matriz *fluxo(i,j)* após o término do desenvolvimento do produto, no período τ; isto é, somente após o término da criação da tecnologia - antes desse período a matriz será preenchida por zeros.

5.3.3
Fluxo de caixa sem intangível

O que diferencia o fluxo de caixa com e sem intangível é o processo de reversão à média, descrito na equação 5.14. No caso do sem intangível, imediatamente após o término da proteção da patente, o fluxo de caixa assume imediatamente o valor constante de equilíbrio Cequilíbrio*.

5.4
Avaliação do projeto

5.4.1
Com a opção de abandono

Depois de simuladas as variáveis de estado (custo e fluxo de caixa) a próxima etapa do LSM é encontrar a regra de decisão ótima, considerando a possibilidade de abandono somente nos períodos em que ainda exista investimento, na Etapa I, e, com isso, precificar o valor de oportunidade do projeto. Os dados obtidos até o momento foram:

- *Fluxo(i,j):* matriz com os fluxos de caixa de cada período e cenário;
- *Investimento(i,j):* matriz com investimentos feitos em cada período e cenário;
- *Custo(i,j):* matriz com os custos de todos os períodos e cenários;
- *th(i):* vetor indicando o período de término de investimento de cada caminho.

Inspirado pelo artigo de Schwartz (2002), a dissertação utilizará como o cursor principal da análise (responsável pelo progresso do algoritmo) a própria variável j, relacionada com o eixo do tempo. Somente após a análise (avaliação) recursiva de todos os elementos i's (caminhos) relacionados com o um determinado vetor coluna j* é que será analisado o próximo período. O progresso seguirá a técnica *backward*, começando pela última data de análise (ou última coluna da matriz de dados) $j^* = t_{análise}$ até o instante inicial (primeira coluna da matriz de dados) $j^* = t_{inicial}$. À medida que proceder a análise, as respostas serão armazenadas na matriz ganho denominada G*anho(i,j)*.

Enquanto o cenário i* não tiver sido abandonado previamente e o período corrente de análise j* for superior ao período correspondente ao término do desenvolvimento do produto, t(i*), a empresa estará na Etapa II ou III, em que receberá o fluxo de caixa, sem a necessidade de análise da opção de abandono. O ganho nessa situação pode ser obtido de maneira simples:

$$\begin{cases} Se \ j^* > \mathrm{th}(i^*): \\ Ganho(i^*, j^*) = \exp(-r\Delta t)Ganho(i^*, j^*+1) + Fluxo(i^*, j^*) \ , \quad \text{p/ j} < t_{análise} \\ Ganho(i^*, j^*) = Fluxo(i^*, t_{análise}) \qquad , \quad \text{p/ j} = t_{análise} \end{cases} \qquad (5.15)$$

Por outro lado, na situação em que o cenário i* estiver em um período j* dentro do intervalo onde ainda não foi finalizado o desenvolvimento do projeto ($t_{inicial} \leq j^* \leq th(i^*)$), deve ser levada em conta a oportunidade de investimento (considerando a possibilidade de se abandonar o projeto). Para isso, faz-se necessário verificar se o ganho esperado é maior do que o investimento marginal requerido. Em outras palavras, é preciso calcular o valor de continuação e comparar com o investimento feito no mesmo período (verificar se a diferença entre eles é maior do que zero).

Segundo Schwartz (2002), o valor de continuação, em um determinado i* e j*, é estimado por meio da regressão múltipla[78] (por mínimos quadrados) de Ganho(i,j)=exp(- (r+λ) Δt) $\times\left(\text{Ganho(i,j+1)}\right)$[79] em função do C*usto(i,j), Fluxo(i,j)* e seus os termos cruzados, utilizando todos os cenários adequados i's (dentro do contexto da regressão e *in-the-money*)[80] dentro do período j*, descrito na função seguir:

$$\begin{aligned} \mathrm{y} = {} & \beta_0 + \beta_1 \mathrm{Custo}(i, j^*) + \beta_2 Fluxo(i, j^*) + \beta_3 \left(\mathrm{Custo}(i, j^*)\right)^2 \\ & + \beta_4 \left(\mathrm{Custo}(i, j^*) \times Fluxo(i, j^*)\right) + \beta_5 \left(Fluxo(i, j^*)\right)^2 + \beta_6 \left(\mathrm{Custo}(i, j^*)\right)^3 \\ & + \beta_7 \left(\left(\mathrm{Custo}(i, j^*)\right)^2 \times Fluxo(i, j^*)\right) + \beta_8 \left(\mathrm{Custo}(i, j^*) \times \left(Fluxo(i, j^*)\right)^2\right) + \beta_9 \left(Fluxo(i, j^*)\right)^3 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Depois de estimados os parâmetros do modelo anterior, o valor da continuação de um determinado i* é obtido pela substituição do seu respectivo custo (Custo(i*, j*)) e fluxo de caixa (Fluxo (i*, j*)) na equação 5.16, conforme descrito a seguir:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathrm{Ganho}}(i^*,j^*) = {} & \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 Custo(i^*, j^*) + \hat{\beta}_2 Fluxo(i^*, j^*) + \hat{\beta}_3 \left(Custo(i^*, j^*)\right)^2 \\ & + \hat{\beta}_4 \left(Custo(i^*, j^*) \times Fluxo(i^*, j^*)\right) + \hat{\beta}_5 \left(Fluxo(i^*, j^*)\right)^2 + \hat{\beta}_6 \left(Custo(i^*, j^*)\right)^3 \\ & + \hat{\beta}_7 \left(\left(Custo(i^*, j^*)\right)^2 \times Fluxo(i^*, j^*)\right) + \hat{\beta}_8 \left(Custo(i^*, j^*) \times \left(Fluxo(i^*, j^*)\right)^2\right) + \hat{\beta}_9 \left(Fluxo(i^*, j^*)\right)^3 \end{aligned} \tag{5.17}$$

[78] Uma das limitações dos mínimos quadrados observadas na simulação foi a incapacidade de avaliar períodos atípicos com uma base de dados pequena (com poucos custos diferentes de zero). Nesse contexto, a estimação pode ser impraticável (por exemplo, quando existir somente uma amostra). Uma possível solução para este problema é gerar muitos cenários – de forma a extinguir períodos com poucas amostras – e, caso o problema persista, um procedimento adicional é eliminar os cenários que impossibilitaram a análise.

[79] Dixit & Pindyck (1993, p. 87) demonstram que, para o caso discreto, quando existe a possibilidade de parada, a uma taxa λ, é necessário adicionar o λ no desconto do ganho; o raciocínio é equivalente para o caso continuo.

[80] Os cenários adequados para o LSM são aqueles que estão *in-the-money* (se, em nenhum momento anterior, foi abandonado) e ainda existe um custo. Caso não se retirassem essas situações do banco de dados da regressão, haveria uma estimação muito genérica, uma vez com dados de diversos contextos e, com isso, estimaria um modelo muito genérico, no qual a acurácia da previsão desejada estaria prejudicada.

Diante disso, basta agora subtrair o ganho esperado estimado pela equação 5.17 pelo investimento aplicado no cenário i* e período j*, a fim de verificar se é vantajoso continuar com o projeto (tal procedimento é descrito na equação 5.18). Se essa diferença for negativa, estará indicando um prejuízo e é ótimo abandonar o projeto no período j* do cenário i* e, consequentemente, os períodos anteriores a ele no mesmo caminho (i*, j<j*)[81], dado que, se em um período futuro, não é vantajoso continuar o projeto, automaticamente não será vantajoso no atual, já que não se têm expectativas de ganhos futuros.

$$\begin{cases} Se \text{ j } * \leq \text{ th(i*) :} \\ Ganho(i^*, j^*) = \max\left(\hat{Ganho}(i^*, j^*) - Investimento(i^*, j^*)dt \ ;0 \right) \end{cases} \tag{5.18}$$

A aplicação recursiva desse procedimento em todos os períodos até o instante inicial ($j^*=t_{inicial}$) permitirá a estimação do caminho ótimo e o computo dos ganhos de todos os cenários, bastando agora tirar uma a média desses valores para se precificar o projeto.

$$Valor \text{ do projeto} = \frac{\sum_{i=1}^{\text{Caminhos}} Ganhos(i,1)}{\text{Caminhos}} \tag{5.19}$$

5.4.2
Sem a opção de abandono

Sobre o artigo de Schwartz (2002), Nascimento (2005) observou que carece de maiores detalhes no que diz respeito ao procedimento utilizado para se obter o valor do projeto de P&D sem opção de abandono. Para a avaliação do projeto sem a opção de abandono, Nascimento propõe que sejam refeitos todos os procedimentos de “povoamento” (gerados os fluxos de caixa e o investimento). Porém, haja vista que não existe mais a possibilidade de abandono no lugar de

[81] Esse raciocínio otimiza o algoritmo, já que não foram feitas diversas operações matemáticas por um único condicional – se o ganho do período posterior é igual a zero, então o ganho neste período também será zero (pois não se tem expectativa de futuros ganhos).

aplicar a regressão, seja descontando o ganho do período posterior é obtido pela formula:

$$\text{Ganho}(i,j)=\exp(-(r+\lambda)\,\Delta t)\text{Ganho}(i,j+1) - \text{Investimento}(i,j) \quad (5.20)$$

Por necessitar gerar todos os cenários novamente, mesmo sendo uma ideia simples, computacionalmente não se trata de um método eficiente. Observe que o principal diferencial dessa análise (sem opção de abandono), se comparada com a anterior (com a opção de abandono) é a possibilidade de "zerar os prejuízos" pela equação 5.18. Logo, até o momento em que não existirem ganhos negativos, conceitualmente as duas análises serão exatamente iguais.

Assim, para aperfeiçoar o tempo e a complexidade computacional, o ideal é realizar, ao mesmo tempo, as duas etapas (descrita por 5.4.1). Enquanto os dois são conceitualmente iguais, as matrizes serão as mesmas. Somente após o aparecimento de um ganho negativo, tomam-se procedimentos diferentes – para a valoração com opção usa-se a equação 5.18 e para sem a opção utiliza-se a equação 5.20.

Outra vantagem da metodologia proposta é que ela possibilita avaliar diretamente a diferença entre ganhos com e sem a utilização da opção em cada cenário. Caso fosse utilizada a idéia de Nascimento (2005), como os cenários gerados nas duas avaliações (com e sem a opção) são diferentes, para obter-se ao menos um resultado macro da diferença entre eles, seria necessário utilizar uma maior amostragem, de forma a minimizar os efeitos da aleatoriedade.

5.5
Output

O último procedimento do algoritmo consiste em gerar os resultados (*output*) que permitam analisar o projeto com mais detalhes o projeto. A partir da idéia de Lev (2001), isso é possível por meio das seguintes equações:

$$\text{Valor da Opção}_{Com\ \text{intangível}} = \text{Valor Projeto Com Intangível}_{Com\ \text{Opção}} - \text{Valor Projeto Com Intangível}_{Sem\ \text{Opção}} \quad (5.21)$$

$$\text{Valor da Opção}_{Sem\ \text{intangível}} = \text{Valor Projeto Sem Intangível}_{Com\ \text{Opção}} - \text{Valor Projeto Sem Intangível}_{Sem\ \text{Opção}} \quad (5.22)$$

O valor do intangível igualmente será de duas formas, com a opção de abandono e sem a possibilidade de opção de abandonar:

$$\text{Valor do Intangível}_{\textit{Com Opção}} = \text{Valor Projeto Com Opção}_{\textit{Com}\ \text{Intangível}} - \text{Valor Projeto Com Opção}_{\textit{Sem}\ \text{Intangível}} \quad (5.23)$$

$$\text{Valor da Intangível}_{\textit{Sem}\ \text{Opção}} = \text{Valor Projeto Sem Opção}_{\textit{Com}\ \text{Intangível}} - \text{Valor Projeto Sem Opção}_{\textit{Sem}\ \text{Intangível}} \quad (5.24)$$