

3

Definição e conceitos básicos de Opções Reais

3.1

Processos estocásticos

Um dos principais diferenciais da abordagem de Opções Reais, como já descrito em seções anteriores, é a maximização do valor da empresa a partir da tomada de decisões (por exemplo: expandir em uma determinada direção, abandonar um determinado projeto ou continuar como está), explicitando a incerteza futura e as ações ótimas nesses cenários. Ou seja, a empresa está atenta a informações atuais e cenários futuros.

Uma vez impossível prever o futuro com exatidão, dado o fator de aleatoriedade a ele intrínseco, a evolução do ambiente de negócios ao longo do tempo (com suas respectivas incertezas) se representa por um conjunto de variáveis aleatórias denominada de processo estocástico $X(t)$; ou seja, para cada t , normalmente relacionado com o tempo, tem-se uma variável aleatória obedecendo a uma distribuição de probabilidade.

Tal processo pode ser analisado sob diversos pontos de vista, tais como: estacionariedade (situação em que os principais momentos estatísticos, média e variância são mantidos ao longo do tempo), independência e ser ou não markoviano (quando a distribuição de probabilidade de um processo só depende do resultado anterior).

Devido a sua importância, nesta seção serão apresentados os principais processos estocásticos básicos, aqui, utilizados.

3.1.1

Processo de Wiener

Um processo estocástico fundamental tanto para finanças quanto para outras áreas (como, por exemplo, física¹⁶) é o Processo de Wiener¹⁷, muito utilizado, por

¹⁶ O processo de Wiener é utilizado para descrever o movimento de uma partícula.

¹⁷ Wiener (1923)

exemplo, em Reversão à Média¹⁸ e Movimento Geométrico Browniano¹⁹. É a partir dele que se desenvolve a chamada aleatoriedade dos processos.

Classifica-se Processo de Wiener aquele que atender a três propriedades principais:

- A variação entre qualquer intervalo (ou incremento) de tempo é estacionária e independente;
- O processo segue a propriedade de Markov;
- As variações do processo obedecem à distribuição de um ruído branco - normal com média 1 e variância 0 -, com a variância igual à raiz quadrada do tempo.

Sendo $w(t)$ um processo de Wiener, este pode ser descrito através das seguintes equações:

$$\begin{cases} dw(t) = \varepsilon_t \sqrt{dt}, & \text{sendo } \varepsilon_t \sim N(0,1) & (3.1) \\ E[\varepsilon_t \varepsilon_s] = 0 & \text{para qualquer } t \neq s & (3.2) \end{cases}$$

A partir da equação 3.1, após algumas manipulações matemáticas²⁰, prova-se que o processo dw é uma normal de média zero e variância dt ($N(0,dt)$).

Uma propriedade²¹ bastante importante que será utilizada em algumas demonstrações é:

$$(dw(t))^2 = dt \quad (3.3)$$

3.1.2

Movimento Geométrico Browniano

Um dos processos mais populares na literatura, devido à fácil estimação dos parâmetros e interpretação (matematicamente simples), é o Movimento Geométrico Browniano (MGB), bastante utilizado na previsão em ativos

¹⁸ Ornstein & Uhlenbeck (1930)

¹⁹ Dixit e Pindyck (1994)

²⁰ $E[dw(t)] = E[\varepsilon_t \sqrt{dt}] = \sqrt{dt} E[\varepsilon_t] = \sqrt{dt} \times 0 = 0$ $V[dw(t)] = V[\varepsilon_t \sqrt{dt}] = (\sqrt{dt})^2 V[\varepsilon_t] = dt \times 1 = dt$

²¹ Demonstração no Apêndice A1.

financeiros em geral (por exemplo: ações e índice da Bovespa). Trata-se de um caso particular do processo de Ito²², representado por:

$$\frac{dx}{x} = \mu dt + \sigma dz \quad (3.4)$$

Sendo:

- $x(t)$ = o processo estocástico de interesse;
- μ = drift ou tendência instantânea do processo;
- σ = taxa de variância instantânea do processo;
- dz = incremento de Wiener

O primeiro termo da equação está relacionado com a tendência do processo, enquanto o segundo com a aleatoriedade proveniente das incertezas do mercado (técnica, econômica ou estratégica). Esse processo mantém as propriedades do processo Wiener. Conforme demonstram Dixit & Pindyck (1994), a média e variância são, respectivamente:

$$E[x(t)] = x_0 e^{\mu t} \quad (3.5)$$

$$Var[x(t)] = x_0^2 e^{2\mu t} (e^{2\sigma t} - 1) \quad (3.6)$$

Onde:

- x_0 = o valor do processo no instante inicial

Uma das desvantagens deste modelo é que a variância aumenta de forma ilimitada à medida que o tempo evolui.

A representação discreta da equação 3.4, utilizada para gerar os cenários em simulações, entre intervalos Δt , descreve-se a seguir:

$$x(t + \Delta t) = x(t) \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma (\Delta t)^{1/2} \varepsilon \right] \quad (3.7)$$

²² Dixit e Pindyck (1994)

3.1.3

Processo de Reversão à Média

No mundo real, existem diversas situações em que, mediante as forças naturais do mercado, o valor do ativo de interesse (preço de uma *commodity*; por exemplo, do petróleo) tende, em longo prazo, a um valor de equilíbrio (nível de equilíbrio de mercado). Isso quer dizer que, em curto prazo, o ativo pode estar bem acima ou baixo do preço de equilíbrio; porém, com a progressão do tempo, tende a este valor.

Tal característica pode ser incorporada por um modelo que foi proposto por Uhlenbeck & Ornstein (1930)²³, não é descrita com muita precisão pelo Movimento Geométrico Browniano. Para solucionar esse problema, os autores propuseram o processo denominado Reversão à Média, de variável aleatória x , descrito a seguir:

$$dx = \eta(\bar{x} - x)dt + \sigma dz \quad (3.8)$$

Sendo:

- $x(t)$ = o processo estocástico de interesse;
- η = fator (velocidade) de decaimento;
- \bar{x} = o valor de equilíbrio de longo prazo;
- dz = incremento de Wiener;
- σ = taxa de variância instantânea do processo.

O primeiro termo da equação está relacionado com a tendência do processo, enquanto o segundo termo com a aleatoriedade.

Observe-se que a variação dependerá da diferença entre x e \bar{x} . Quanto maior for essa diferença (em módulo), maior a variação esperada do processo. Por isso, mesmo sendo um processo markoviano, o incremento não será independente das fases do período anterior. Segundo Dixit & Pindyck (1994), média e variância são, respectivamente:

²³ As conclusões foram obtidas por meio da análise de sistemas dinâmicos de molas.

$$E[x_t] = x_0 e^{-\eta t} + \bar{x}(1 - e^{-\eta t}) \quad (3.9)$$

$$V[x_t] = (1 - e^{-2\eta t}) \frac{\sigma^2}{2\eta} \quad (3.10)$$

Diferentemente do MGB, a variância agora é limitada ao longo do tempo. No decorrer das páginas (e como será explicado nas seções posteriores), esse processo estocástico será muito importante, porque é a partir dele que será apresentada a proposta desta dissertação.

Por fim, para gerar os caminhos necessários para a simulação, faz-se necessário encontrar uma função discreta que represente o processo de reversão à média da equação 3.8. Dixit & Pindyck (1994) caracterizam-na como uma equação no tempo contínuo de um processo auto-regressivo de primeira ordem descrito pela equação 3.11.

$$x_t - x_{t-1} = x_{t-1}(1 - e^{-\eta}) + \bar{x}(1 - e^{-\eta}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta}}{2\eta}} dz \quad (3.11)$$

Esta equação é obtida por meio de uma manipulação algébrica e da aproximação de $\Delta t=1$ da equação 3.12.

$$x(t + \Delta t) = x(t + \Delta t)(e^{-\eta\Delta t}) + \bar{x}(1 - e^{-\eta\Delta t}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta\Delta t}}{2\eta}} dz \quad (3.12)$$

3.1.3.1

Meia Vida

Outro conceito importante no contexto da dissertação é a Meia vida, H. Esse compreende o tempo necessário para que um processo estocástico chegue à metade do caminho entre o valor inicial e o valor de equilíbrio. Trata-se de um recurso bastante poderoso devido à sua simplicidade e praticidade (como será visto no capítulo 5).

Para a reversão à média de Uhlenbeck & Ornstein, da equação 3.8, o valor da meia vida²⁴ é :

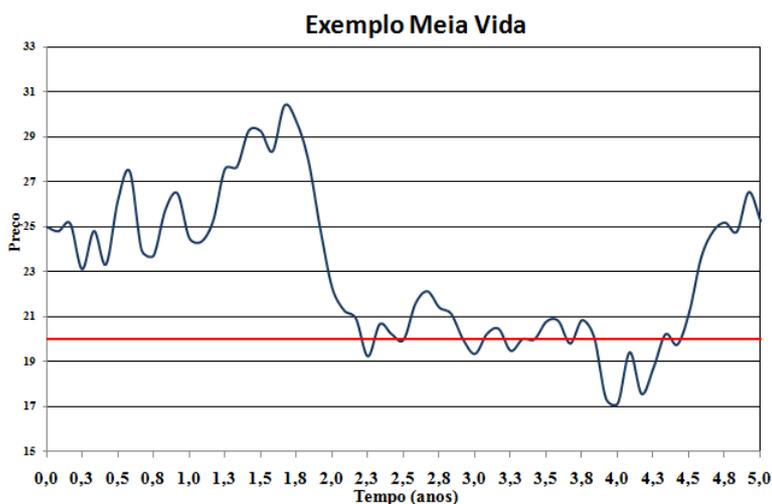
²⁴ Demonstração no apêndice A2.

$$H = \ln(2)/\eta \quad (3.13)$$

Onde:

- η é velocidade (ou fator) de decaimento para o valor de equilíbrio.

Para ficar mais claro, suponha-se que, que se esteja interessado em calcular o tempo total para o processo descrito no gráfico a seguir:



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 3: Exemplo Meia Vida

Supondo que devido a justificativas econômicas, pode-se afirmar que este siga a reversão à média de Uhlenbeck & Ornstein e que a velocidade de decaimento seja conhecida e igual a 10. Aplicando na equação 3.13 é possível obter o tempo até a metade do valor de equilíbrio, descrito a seguir:

$$H = \ln(2)/10 \cong 0,069 \quad (3.14)$$

3.1.4

Processo de Poisson

Até o momento, os modelos estocásticos consideram a evolução do mercado em tempo contínuo. Contudo, no mundo real, devido a fatos exógenos, imprevistos (mudança de uma política cambial, crises financeiras, entrada inesperada de novos concorrentes etc.), a variável estocástica pode sofrer alterações bruscas e súbitas. Mediante isso, é importante incorporar a

possibilidade de saltos (*jumps*) que descrevam esse fato. Na literatura²⁵, um processo bastante utilizado para a descrição dessas mudanças abruptas é o processo de Poisson.

O Processo de Poisson, dq , como o próprio nome diz, corresponde a um processo estocástico de contagem de saltos (de tamanhos fixos ou aleatórios) cuja possibilidade de ocorrência dos saltos (ou eventos), após determinado intervalo de tempo dt , segue a distribuição de probabilidade de Poisson, λdt (onde λ é a frequência média de chegada de um evento ao longo do intervalo de tempo).

Uma forma mais primitiva da sua utilização é aquela a qual o processo de Poisson é aplicado somente em um processo que segue uma tendência, descrita na equação:

$$\begin{aligned} dx &= f(x,t)dt + g(x,t)dq \\ dq &= \begin{cases} 0, \text{ com probabilidade } (1-\lambda)dt \\ \phi, \text{ com probabilidade } \lambda dt \end{cases} \end{aligned} \quad (3.15)$$

O primeiro termo da equação 3.15 está relacionado com a tendência do processo; já o segundo, com o processo de Poisson. Caso seja sorteado, a ocorrência do salto, ele irá acrescentar $g(x,t)\phi$ ao processo.

Porém, para deixar o modelo mais real, o ideal é colocar o efeito das incertezas, descrito pelo termo $h(x,t)dz$ (podendo ser, por exemplo, uma reversão à média ou movimento browniano):

$$\begin{aligned} dx &= f(x,t)dt + h(x,t)dz + g(x,t)dq \\ dq &= \begin{cases} 0, \text{ com probabilidade } (1-\lambda)dt \\ \phi, \text{ com probabilidade } \lambda dt \end{cases} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Além de gerar uma equação mais complexa, outro problema do processo de Poisson diz respeito ao fato de que os riscos dos saltos não podem ser eliminados através da construção de um portfólio. Tal fato impossibilita a análise por meio de procedimentos tradicionais que dependam de um portfólio livre de risco (e. g., ativos continentais). Todavia, para solucionar esse problema, seguindo a estratégia de diversos trabalhos na literatura, e. g. Merton (1976), aqui se assumirá que ele é

²⁵ Um exemplo é Dias & Rocha (1999).

não-correlacionado com os movimentos do mercado, de forma que será possível construir um portfólio em que o retorno exigido pelo mercado seja igual à taxa livre de risco e com isto aplicar as técnicas de otimização dinâmica sob incerteza.

3.2

Técnicas de otimização dinâmica sob incerteza

Aqui já se disse que o problema das opções reais, sob a ótica matemática, pode ser interpretado como de otimização dinâmica (evolui ao longo do tempo) das flexibilidades gerenciais e sujeito às incertezas de mercado. Na literatura, diversas técnicas matemáticas permitem avaliar as opções reais, dentre as quais se destacariam dois métodos bastante conhecidos e utilizados por Dixit & Pindyck (1994): a programação dinâmica e os ativos contingentes (*contingents claim*). Contudo, como a modelagem da dissertação é desenvolvida por meio do primeiro caso, a fim de ser objetivo, nesta seção, será somente explicado este caso²⁶.

3.2.1

Programação dinâmica

Devido às incertezas do futuro, as empresas possuem um *trade-off* entre a decisão imediata irreversível ou esperar por um momento mais apropriado (minimizando as perdas e/ou potencializando os ganhos). Nas seções anteriores, chegou-se a ressaltar este “conflito” promovido pelo seguinte impasse: a empresa deve desfrutar do mercado imediato (vender o seu produto, por exemplo) ou aguardar mais um pouco e tomar decisões mais concretas com as novas informações.

Inspirada na idéia de *timing* ótimo, a programação dinâmica, com o auxílio da equação de Bellman (equação 3.17), propõe uma ferramenta matemática que possibilita ao agente econômico, para cada cenário, selecionar a melhor decisão. Mediante o procedimento de *backward induction* (de trás para frente), os ganhos da execução imediata de uma decisão (opção) são comparados com uma função relacionada aos resultados das decisões subsequentes. Dessa forma, a ideia do

²⁶ Para mais detalhes acerca dos Contingents Claim ver Dixit & Pindyck (1994).

algoritmo permite que, a cada instante, seja escolhida a estratégia ótima (Dixit & Pindyck, 1994) e se encontre, assim, o valor da oportunidade da opção.

$$F_t(x_t) = \underset{u_t}{\text{máx}} \left\{ \pi_t(x_t, u_t) + (1 + \rho)^{-1} E[F_{t+1}(x_{t+1})] \right\} \quad (3.17)$$

Sendo:

- x_t = variável de estado no instante t – relacionado com o ativo em análise;
- u_t = variável de decisão no instante t – relacionada com o conjunto de decisões a serem tomadas em cada período, por exemplo: abandonar, investir ou continuar;
 - ρ = taxa de desconto (exógena ao projeto);
 - $F_t(x_t)$ = valor da oportunidade/opção de investimento no instante t ;
 - $\Pi_t(x_t, u_t)$ = lucro imediato no instante t , caso não seja mais adiado;
 - $E_t[F_{t+1}(x_{t+1})]$ = fluxos de caixa futuros a partir do instante $t + 1$, do ativo no período t . É por meio deste valor que se contabiliza o valor da continuação.

No caso da decisão binária de exercer uma opção de investir I ou esperar, a equação anterior é simplificada para:

$$F_t(x_t) = \text{máx} \left\{ V_{x_t} - I, (1 + \rho)^{-1} E[\text{máx}\{V_{x_{t+1}} - I, 0\}] \right\} \quad (3.18)$$

Sendo:

- V_{x_t} = benefício recebido em determinado instante por uma variável de estado x_t ;
- I = investimentos/custos necessários para usufruir de um ativo.

No planejamento estratégico de uma empresa, cujo horizonte do tempo de análise seja até o período T , finito, o algoritmo propõe que se inicie pelo último período. Nessa situação, o agente não possui mais a possibilidade de adiar e, logo, restringe-se a duas decisões: investir ou abandonar, tal qual descreve a equação:

$$F_T(x_T) = \max\{V_{x_T} - I, 0\} \quad (3.19)$$

Uma vez calculados todos os valores da opção do último período em todos os cenários, é possível avaliar para o período anterior qual é a decisão ótima: investir ou continuar (esperar). Para cada estado da variável (cenário) de T-1, a decisão de investir ou não é obtido simplesmente através da comparação da expressão $V_{x_{T-1}} - I$ (não adiar) e com o valor esperado dos ganhos futuros da opção futura, já calculados e trazidos para o tempo de análise por meio de uma taxa de desconto ρ .

$$F_{T-1}(x_{T-1}) = \max\left\{V_{x_{T-1}} - I, (1 + \rho)^{-1} E[\max\{V_{x_T} - I, 0\}]\right\} \quad (3.20)$$

Aplicando recursivamente esse algoritmo, até o período inicial, obtém-se o melhor caminho para cada cenário e, ao mesmo tempo, o valor ótimo da opção.

No caso de horizonte de tempo infinito, o tempo deixa de ser variável de estado, dado que a decisão atual é exatamente igual à anterior e, muitas vezes, isso gera uma solução analítica, cujo exemplo pode ser encontrado no apêndice.

3.3

Métodos numéricos baseados em simulação

As opções financeiras ou reais são classificadas de acordo com o seu tempo de exercício. Quando o agente só pode exercer o seu direito na data de expiração, tem-se a opção européia. Dada a sua simplicidade, Black & Scholes (1973) desenvolveram uma solução analítica relativamente simples para a sua precificação. Todavia, quando o agente possui um maior grau de liberdade de escolha (podendo exercê-la em qualquer período até o tempo expiração), a opção recebe o nome de americana. Nesse caso, a análise é mais complexa e ainda não existe uma solução analítica fechada que a precifique no caso de tempo de expiração finito.

No que tange à complexidade natural da opção americana, o modelo utilizado nesta dissertação (Capítulo 5) será composto por uma combinação de processos estocásticos diferentes, nos quais alguns parâmetros e a duração

dependerão de suas interações. Além disso, a fim de uma melhor representação do mundo real, o modelo incluirá a possibilidade de eventos catastróficos e barreiras absorventes; indicando o término do projeto devido a fatos exógenos inesperados e absorção do produto pelo mercado (entrou em equilíbrio), respectivamente.

Conforme observado por Schwartz (2002), métodos tradicionais, como, por exemplo, Método de Diferença Finita²⁷ e Árvore Binomial²⁸, não são adequados para precificar problemas complexos. O caso da árvore binomial somente tem a capacidade de resolver problemas com baixa dimensionalidade, enquanto o método de diferenças finitas não é adequado quando o número de variáveis estocásticas é superior a três. Já o método binomial é particularmente útil quando há interação entre as opções, mas para apenas uma variável estocástica.

Tal dificuldade motivou diversos estudiosos a procurar alternativas. Boyle(1977) propôs a utilização da simulação de Monte-Carlo para precificação das opções européias. A idéia de usar Monte Carlo para opções americanas antes dos anos 1990 era vista de maneira cética, pois muitos pesquisadores não concordaram com a viabilidade da ideia, sobretudo sob o argumento de que a simulação de Monte Carlo não permitia uma regra ótima clara²⁹: enquanto este evolui do início para o fim (*forward*), o de programação dinâmica (seção 3.2.1) é analisado do último período para o primeiro (*backward*). Gerando desta forma uma incompatibilidade na resolução matemática do problema.

Para contornar esse problema, Grant, Vora & Weeks (1996) ofereceram uma metodologia (GVW) que, por meio da análise da curva de gatilho, fosse capaz de precificar a opção americana, suprimindo o conflito anterior. Poucos anos depois, Longstaff & Schwartz (2001) criaram outra, denominada Mínimos Quadrados de Monte Carlo – *Least Square Monte Carlo Method* (LSM). Nesta, a regressão é conciliada com a programação dinâmica.

Na abordagem da aplicabilidade e da flexibilidade das duas metodologias descritas anteriormente, bem como na solução de opções americanas tradicionais ou complexas, Frota (2003) mostrou ser possível obter uma precisão satisfatória. Por meio de simulações, Frota acrescenta que o LSM não somente converge mais rápido para os resultados desejados, mas também, a implementação e

²⁷ Brennan & Schwartz (1977)

²⁸ Cox, Ross e Rubinstein (1979)

²⁹ Até então, a simulação de Monte Carlo era somente utilizada para precificar opções européias, em que a regra é clara na expiração e não precisa trabalhar “*backwards*”.

interpretação dos mesmos são mais simples e intuitivas. Diante da evidente superioridade do LSM sobre o GVW, este trabalho optou por utilizar aquele no lugar deste.

3.3.1

Simulação de Monte Carlo

Desenvolvida por Metropolis & Ulam durante a Segunda Guerra Mundial (o primeiro artigo foi publicado por eles em 1949), a simulação de Monte Carlo foi rapidamente absorvida pelos estudiosos da época por conta de sua fácil implementação e, principalmente, de sua flexibilidade, transparência e eficiência para manusear múltiplas variáveis estocásticas. Outra vantagem do algoritmo é a possibilidade, a critério do operador, de, por meio do aumento do número de simulação (ao custo do aumento do tempo computacional), obter valores mais precisos. Ferramenta bastante poderosa vem permitindo, com a evolução tecnológica, solucionar diversos problemas nas áreas financeira, atuarial, finanças e engenharia, entre outras.

O apreçamento das opções via simulação de Monte Carlo foi desenvolvido por Boyle (1977), que as dividiu em três etapas principais:

- i. Nesta se especificam, por meio de fundamentos econômicos e matemáticos, as distribuições de probabilidade dos processos estocásticos das variáveis de entrada (ativos-base) que melhor descrevem a realidade desejada. Com auxílio dos números pseudo-aleatórios ou quase-aleatórios³⁰, são gerados os possíveis cenários (ex.: realizações do incremento de Wiener) ou a evolução destes ativos-base.
- ii. Para cada cenário gerado, e em obediência à regra de uma opção específica, determina-se o payoff do ativo-base.
- iii. O apreçamento da opção é calculado por meio do cálculo da média dos valores presentes dos valores da opção nos diversos cenários.

De acordo com Frota (2003), a simulação de Monte Carlo permitiu não somente resolver modelos de opções teóricos, mas representar efeitos adicionais importantes que representam o mundo real – *payoffs* complexos, barreiras

³⁰ O sucesso da simulação dependerá diretamente da qualidade dos números aleatórios.

absorventes, incorporar relações (correlação) entre processos estocásticos, incertezas adicionais, etc.

3.3.1.1

Método de Neutralidade ao Risco³¹

Um conceito muito importante que será utilizado ao longo da simulação de Monte Carlo é o método da neutralidade ao risco. Este afirma que ao penalizar o valor esperado futuro de um ativo V pelo seu prêmio de risco é possível utilizar a taxa de desconto livre de risco para calcular, não somente, o valor presente de do ativo V , como também, para qualquer ativo que seja uma função de V , i. e., de qualquer derivativo $F(V)$.

3.3.2

Mínimos Quadrados de Monte Carlo

Inspirada na ideia da programação dinâmica, Longstaff e Schwartz (2001) desenvolveram uma nova metodologia de avaliação (precificação) da opção americana, por meio da simulação de Monte Carlo, denominada Mínimos Quadrados de Monte Carlo (*Least Squares Monte Carlo* ou LSM).

O algoritmo LSM propõe que, inicialmente, sejam gerados todos os caminhos das variáveis de estado por meio da simulação Monte Carlo. Na próxima etapa, é avaliado (definido) o caminho ótimo. Para tal fim, o valor esperado da continuação, trazido para o valor presente em cada data de exercício, é estimado por meio de uma regressão (utilizando-se mínimo quadrado) cujas variáveis descritivas (dependentes) são os ativos ou variáveis de estados geradas na etapa anterior. Assim, quando se compara o valor do exercício imediato com o esperado, em todos os cenários e períodos, é possível tomar a decisão ótima e, com isso, precificar a opção³².

³¹ Fonte: Notas de Aula do material de aula de Análise de Investimentos com Opções Reais do professor Marco Dias da PUC-Rio.

³² Se o valor do exercício imediato for maior do que o valor esperado da continuação, deve-se exercer a opção. Caso contrário, a espera é ótima. Isso é feito até a data inicial, quando finalmente se obtém o valor da opção.

Além de gerar os bons resultados, demonstrados por Frota (2003), o tempo computacional é menor (mais eficiente) do que o de outras metodologias, devido a dois motivos principais:

- Os coeficientes estimados da regressão, em um determinado período, por exemplo, $t=3$, para um determinado caminho, são reaproveitados em caminhos diferentes, porém no mesmo período, $t=3$;
- Inclui somente os caminhos onde a opção está *in-the-money*³³.

Para melhor esclarecer a metodologia, Longstaff & Schwartz (2001) abordaram um exemplo bastante simples de uma ação que não paga dividendos, cujo valor inicial é 1 e seu proprietário possui um direito devido à opção de venda americana com preço de exercício de 1,10 e 3 tempos de exercício. Os autores citados supõem que, a fim de explicar a evolução desse ativo, é suficiente simular 8 caminhos e a taxa de desconto livre de risco utilizada foi de 6%.³⁴

Como primeiro passo, Longstaff & Schwartz (2001) fizeram a simulação, por Monte Carlo, dos possíveis cenários, descritos na tabela 2.

Tabela 2: Matriz simulação (LSM)

Caminho	Período			
	0	1	2	3
1	1,00	1,09	1,08	1,34
2	1,00	1,16	1,26	1,54
3	1,00	1,22	1,07	1,03
4	1,00	0,93	0,97	0,92
5	1,00	1,11	1,56	1,52
6	1,00	0,76	0,77	0,90
7	1,00	0,92	0,84	1,01
8	1,00	0,88	1,22	1,34

Seguindo a programação dinâmica e supondo que, até o terceiro período, em nenhum momento anterior foi ótimo exercer a opção de venda, abordar-se-á o último período. Nesse caso, só existem duas alternativas: abandonar (para valores de preço de exercício menores do que o valor do ativo) ou executar a opção, o que

³³ Uma opção está *in-the-money* quando o exercício imediato gera valores positivos para o seu detentor (embora possa ser mais valioso a espera). Tal procedimento é vantajoso porque retira-se da análise as situações trivialmente não ótimas, isto é, se no tempo atual da análise o valor da opção de venda não é ótimo e, em algum momento no futuro, existe a possibilidade de ganho, é intuitivo que o caminho ótimo está no futuro.

³⁴ Os títulos das tabelas utilizados na atual dissertação são um pouco diferentes da utilizada Longstaff e Schwartz (2001) a fim de deixar a explicação mais simples.

levará ao fluxo de caixa do terceiro período. Isto é, para o caminho 3 o cálculo da opção de venda seria:

$$\text{máx} \{K - V, 0\} \quad (3.21)$$

Sendo:

- K = preço de exercício;
- V = valor do ativo.

Substituindo, por exemplo, o valor do terceiro caminho da tabela 2 na equação 3.21, obtém-se:

$$\begin{aligned} &\text{máx} \{1.1 - 1.03, 0\} \\ &\text{máx} \{0.07, 0\} = 0.07 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Aplicando esse cálculo para todos os caminhos é obtido a tabela 3.

Tabela 3: Fluxo de caixa ótimo em t=3
Fluxo de Caixa Ótimo em t =3

Caminho	1	2	3
1	-	-	0,00
2	-	-	0,00
3	-	-	0,07
4	-	-	0,18
5	-	-	0,00
6	-	-	0,20
7	-	-	0,09
8	-	-	0,00

A análise da tabela mostra que a opção de venda será exercida nos caminhos 3, 4, 6 e 7.

Dado que já se conhece os valores ótimos do último período, seguindo a filosofia de *backward* (da programação dinâmica), a próxima etapa é analisar considerando também o período anterior (o segundo tempo).

A fim de diminuir o tempo computacional, o primeiro procedimento a ser tomado nesta nova etapa é excluir da análise os caminhos que não geram as

opções *in-the-money* no segundo período. Para isso, basta verificar se o preço de exercício é menor do que o valor do ativo gerado, em cada caminho (tabela 4).

Tabela 4: Período 2 *In-the-money*

Caminho	Antes			<i>In-the-money</i>		
	1	2	3	1	2	3
1	-	1,08	0,00	-	1,08	0,00
2	-	1,26	0,00	-	-	-
3	-	1,07	0,07	-	1,07	0,07
4	-	0,97	0,18	-	0,97	0,18
5	-	1,56	0,00	-	-	-
6	-	0,77	0,20	-	0,77	0,20
7	-	0,84	0,09	-	0,84	0,09
8	-	1,22	0,00	-	-	-

Para cada caminho (*in-the-money*), deve-se decidir entre o exercício imediato da opção (no segundo período) ou o adiamento da ação (exercer a opção no terceiro período). Para isto, Longstaff & Schwartz (2001) propõem:

- 1º Passo) Estimar a equação, que possibilitará a obtenção do valor da continuação, $E[Y / X]$, por meio de uma regressão cuja variável dependente é o valor fluxo de caixa futuro trazido ao valor presente, pela taxa de desconto livre de risco de 6%, representado pelo vetor Y, em função de uma equação do segundo grau dos preços da ação no instante 2, como descrito pela equação 3.23.

$$\begin{aligned} (X_{t=3}) \times e^{-0,06} &= \beta_0 + \beta_1 X_{t=2} + \beta_2 X_{t=2}^2 \\ Y &= \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Os dados utilizados nesta etapa são descritos na tabela 5:

Tabela 5: Regressão segundo período

Caminho	Regressão tempo = 2	
	Y	X
1	0,00x0,94176 ³⁵	1,08
2	-	-
3	0,07x0,94176	1,07
4	0,18x0,94176	0,97
val5	-	-
6	0,20x0,94176	0,77
7	0,09x0,94176	0,84
8	-	-

Após aplicar o critério de mínimos quadrados, encontra-se a equação:

$$E[Y / X] = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X + \hat{\beta}_2 X^2 \quad (3.24)$$

Para o exemplo dado em Longstaff & Schwartz (2001) os valores obtidos foram:

$$E[Y / X] = -1,070 + 2,983 \times X - 1,813 \times X^2 \quad (3.25)$$

- 2º Passo) Para cada caminho, no segundo período, fazer a previsão do valor de continuação por meio da substituição do valor do ativo correspondente na equação 3.23.

Por exemplo, para o primeiro caminho, o valor da continuação será:

$$E[Y / 1,08] = -1,070 + 2,983 \times 1,08 - 1,813 \times 1,08^2 = 0,037 \quad (3.26)$$

Procedendo para todos os outros caminhos, segue a tabela 6 de “continuação *versus* exercício imediato”.

³⁵ 0,94176 = exp(-0,06).

Tabela 6: Exercício ótimo no segundo período

Caminho	Exercício Ótimo $t = 2$	
	Exercício	Continuação
1	0,02	0,037
2	-	-
3	0,03	0,046
4	0,13	0,118
5	-	-
6	0,33	0,152
7	0,26	0,157
8	-	-

- 3º Passo) Escolher o procedimento (exercício ou continuação) que possibilita maiores ganhos, em cada caminho.

A comparação dos valores da tabela anterior sugere que será ótimo adiar no primeiro e terceiro caminho e exercer a opção no quarto, sexto e sétimo, no segundo período.

Observe-se que, quando for mais vantajoso exercer a opção, isso estará indicando que não existirá a opção no próximo período e, dessa forma, o fluxo de caixa no próximo instante será igual a zero. Dessa análise, advém a tabela 7:

Tabela 7: Fluxo de caixa em $t = 2$

Caminho	Fluxo de Caixa Ótimo em $t = 2$		
	Período		
	1	2	3
1	-	0,00	0,00
2	-	0,00	0,00
3	-	0,00	0,07
4	-	0,13	0,00
5	-	0,00	0,00
6	-	0,33	0,00
7	-	0,26	0,00
8	-	0,00	0,00

Finalmente, para o primeiro instante, mesmo parecendo um pouco complicado (devido ao maior número de períodos futuros), os procedimentos são praticamente os mesmos feitos no segundo.

A primeira etapa é eliminar as ações que não estão *in-the-money*, exposto na tabela 8.

Tabela 8: Período 1 *In-the-money*

Caminho	Antes			<i>In-The-Money</i>		
	1	2	3	1	2	3
1	1,09	0,00	0,00	1,09	0,00	0,00
2	1,16	0,00	0,00	-	-	-
3	1,22	0,00	0,07	-	-	-
4	0,93	0,13	0,00	0,93	0,13	0,00
5	1,11	0,00	0,00	-	-	-
6	0,76	0,33	0,00	0,76	0,33	0,00
7	0,92	0,26	0,00	0,92	0,26	0,00
8	0,88	0,00	0,00	0,88	0,00	0,00

Estabelecidos os caminhos viáveis, o próximo passo é decidir entre o exercício imediato ou o adiamento. Portanto, novamente, se recorre à regressão - dos fluxos de caixa futuros ótimos³⁶, trazidos ao valor presente, pela taxa de desconto de 6%, representado pelo vetor Y, em função dos preços da ação no instante 1, representado pelo vetor X. Tais informações são resumidas na tabela 9.

Tabela 9: Regressão primeiro período

Caminho	Regressão tempo = 1	
	Y	X
1	0,00x0,94176	1,09
2	-	-
3	-	-
4	0,13x0,94176	0,93
5	-	-
6	0,33x0,94176	0,76
7	0,26x0,94176	0,92
8	0,00x0,94176	0,88

Aplicando-se o critério de mínimos quadrados, chegou-se à equação:

$$E[Y / X] = 2,038 - 3,335 \times X + 1,356 \times X^2 \quad (3.27)$$

³⁶ Aqui são trazidos somente os períodos onde foi ótimo exercer a opção: se, no segundo período, foi ótimo adiar, o valor que será trazido para o instante inicial será o fluxo de caixa do terceiro período. O exemplo de Longstaff & Schwartz (2001) foi exposto a situações mais simples e somente regrediu o segundo período.

Substituídos todos os X's na equação anterior, os valores esperados de continuação serão encontrados e, por meio da comparação com o exercício imediato, será sabida qual decisão gerará um maior ganho, resumido na tabela 10.

Tabela 10: Exercício ótimo no primeiro período

Caminho	Exercício Ótimo t = 1	
	Exercício	Continuação
1	0,01	0,014
2	-	-
3	-	-
4	0,17	0,109
5	-	-
6	0,34	0,287
7	0,18	0,118
8	0,22	0,153

Comparando os valores da tabela anterior, percebe-se que é preferível, no período 1, adiar no primeiro caminho e exercer a opção no quarto, sexto, sétimo e oitavo caminho.

Todas as informações desta análise encontram-se resumidas na tabela 11. Para precificar a opção, basta descontar os valores não nulos para o instante inicial e tirar média em relação ao número de caminhos realizados.

Tabela 11: Fluxo de caixa ótimo em t = 1

Caminho	Fluxo de Caixa Ótimo em t = 1		
	Período		
	1	2	3
1	0,00	0,00	0,00
2	0,00	0,00	0,00
3	0,00	0,00	0,07
4	0,17	0,00	0,00
5	0,00	0,00	0,00
6	0,34	0,00	0,00
7	0,18	0,00	0,00
8	0,22	0,00	0,00

Mesmo sendo um valor provavelmente impreciso (devido ao baixo número de simulações e tempos de exercício), Longstaff & Schwartz (2001), a título de ilustração, encontraram de forma simples e intuitiva o valor de 0,1144 para a opção de venda, conforme abaixo se calcula:

$$\text{Valor da opção} = \left(\frac{0,17+0,34+0,18+0,22+0,07 \times \exp(-0,06)^2}{8} \right) \times \exp(-0,06) = 0,1144 \quad (3.28)$$

3.3.2.1

Análise da sensibilidade dos parâmetros do LSM

Diversos trabalhos acadêmicos³⁷ têm demonstrado que, por meio de procedimentos matemáticos, e.g. análise de sensibilidade, a eficiência e a acurácia do LSM dependem de três principais fatores: função base da regressão, número de datas de exercício e da simulação (do número de realizações e de como são gerados os números aleatórios). Nesta seção, será feita uma pequena revisão desses pontos.

3.3.2.1.1

Função base da regressão

O primeiro ponto, fundamental, é a determinação de uma função base da regressão que permita fazer uma boa previsão do valor continuação³⁸ (valor da espera). Sem ela, de nada valerão as informações dos ativos para a tomada de decisão ótima, tornando o LSM obsoleto.

Segundo Longstaff e Schwartz (2001), esta função poderia ser expressa em diversos formatos (Fourier, séries trigonométricas e polinômios). Porém, por conveniência, eles optaram pelo formato de regressão polinomial, que igualmente gera bons resultados.

Assim, a solução restringe-se a escolher como utilizar as variáveis de estado na regressão, i.e., determinar qual grau deve ter a regressão (incluindo a possibilidade dos termos cruzados). Nascimento (2005) explica que:

“Embora os autores [Longstaff & Schwartz (2001)] não estabeleçam uma regra clara para a determinação da quantidade ideal de [variáveis de estado para] funções base, seus resultados numéricos sugerem que este número esteja relacionado ao número de variáveis de estado do problema analisado.” (pág. 42).

³⁷ Por exemplo: Araujo (2004), Frota (2003) e Nascimento (2005).

³⁸ O valor obtido caso um determinado agente opte em aplicar somente no futuro.

A relação, mencionada na afirmação anterior, está ligada não somente ao grau do polinômio de cada variável, mas também à interação entre eles. Por exemplo, supondo-se que se deseje tomar o ativo desejado como Z e que se pretenda descrever tais variáveis por meio de duas outras de estado X e Y , pode ser ótimo que Z seja descrito por:

$$Z = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \beta_3 Y + \beta_4 Y^2 + \beta_5 XY \quad (3.29)$$

Tal observação pode levar a concluir que o grau de complexidade da função base cresce exponencialmente com o aumento das variáveis de estados descritivas.

Contudo, em Araujo (2004) e Frota (2003), para avaliar a contribuição do aumento do grau do polinômio da função base (utilizando-se o método binomial como referência), foi aplicado o LSM a fim de precificar uma opção americana de venda de um ativo que não pague dividendos sobre os mais diversos graus de polinômios da regressão. Tais autores não conseguem identificar o aumento da precisão com o aumento dos graus dos polinômios. Ao contrário, em algumas situações, a partir de determinado grau, ocorreu um aumento no erro relativo e desvio-padrão.

Tal resultado já era esperado sob a ótica da Econometria, devido ao efeito da multicolineariedade; ou seja, à medida que se põem mais variáveis, aumenta também a capacidade dessas variáveis em explicar os efeitos das outras variáveis (até aquelas que não foram escolhidas). Ao incluir uma variável que já está “sendo utilizada” indiretamente, a estimação poderá vir a ser corrompida. Soma-se a isso o critério da parcimônia, em que se afirma que os melhores modelos são aqueles com o menor número possível de variáveis e que conseguem, assim, descrever bem a variável desejada.

3.3.2.1.2

Número de datas de exercício

Teoricamente, o agente econômico que possui uma opção americana pode exercer o seu direito em qualquer momento até a data do exercício. Contudo, como existem diversos fatores a serem analisados (orçamentários e estratégicos), as

empresas tomam as suas decisões em intervalos “não tão contínuos”. Além disso, o modelo teórico é muito complexo e ser fiel a ele não necessariamente possibilitará ganhos muito superiores do que o aproximado.

Consoante com Frota (2003), nessa dissertação a opção será aproximado por uma opção Bermuda³⁹ com o número de datas suficientemente grande.

Para analisar a influência do número de datas de exercício no LSM, Nascimento (2005) fez uma análise de sensibilidade deste parâmetro sobre a precificação (deixando todos os outros parâmetros fixos) de uma opção americana de venda. Os resultados resumem-se na figura 4, a seguir:

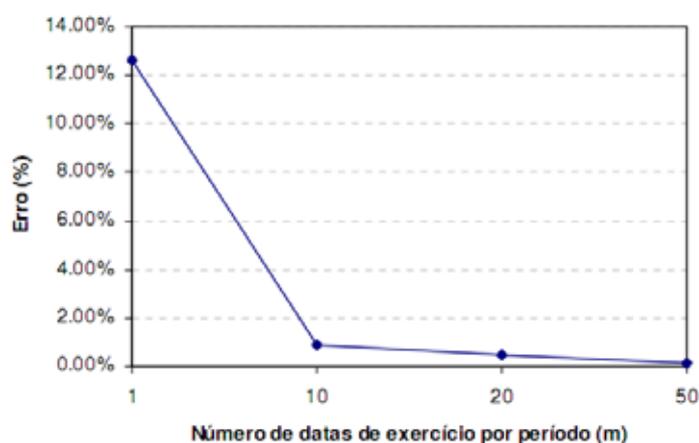


Figura 4: Análise de sensibilidade – datas de exercício⁴⁰

Pela avaliação anterior percebe-se que o número de datas de exercício é fator fundamental para a acurácia do modelo: à medida que aumenta, melhor a descrição do problema. Contudo, o ganho marginal entre períodos diminui gradativamente, ao ponto que existe uma situação que computacionalmente não é vantajoso incluir novos períodos. Daí ser bastante aceitável a aproximação por opções Bermuda com poucas datas de exercício.

Longstaff & Schwartz (2001) não afirmam qual é o número ideal de datas de exercícios, mas dão a entender que ele é um fator muito importante para o LSM.

³⁹ Tradicionalmente as opções Americanas podem ser exercidas continuamente em qualquer período. Contudo, tal fato, computacionalmente, é impraticável. Devido a isso, para contornar esse detalhe, o exercício é somente avaliado em tempos discretos, denominado opções bermuda.

⁴⁰ FONTE: Nascimento, 2005.

3.3.2.1.3

Simulação

A forma com que são gerados os caminhos relacionados com as variáveis de estado é o pilar de qualquer método numérico de simulação (inclusive o LSM). É por meio dessas trilhas que são desenvolvidas as metodologias, as regras de avaliação e os resultados.

Mesmo que se consiga obter um modelo matemático fiel à realidade para realizar uma análise coerente, é necessário – conforme Frota (2003) – um número razoável de simulações que caracterizem a movimento global do ativo (distribuição de probabilidade).

Existem diversas técnicas de geração de números com menor discrepância que acelera a convergência (Simulação de Quase-Monte Carlo tradicional e Híbrida). Contudo, não será o escopo desta dissertação, embora venha a abordar esse detalhe. A quem interessar, há que se tomar cuidado com o fator dimensionalidade. No caso da dissertação, existe um grande número de períodos possíveis para tomar decisões para opção e a dimensionalidade do problema aqui abordado é considerada alta. Por isso, Frota (2003) defende que a discrepância dos resultados obtidos pela simulação Quase-Monte Carlo são maiores do que a de Monte-Carlo. Uma alternativa, segundo o autor, é a utilização de geração de números quase-aleatórios híbridos.