

## 5 Modelos em espaço de estado

### 5.1. O modelo em espaço de estado linear e o filtro de Kalman

Este capítulo irá abordar a estimação da reserva IBNR via modelos em espaço de estado. Mas primeiramente, faz-se necessária a apresentação da seguinte definição:

**Definição:** Um processo estocástico  $p$ -variado e observável  $Y_t$ ,  $t = 1, 2, 3, \dots$ , segue um modelo em espaço de estado (EE) linear se, e somente se, existem duas equações, uma das medidas e outra do estado, dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} Y_t &= Z_t \alpha_t + d_t + \varepsilon_t, & \varepsilon_t &\sim WN(0, H_t) \\ \alpha_{t+1} &= T_t \alpha_t + c_t + R_t \eta_t, & \eta_t &\sim WN(0, Q_t). \end{aligned} \quad (19)$$

As quantidades  $Z_t$ ,  $d_t$ ,  $H_t$ ,  $T_t$ ,  $C_t$ ,  $R_t$  e  $Q_t$  são as chamadas matrizes do sistema. O processo estocástico  $m$ -variado e não observável  $\alpha_t$  é chamado de vetor de estado, e é tal que  $E(\alpha_1) = a_1$  e  $Var(\alpha_1) = P_1$ .

O modelo apresentado em (19) é chamado de modelo em *espaço de estado Gaussiano* (cf. Harvey, 1989; e Durbin e Koopman, 2001) quando o vetor de estado  $\alpha_1$  tem distribuição Gaussiana e é independente de  $(\varepsilon_t', \eta_t')$  e

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \eta_t \end{bmatrix} \sim NID \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} H_t & 0 \\ 0 & Q_t \end{bmatrix} \right).$$

De agora em diante, supõe-se que o modelo (19) é Gaussiano. Para obtenção de estimadores ótimos globais do vetor de estado em todo instante de tempo, será

utilizado o *filtro de Kalman*, cujas expressões estão apresentadas adiante. Porém, é necessário estabelecer inicialmente a notação que será adotada.

- $n$  é o número de posições (células) do triângulo (ou seja, valores observados e valores ausentes);
- $\mathfrak{F}_j$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada pelas medidas até o instante  $j$ ;
- $\hat{\alpha}_{t|j} \equiv E(\alpha_t | \mathfrak{F}_j)$
- $P_{t|j} \equiv E[(\alpha_t - \hat{\alpha}_{t|j})(\alpha_t - \hat{\alpha}_{t|j})' | \mathfrak{F}_j]$
- $v_t \equiv Y_t - E(Y_t | \mathfrak{F}_{t-1})$
- $F_t \equiv Var(v_t | \mathfrak{F}_{t-1})$ .

Sob a notação acima, as recursões de Kalman podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{t+1|t} &= T_t \hat{\alpha}_t + c_t \\ P_{t+1|t} &= T_t P_{t|t} T_t' + R_t Q_t R_t'\end{aligned}\quad (20)$$

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{t|t} &= \hat{\alpha}_{t|t-1} + P_{t|t-1} Z_t' F_t^{-1} v_t \\ P_{t|t} &= P_{t|t-1} - P_{t|t-1} Z_t' F_t^{-1} Z_t P_{t|t-1}\end{aligned}\quad (21)$$

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{t|n} &= \hat{\alpha}_{t|t-1} + P_{t|t-1} r_{t-1} \\ r_{t-1} &= Z_t' F_t^{-1} v_t + L_t' r_t \\ V_t &= P_t - P_t N_{t-1} P_t' \\ N_{t-1} &= Z_t' F_t^{-1} Z_t + L_t' N_t L_t,\end{aligned}\quad (22)$$

sendo que  $L_t = T_t - T_t P_t Z_t' F_t^{-1} Z_t$ ,  $r_n = 0$  e  $N_n = 0$ . As equações em (20) são denominadas *equações de previsão* enquanto que as em (21) são chamadas de *equação de atualização* e as apresentadas em (22) são as *equações de suavização*. Observe que, sob esta notação, as inovações e sua variância condicional podem ser obtidas da forma

$$\begin{aligned}v_t &= Y_t - Z_t \hat{\alpha}_{t|t-1} - d_t \\F_t &= Z_t P_{t|t-1} Z_t' + H_t.\end{aligned}$$

O pressuposto de que o modelo é Gaussiano não necessariamente traduz-se como uma perda de generalidade, posto que, fora de normalidade, expressões do filtro, preditor e suavizador de Kalman representam estimadores *lineares* ótimos e correspondentes matrizes de EQM (cf. Brockwell e Davis, 2002; e Shumway e Stoffer, 2006).

A utilização das recursões de Kalman requer o conhecimento da esperança e da variância do vetor de estado em  $t = 1$ . Para séries não-estacionárias, não é evidente a obtenção de tais momentos de 1ª e 2ª ordens, o que exige uma extensão da teoria até então apresentada que contemple esta dificuldade. Considere, então, o seguinte *modelo geral* para o vetor de estado inicial:

$$\alpha_1 = a + A\delta + R_0\eta_0, \quad \eta_0 \sim (0, Q_0), \quad (23)$$

no qual  $a$  é vetor  $m \times 1$  de constantes,  $\delta$  é vetor  $q \times 1$  não-observável e tal que  $E(\delta) = 0$ ,  $\text{Var}(\delta) = \kappa I$  e  $E(\delta\eta_0') = 0$ . A matriz  $A$  é a matriz de seleção do vetor de estado relacionada às componentes não-estacionárias do vetor de estado, enquanto que a matriz  $R_0$  é a matriz de seleção das componentes estacionárias. Finalmente, assume-se que  $Q_0 > 0$ .

Duas das possíveis abordagens que foram desenvolvidas para inicialização do filtro de Kalman, na tentativa de representar a falta de informação em relação aos dois primeiros momentos do vetor de estado, serão aqui consideradas: a *abordagem big kappa* e o *filtro de Kalman inicial exato*.

A abordagem *big kappa*, apresentada por Harvey e Phillips (1979), baseia-se em atribuir um valor arbitrariamente alto para  $\kappa$ , relativo à variância de  $\delta$  na expressão (23), para representar a ignorância existente do pesquisador quanto ao real valor da variância do vetor de estado. Apesar de fácil implementação, esta abordagem geralmente mostra-se bastante instável para diferentes valores de  $\kappa$ , gerando possivelmente problemas numéricos quando implementado o algoritmo. Ademais, não se sabe ao certo o momento de estabilização das recursões de

Kalman, a partir do qual os estimadores utilizando a inicialização difusa do filtro são iguais aos obtidos utilizando o filtro de Kalman apresentado em (20) e (21).

O filtro de Kalman inicial exato (cf. Koopman, 1997; Durbin e Koopman, 2001, cap. 5; e Koopman e Durbin, 2003) consiste em uma solução baseada em escrever as equações (20), (21) e (22), como funções suaves de  $\kappa$ , aproximá-las por fórmulas de Maclaurin e fazer  $\kappa \rightarrow +\infty$ . As recursões obtidas nesta abordagem são:

$$\begin{aligned}
 F_{\infty,t} &= Z_t P_{\infty,t} Z_t' & F_{*,t} &= Z_t P_{*,t} Z_t' + H_t \\
 F_t^{(1)} &= F_{\infty,t}^{-1} & F_t^{(2)} &= -F_{\infty,t}^{-1} F_{*,t} F_{\infty,t}^{-1} \\
 M_{*,t} &= P_{*,t} Z_t' & M_{\infty,t} &= P_{\infty,t} Z_t' \\
 K_t^{(0)} &= T_t M_{\infty,t} F_t^{(1)} & K_t^{(1)} &= T_t M_{\infty,t} F_t^{(2)} + T_t M_{*,t} F_t^{(1)} \\
 L_t^{(0)} &= T_t - K_t^{(0)} Z_t' & L_t^{(1)} &= -K_t^{(1)} Z_t' \\
 \nu_t^{(0)} &= Y_t - Z_t \hat{\alpha}_t^{(0)} - d_t \\
 \hat{\alpha}_{t+1}^{(0)} &= T_t \hat{\alpha}_t^{(0)} + K_t^{(0)} \nu_t^{(0)} + c_t \\
 P_{\infty,t+1} &= T_t P_{\infty,t} L_t^{(0)'} & P_{*,t+1} &= T_t P_{\infty,t} L_t^{(1)'} + T_t P_{*,t} L_t^{(0)'} + R_t Q_t R_t' \\
 \hat{\alpha}_1^{(0)} &= a \\
 P_{\infty,1} &= A A' \\
 P_{*,1} &= R_0 Q_0 R_0'
 \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
 r_{t-1}^{(0)} &= L_t^{(0)'} r_t^{(0)} \\
 r_{t-1}^{(1)} &= Z_t' F_t^{(1)} \nu_t^{(0)} + L_t^{(0)'} r_t^{(1)} + L_t^{(1)'} r_t^{(0)} \\
 N_{t-1}^{(0)} &= L_t^{(0)'} N_t^{(0)} L_t^{(0)} \\
 N_{t-1}^{(1)} &= Z_t' F_t^{(1)} Z_t + L_t^{(0)'} N_t^{(1)} L_t^{(0)} + L_t^{(1)'} N_t^{(0)} L_t^{(0)} + L_t^{(0)'} N_t^{(0)} L_t^{(1)} \\
 N_{t-1}^{(2)} &= Z_t' F_t^{(2)} Z_t + L_t^{(0)'} N_t^{(2)} L_t^{(0)} + L_t^{(0)'} N_t^{(1)} L_t^{(1)} \\
 &+ L_t^{(1)'} N_t^{(0)} L_t^{(1)} + L_t^{(1)'} N_t^{(1)} L_t^{(0)} \\
 \hat{\alpha}_{t|n} &= \hat{\alpha}_t^{(0)} + P_{*,t} r_{t-1}^0 + P_{\infty,t} r_{t-1}^{(1)} \\
 \hat{P}_{t|n} &= P_{*,t} - P_{*,t} N_{t-1}^{(0)} P_{*,t} - P_{*,t} N_{t-1}^{(1)} P_{\infty,t} - P_{\infty,t} N_{t-1}^{(1)} P_{*,t} - P_{\infty,t} N_{t-1}^{(2)} P_{\infty,t} \\
 r_d^{(0)} &= r_d \\
 N_d^{(0)} &= N_d \\
 r_d^{(1)} &= 0 \\
 N_d^{(1)} &= N_d^{(2)} = 0
 \end{aligned} \tag{25}$$

As equações em (24) representam as recursões do *filtro de Kalman inicial exato* (FKIE) e, as equações em (25), as do *suavizador de Kalman inicial exato* (SKIE). Essas são derivadas sob a hipótese de que  $F_{\infty,t} > 0$ . No entanto, observa-se que, em alguns instantes iniciais de tempo  $t$  – ainda no trecho em que o efeito de se fazer  $\kappa \rightarrow +\infty$  ainda se faz presente –, esta matriz pode se anular. Em tais casos, obtém-se equações mais simplificadas das que as apresentadas em (24) e (25) e, uma vez implementadas, espera-se que diminuam significativamente o tempo de execução do programa. Essas expressões simplificadas, para os casos respectivos do FKIE e SKIE, encontram-se abaixo:

$$\begin{aligned}
 M_{*,t} &= P_{*,t} Z_t', \\
 K_t^{(0)} &= T_t M_{*,t} F_{*,t}^{-1}, \\
 L_t^{(0)} &= T_t - K_t^{(0)} Z_t', \\
 v_t^{(0)} &= Y_t - Z_t \hat{\alpha}_t^{(0)} - d_t, \\
 \hat{\alpha}_{t+1}^{(0)} &= T_t \hat{\alpha}_t^{(0)} + K_t^{(0)} v_t^{(0)} + c_t, \\
 P_{*,t+1} &= T_t P_{*,t} L_t^{(0)'} + R_t Q_t R_t', \\
 P_{\infty,t+1} &= T_t P_{\infty,t} T_t';
 \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
 r_{t-1}^{(0)} &= Z_t F_{*,t}^{-1} v_t^{(0)} + L_t^{(0)'} r_t^{(0)} \\
 r_{t-1}^{(1)} &= T_t' r_t^{(1)} \\
 N_{t-1}^{(0)} &= Z_t' F_{*,t}^{-1} Z_t + L_t^{(0)'} N_t^{(0)} L_t^{(0)} \\
 N_{t-1}^{(1)} &= L_t^{(0)'} N_t^{(1)} L_t^{(0)} \\
 N_{t-1}^{(2)} &= T_t' N_t^{(2)} T_t
 \end{aligned} \tag{27}$$

O problema mencionado em relação à estabilização na abordagem *big kappa* é facilmente resolvido sob inicialização difusa exata, dado que esta ocorrerá quando  $P_{\infty,t}$  assumir zero. O momento imediatamente antes de  $P_{\infty,t}$  se anular será denotado por  $d$ . A existência teórica de tal limiar é demonstrada por Koopman (1997).

Para utilização do das recursões apresentadas em (24), (25), (26) e (27), é necessário o conhecimento das matrizes do sistema que estão em função de parâmetros desconhecidos. Denote-se por  $\psi$  o vetor que contém tais parâmetros. A estimação deste é feita por *máxima verossimilhança*. Para os casos em que a

inicialização é não-difusa, a função de verossimilhança, já se tomando seu logaritmo, é dada por:

$$\log L(\psi) = l(\psi) \propto \sum_{t=1}^n \left[ \log |F_t| + \nu_t' F_t^{-1} \nu_t \right], \quad (28)$$

uma vez que  $Y_t \sim N(Z_t \hat{\alpha}_{t|t-1} + d_t, Z_t P_{t|t-1} Z_t' + H_t)$ . Observe-se que (28) depende diretamente apenas de  $\nu_t = \nu_t(\psi)$  e  $F_t = F_t(\psi)$ , sugerindo que a mesma seja, muitas vezes, chamada de *decomposição da verossimilhança pelo erro de predição* (cf. Harvey, 1989, seção 3.4; e Durbin e Koopman, 2001, seção 7.2).

Reconhecendo que as recursões de Kalman assumem formatos modificados para  $t < d$  para os casos de inicialização difusa – cf. (24) e (25) –, a função de verossimilhança conseqüentemente sofrerá mudanças. Tendo em mente que, em geral,  $\nu_t^{(0)} = \nu_t^{(0)}(\psi)$ ,  $F_{*,t} = F_{*,t}(\psi)$  e  $F_{\infty,t} = F_{\infty,t}(\psi)$ , a função de *log-verossimilhança difusa* (conforme demonstrado em Durbin e Koopman, 2001, seção 7.2) é dada por:

$$l(\psi) = -\frac{np}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^d w_t - \frac{1}{2} \sum_{t=d+1}^n (\log |F_t| + \nu_t' F_t^{-1} \nu_t). \quad (29)$$

na qual

$$w_t = \begin{cases} \log |F_{\infty,t}|, & \text{se } F_{\infty,t} > 0 \\ \log |F_{*,t}| + \nu_t^{(0)'} F_{*,t}^{-1} \nu_t^{(0)}, & \text{se } F_{\infty,t} = 0 \end{cases}$$

Maximizações tanto de (28) quanto de (29) exigem métodos numéricos, dado que estas são funções não-lineares dos parâmetros desconhecidos. Também, menciona-se que a dificuldade da otimização pode aumentar consideravelmente nos casos em que valores ausentes são proeminentes.

## 5.2.

### O método do acumulador

O *método do acumulador* foi proposto por Atherino et al. (2010) e consiste em acrescentar coordenadas ao vetor de estado, as quais têm como função acumular os *sinais*  $Z_t \alpha_t$  associados a instantes de tempo específicos. No contexto

do triângulo, sob a ordenação por linhas proposta na seção 2.4, uma dessas adicionais coordenadas serviria para somar (os sinais dos) valores ausentes que correspondam a um dado tipo de reserva, dentre aqueles discutidos na seção 2.5.

Nos termos de um modelo em espaço de estado genérico, mas pensando em um único acumulador, a extensão proposta seria

$$\begin{aligned}
 Y_t &= \begin{bmatrix} Z_t & 0 \\ & \gamma_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_t \\ \gamma_t \end{bmatrix} + d_t + \varepsilon_t \\
 \begin{bmatrix} \alpha_{t+1} \\ \gamma_{t+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} T_t & 0 \\ X_t & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_t \\ \gamma_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_t \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_t \\ 0 \end{bmatrix} \eta_t, \\
 X_t &= \begin{cases} Z_t & \text{se } t \notin \Phi \\ 0, & \text{se } t \in \Phi \end{cases}
 \end{aligned} \tag{30}$$

na qual  $\Phi$  representa o conjunto de índices para os quais é de interesse acumular os sinais, e  $\gamma_1 \equiv 0$ .

A formulação apresentada em (30) contempla os casos os quais se obtém apenas um único acumulador. Porém, pode ser de interesse a obtenção de um número maior de acumuladores em um único processo de utilização do FKIE. A partir deste ponto da Dissertação, e pensando já em um modelo univariado a ser estimado com os dados do triângulo ordenados por linha, o vetor de acumuladores para cada uma das reservas discutidas na seção 2.5 é dado por

$$\gamma_t = \begin{bmatrix} \gamma_t^{(1)} \\ \gamma_t^{(2)} \\ \gamma_t^{(3)} \\ \vdots \\ \gamma_t^{(J)} \\ \gamma_t^{(T)} \\ \gamma_t^{(d)} \end{bmatrix},$$

no qual  $\gamma_t^{(i)}$  representa o acumulador da  $i$ -ésima linha,  $i = 1, \dots, J$ , e  $\gamma_t^{(T)}$  e  $\gamma_t^{(d)}$  representam os acumuladores para todos os valores ausentes e por ano de calendário, respectivamente. Define-se também  $X_t = (X_t^{(1)}, X_t^{(2)}, \dots, X_t^{(T)}, X_t^{(d)})'$ , tal que

$$X_t^{(i)} = \begin{cases} Z_t, & t \notin \Gamma \text{ e } t \in \{s : s \text{ é índice da } i\text{-ésima linha}\}, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$X_t^{(T)} = \begin{cases} Z_t, & t \notin \Gamma, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e

$$X_t^{(d)} = \begin{cases} Z_t, & t \notin \Gamma \text{ e } t \in \{s : s \text{ pertence à linha } i \text{ e à coluna } J+1-i, i=1,2,\dots,J+1\} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

Uma das vantagens do método do acumulador é a relativa facilidade de se obterem estimativas das reservas desejadas e seus respectivos EQMs teóricos, utilizando as recursões de Kalman apenas uma única vez. Abaixo, apresentam-se os estimadores para o caso da reserva total que são obtidos utilizando-se o método do acumulador:

$$IB\hat{N}R \equiv E(\gamma_{j^2+1}^{(T)} | \tilde{\mathfrak{F}}) + \sum_{t \notin \Gamma} d_t, \quad (31)$$

$$Var(IB\hat{N}R) \equiv Var(\gamma_{j^2+1}^{(T)} | \tilde{\mathfrak{F}}) + \sum_{t \notin \Gamma} H_t, \quad (32)$$

nos quais  $\tilde{\mathfrak{F}}$  representa a  $\sigma$ -álgebra gerada pelas observações não-ausentes da série formada pela nova ordenação dos dados, ou seja, formada pelas observações conforme mostrado na Figura 9.

É de interesse que o modelo (30) – ou extensões do mesmo que compreendam diversos acumuladores – seja tal que não comprometa a estimação dos parâmetros desconhecidos, os quais são os mesmos que os associados à representação em EE original dada em (19). Na realidade, tal propriedade, de utilidade prática, já havia sido perseguida – e alcançada – por Atherino et al. (2010) no âmbito de inicializações não-difusas do filtro de Kalman. Aqui, a validade da mesma comprovar-se-á para o ambiente de modelos em espaço de estado estimados via filtro de Kalman com inicializações quaisquer. Essa invariância de estimadores de máxima verossimilhança, quando considera-se o modelo (30) em detrimento do original (19), será uma consequência direta de algumas outras (boas) propriedades do método do acumulador.

O primeiro resultado, apresentado na seqüência, garante que as recursões em (24) e (26), relativas ao FKIE, não se alteram para a estimação recursiva do vetor de estado original  $\alpha_t$ , quando se adota o modelo aumentado (30). A prova se encontra na subseção 5.5.1.

**Teorema 5.** *Seja  $t \in \mathbb{N}$  arbitrário. Denote por  $\hat{\alpha}_t^{(0)}, P_{\infty,t}, P_{*,t}, F_{\infty,t}$  e  $F_{*,t}$  os resultados das recursões do FKIE para o modelo em EE (19) e*

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_t^{(0)} \\ \hat{\gamma}_t^{(0)} \end{bmatrix}, \tilde{v}_t^{(0)}, \begin{bmatrix} P_{\infty,t}^{\alpha} & P_{\infty,t}^{\alpha\gamma} \\ P_{\infty,t}^{\gamma\alpha} & P_{\infty,t}^{\gamma\gamma} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} P_{*,t}^{\alpha} & P_{*,t}^{\alpha\gamma} \\ P_{*,t}^{\gamma\alpha} & P_{*,t}^{\gamma\gamma} \end{bmatrix}, \tilde{F}_{\infty,t} \text{ e } \tilde{F}_{*,t} \text{ os resultados das mesmas}$$

*recursões para o modelo aumentado (30). Então,*

$$\hat{\alpha}_t^{(0)} = \tilde{\alpha}_t^{(0)}, v_t^{(0)} = \tilde{v}_t^{(0)}, P_{\infty,t} = P_{\infty,t}^{\alpha}, P_{*,t} = P_{*,t}^{\alpha}, F_{\infty,t} = \tilde{F}_{\infty,t}^{\alpha} \text{ e } F_{*,t} = \tilde{F}_{*,t}^{\alpha}.$$

Para fins de notação, considere  $\psi$  como sendo o vetor de parâmetros a ser estimado no modelo apresentado em (19) e denote por  $\psi^*$  o vetor de parâmetros do modelo apresentado em (30) – convém mencionar, mais uma vez, que  $\psi = \psi^*$ . Sejam também  $l$  e  $l^*$  as respectivas funções de log-verossimilhança difusas. Combinando o Teorema 5 com a expressão da função de verossimilhança difusa em (29), tem-se a já mencionada extensão do Teorema 2 de Atherino et al. (2010). Formalmente:

**Corolário 4.**  $\hat{\psi} \equiv \arg \max l(\psi) = \arg \max l^*(\psi^*) \equiv \hat{\psi}^*$ .

O Corolário 4 garante que a incorporação do bloco  $\gamma_t$  no vetor de estado, da maneira descrita no modelo (30), não altera a estimação dos parâmetros desconhecidos por estimador de máxima verossimilhança. Intuitivamente, isto decorre de as coordenadas de acumulação adicionais dependerem apenas recursivamente delas próprias, garantindo que as propriedades probabilísticas de  $Y_t$  sejam preservadas – até mesmo quando algumas das variâncias do estado inicial sejam infinitas. Este corolário acarreta aumento de eficiência em problemas práticos, uma vez que é possível obter as estimativas de máxima verossimilhança associadas ao modelo (30) mediante estimação do modelo em (19), cujas matrizes do sistema são de dimensões menores.

O próximo teorema a ser enunciado garante que o modelo (30) pode ser utilizado no processo de suavização (SKIE – (25) e (27)) de forma a obterem-se os mesmos vetores de estado estimados para cada instante de tempo, com base em toda a informação disponível.

**Teorema 6.** *Considere uma série temporal  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ . Denote por  $\hat{\alpha}_{t|n}$  e  $V_t$  os*

*resultados das recursões SKIE para o modelo em EE (19) para  $Y_t$ , e por  $\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{t|n} \\ \hat{\gamma}_{t|n} \end{bmatrix}$  e*

*$\begin{bmatrix} V_t^\alpha & V_t^{\alpha\gamma} \\ V_t^{\gamma\alpha} & V_t^\gamma \end{bmatrix}$  os resultados das mesmas recursões para o modelo em EE*

*aumentado (30) para  $Y_t$ . Então,  $\hat{\alpha}_{t|n} = \hat{\alpha}_{t|n}$  e  $V_t = V_t^\alpha$ .*

São oferecidas duas provas para o Teorema 6. A primeira, reproduzida na subseção 5.5.2, é a mais longa e conduzida por algebrismos matriciais intensos. Contudo, trata-se de uma prova auto-contida e que joga luz sobre aspectos outros da suavização de Kalman com o modelo aumentado (30) que, embora tidos como secundários nesta Dissertação, podem ser muito úteis em problemas práticos, como por exemplo, no uso de diagnósticos baseados em quantidades “suavizadas”, tais quais os resíduos auxiliares (cf. de Jong e Penzer, 1998; e Durbin e Koopman, 2001, seções 4.4 e 7.5). Por outro lado, a segunda prova, que está na subseção 5.5.3, é muitíssimo menor, mas, além de depender de outros resultados na literatura, é tal que, excetuando-se quanto ao resultado final sobre a invariância da estimação do vetor de estado original  $\alpha_t$ , em nada esclarece sobre o que está “acontecendo” com quantidades intermediárias resultantes do processo de suavização.

### 5.3.

#### Modelos de espaço de estado para reservas IBNR

O modelo adotado para descrever o comportamento dos dados do triângulo conforme a ordenação apresentada na Figura 9 será o modelo estrutural semelhante ao utilizado por Atherino et al. (2010). Este modelo representa bem a

natureza dos dados do triângulo de runoff na ordenação por linhas, posto que suas duas componentes centrais – de *nível* e de *periodicidade* – são usadas para tentar descrever os efeitos linha e coluna, respectivamente.

Devido ao nível de incerteza contido nas caudas e ao baixo número de informações disponíveis, optou-se, nesta Dissertação, por estimá-las um passo à frente. Os modelos apresentados a seguir estarão limitados a esta particularização.

Os valores do triângulo apresentam claro decaimento em seus valores quanto mais próximos estão da cauda (isto será exemplificado graficamente com os triângulos analisados no capítulo 6). Esta estrutura sugere que os dados na cauda devem apresentar valores menores na medida em que se deslocam para a direita. Portanto, serão apresentadas duas sugestões de solução para modelagem de triângulos IBNR, as quais, grosso modo, assim se diferenciam: uma postula que uma dada célula do triângulo referente à cauda (cf. Figura 5) herda, de forma rígida, a mesma estrutura de periodicidade imediatamente anterior; a outra reconhece que deve haver uma adicional incerteza a tal célula.

Antes de apresentarem os modelos utilizados, será estabelecida uma nova notação para o triângulo a ser adotada apenas nas estimações via modelos em espaço de estado. Sob esta notação, serão diferenciados os valores da cauda do triângulo dos demais valores.

Ano de Origem $W$	Desenvolvimento $d$						Efeito cauda $J^*$
	0	1	2	...	...	$J-1$	
1	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	...	...	$Y_J$	$Y_{J^*}$
2	$Y_{J+1}$	$Y_{J+2}$		...		$Y_{2J}$	$Y_{2J^*}$
3	$Y_{2J+1}$	$Y_{2J+1}$		...		$Y_{3J}$	$Y_{3J^*}$
⋮		⋮				⋮	⋮
$J-1$		⋮				⋮	⋮
$J$	$Y_{(J-1)J+1}$		...			$Y_{J^2}$	$Y_{J^{*2}}$
$J+1$	$Y_{J^2+1}$	$Y_{J^2+2}$	...			$Y_{J^2+J}$	$Y_{J^{*2}+J^*}$

Figura 11. Triângulo IBNR com notação diferenciada para valores na cauda (em sombreado).

Conforme notação estabelecida na Figura 11, o primeiro modelo (M1) sugerido admite uma forma em espaço de estado linear com as seguintes matrizes do sistema:

$$Z_t = \begin{cases} [1 1 0 0 0 \dots 0 0], & \text{se } t \notin \{J^*, 2J^*, 3J^*, \dots, J^{*2} + J^*\} \\ [1 0 1 0 0 \dots 0 0], & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (33)$$

$$T_{t-1} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & \text{se } t \notin \{J^*, 2J^*, 3J^*, \dots, J^{*2} + J^*\} \\ I_J, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (34)$$

$$H_t = \sigma_\varepsilon^2, \quad d_t = 0,$$

$$Q_t = \begin{bmatrix} \sigma_\zeta^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\omega^2 \end{bmatrix}, \quad c_t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$R_{t-1} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & \text{se } t \notin \{J^*, 2J^*, 3J^*, \dots, J^{*2} + J^*\} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (35)$$

As matrizes correspondentes ao processo de inicialização exata do filtro de Kalman (vide eq. (23)) são dadas por  $a = 0_{J \times 1}$ ,  $A = I_J$  e  $R_0 = 0_{J \times 1}$ .

Com essas matrizes, o vetor de estado é, teoricamente, reconhecido como sendo  $\alpha_t = (\mu_t, \tau_t, \tau_{t-1}, \tau_{t-2}, \dots, \tau_{t-(J-2)})$ . A componente de nível  $\mu_t$  deve, presumidamente, responder pela dinâmica associada às linhas do triângulo,

enquanto que a componente de *periodicidade*  $\tau_t$ , por seu turno, há de captar os efeitos associados às colunas do triângulo.

O modelo apresentado é semelhante ao utilizado por Atherino et al. (2010) (sem as intervenções utilizadas pelos autores) para as observações do triângulo que não estão presentes na cauda à direita. Já nas observações  $Y_t$ , em que  $t = \{J^*, 2J^*, \dots, J^*^2 + J^*\}$ , a componente de periodicidade é reconhecida como (exatamente) a mesma do instante de tempo anterior (note que a matriz  $Z_t$  se encarrega de fazer a seleção apropriada de  $\tau_t$ , e que  $R_t$  atribui o valor igual a zero para a variância da componente de periodicidade das observações dispostas na cauda à direita).

O segundo modelo (M2), embora semelhante ao primeiro, apresenta uma única mas importante alteração. Esta ocorre justamente na definição da matriz  $R_t$ , conforme mostrado abaixo.

$$R_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad t = 1, 2, \dots, n. \quad (36)$$

A diferença de M2 em relação à M1 consiste em assumir que o choque associado à componente de periodicidade das observações na cauda não é igual a zero.

Em termos operacionais/computacionais, existe uma específica vantagem de M2 em relação à M1, pois o primeiro não requer mudanças na matriz  $R_t$ . Disto, depende-se que não há necessidade de armazenamentos de  $n$  tais matrizes, o que facilita e torna mais eficiente todo o processo de estimação, além de simplificar a confecção de códigos de programação. Outrossim, os dados, associados a uma dada aplicação, devem corroborar qual desses dois modelos são mais apropriados.

#### 5.4.

#### Algoritmo de modelagem e cálculo da reserva IBNR: modelos em espaço de estado

De forma semelhante ao que foi feito seção 4.4, menciona-se que a abordagem via modelos em espaço de estado apresentou certo padrão de comportamento na modelagem dos dados de forma a ser possível representá-la em formato de um algoritmo como segue.

1º Passo) Ordene os dados conforme a Figura 9.

2º Passo) Com os modelos estruturais propostos na seção 5.3 (ou alguma outra proposta não considerada nesta Dissertação), utilize as apropriadas matrizes do sistema da representação em espaço de estado (19), um valor inicial para os parâmetros em  $\psi$ , a função de verossimilhança apresentada em (29) e um otimizador. Obtenha os valores dos parâmetros que maximizam a função de verossimilhança.

3º Passo) Verifique, por meio de diagnósticos sobre as inovações padronizadas

$v_t^p = \frac{v_t}{\sqrt{F_t}}$ , se os pressupostos básicos estão sendo respeitados. Sob a

adequação dos pressupostos básicos, então necessariamente  $v_t^p \sim NID(0,1)$ .

4º Passo) Caso existam evidências estatísticas suficientes que apontem violações dos pressupostos básicos do modelo, retorne ao 2º Passo e proponha um modelo alternativo que contemple as estruturas não capturadas pelo modelo vigente. Caso contrário, siga para o 5º Passo.

5º Passo) Calcule as medidas de ajuste do modelo, sendo que estas podem ser utilizadas para corroborar a escolha do melhor modelo.

6º Passo) Utilizando os parâmetros estimados no 2º Passo (com o modelo final) e utilizando a representação em espaço de estado (30), referente ao

método dos acumuladores, calcule os três diferentes tipos de reserva e seus respectivos EQMs teóricos.

O fluxograma oferecido na Figura 12, por resumir os passos acima, estabelece a perspectiva de modelagem.

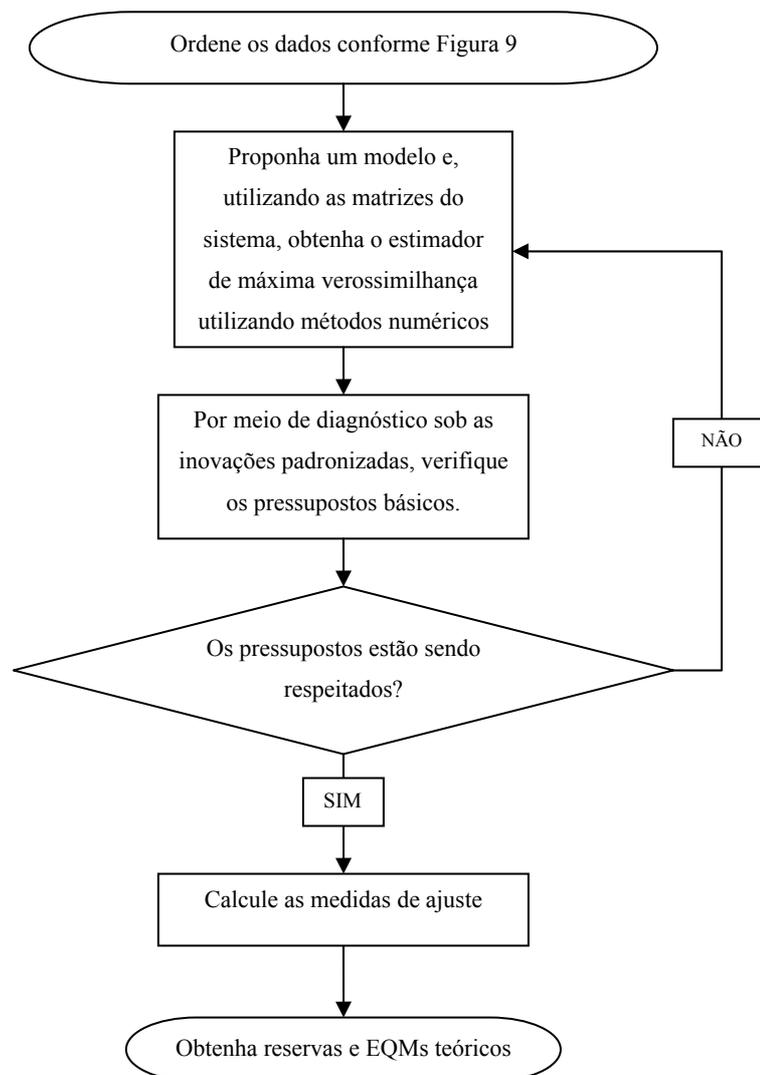


Figura 12. Fluxograma para ajuste do modelo via EE.

## 5.5. Apêndice: Provas

### 5.5.1. Prova do Teorema 5

Por indução. Pelos modelos gerais para  $\alpha_1$  do modelo em EE (19) e para  $\begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix}$  do modelo em EE aumentado (30), tem-se que

$$\begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix} \delta + \begin{bmatrix} R_0 \\ 0 \end{bmatrix} \eta_0.$$

Então,  $\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1^{(0)} \\ \hat{\gamma}_1 \end{bmatrix} = E \left( \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1^{(0)} \\ 0 \end{bmatrix}$ , e, também,

$$P_1^\alpha \equiv \text{Var}(\tilde{\alpha}_1) = A \text{Var}(\gamma) A' + R_0 \text{Var}(\eta_0) R_0' = \kappa A A' + R_0 Q_0 R_0', \text{ de modo que}$$

$$P_{\infty,1}^\alpha = A A' = P_{\infty,1} \text{ e } P_{*,1}^\alpha = R_0 Q_0 R_0' = P_{*,1}.$$

Segue-se daí que

$$\tilde{F}_{\infty,1} = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{\infty,1}^\alpha & P_{\infty,1}^{\alpha\gamma} \\ P_{\infty,1}^{\gamma\alpha} & P_{\infty,1}^\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1' \\ 0' \end{bmatrix} = Z_1 P_{\infty,1}^\alpha Z_1' = Z_1 P_{\infty,1} Z_1' = F_{\infty,1},$$

$$\tilde{F}_{*,1} = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{*,1}^\alpha & P_{*,1}^{\alpha\gamma} \\ P_{*,1}^{\gamma\alpha} & P_{*,1}^\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1' \\ 0' \end{bmatrix} + H_1 = Z_1 P_{*,1}^\alpha Z_1' + H_1 = Z_1 P_{*,1} Z_1' + H_1 = F_{*,1},$$

$$\tilde{v}_1^{(0)} = Y_1 - \begin{bmatrix} Z_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1^{(0)} \\ 0 \end{bmatrix} - d_1 = Y_1 - Z_1 \hat{\alpha}_1^{(0)} - d_1 = v_1^{(0)}.$$

Suponha agora que as identidades enunciadas são válidas para um dado  $t$ . Inicialmente considere o caso em que  $F_{\infty,t} > 0$  - o que, pela hipótese de indução, coincide com o caso de  $\tilde{F}_{\infty,t} > 0$ . Trivialmente, tem-se que  $\tilde{M}_{\infty,t} = M_{\infty,t}$  e  $\tilde{M}_{*,t} = M_{*,t}$ , sendo que  $M_{\infty,t}^\alpha$  e  $M_{*,t}^\alpha$  são os blocos referentes a  $\tilde{\alpha}_t$  de  $\tilde{M}_{\infty,t}$  e  $\tilde{M}_{*,t}$ , as quais são associadas ao modelo em EE aumentado (30). Também, é direto ver que  $\tilde{F}_t^{(1)} = F_t^{(1)}$  e  $\tilde{F}_t^{(2)} = F_t^{(2)}$ . Destas constatações, e de (24), decorrem

$$\tilde{K}_t^{(0)} = \begin{bmatrix} T_t & 0 \\ X_t & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{\infty,t}^\alpha \\ M_{\infty,t}^\gamma \end{bmatrix} \tilde{F}_t^{(1)} = \begin{bmatrix} T_t M_{\infty,t} F_t^{(1)} \\ X_t M_{\infty,t} F_t^{(1)} + M_{\infty,t}^\gamma F_t^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_t^{(0)} \\ K_t^{(0)\gamma} \end{bmatrix}, \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_t^{(1)} &= \begin{bmatrix} T_t & 0 \\ X_t & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{\infty,t}^\alpha \\ M_{\infty,t}^\gamma \end{bmatrix} \tilde{F}_t^{(2)} + \begin{bmatrix} T_t & 0 \\ X_t & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{*,t}^\alpha \\ M_{*,t}^\gamma \end{bmatrix} \tilde{F}_t^{(1)} \\ &= \begin{bmatrix} T_t M_{\infty,t} \tilde{F}_t^{(2)} + T_t M_{*,t} \tilde{F}_t^{(1)} \\ X_t M_{\infty,t} \tilde{F}_t^{(2)} + M_{\infty,t}^\gamma \tilde{F}_t^{(2)} + X_t M_{*,t} \tilde{F}_t^{(1)} + M_{*,t}^\gamma \tilde{F}_t^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_t^{(1)} \\ K_t^{(1)\gamma} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (38)$$

De (37) e (38), e também de (24), tem-se que

$$\tilde{L}_t^{(0)} = \begin{bmatrix} T_t & 0 \\ X_t & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_t^{(0)} \\ K_t^{(0)\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_t & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_t - K_t^{(0)} Z_t & 0 \\ X_t - K_t^{(0)\gamma} Z_t & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_t^{(0)} & L_t^{(0)\alpha\gamma} \\ L_t^{(0)\alpha\gamma} & L_t^{(0)\gamma} \end{bmatrix}, \quad (39)$$

$$\tilde{L}_t^{(1)} = - \begin{bmatrix} K_t^{(1)} \\ K_t^{(1)\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_t & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_t^{(1)} Z_t & 0 \\ -K_t^{(1)\gamma} Z_t & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_t^{(1)} & L_t^{(1)\alpha\gamma} \\ L_t^{(1)\gamma\alpha} & L_t^{(1)\gamma} \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Usando (37), (30) e a hipótese de indução,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{t+1}^{(0)} \\ \hat{\gamma}_{t+1}^{(0)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} T_t & 0 \\ X_t & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_t^{(0)} \\ \hat{\gamma}_t^{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_t^{(0)} \\ K_t^{(0)\gamma} \end{bmatrix} \nu_t^{(0)} + \begin{bmatrix} c_t \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T_t \hat{\alpha}_t^{(0)} + K_t^{(0)} \nu_t^{(0)} + c_t \\ X_t \hat{\alpha}_t^{(0)} + \hat{\gamma}_t^{(0)} + K_t^{(0)\gamma} \nu_t^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{t+1}^{(0)} \\ \hat{\gamma}_{t+1}^{(0)} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (41)$$

Usando (40), (41), (30) e a hipótese de indução, segue-se também

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P_{*,t+1}^\alpha & P_{*,t+1}^{\alpha,\gamma} \\ P_{*,t+1}^{\gamma,\alpha} & P_{*,t+1}^\gamma \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} T_t & 0 \\ X_t & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{\infty,t}^\alpha & P_{\infty,t}^{\alpha,\gamma} \\ P_{\infty,t}^{\gamma,\alpha} & P_{\infty,t}^\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_t^{(1)} & L_t^{(1)\gamma\alpha} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} T_t & 0 \\ X_t & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{*,t}^\alpha & P_{*,t}^{\alpha,\gamma} \\ P_{*,t}^{\gamma,\alpha} & P_{*,t}^\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_t^{(0)} & L_t^{(0)\gamma\alpha} \\ 0 & L_t^{(0)\gamma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_t \\ 0 \end{bmatrix} Q_t [R_t' \ 0] \\ &= \begin{bmatrix} T_t P_{\infty,t} L_t^{(1)\gamma} + T_t P_{*,t} L_t^{(0)\gamma} + R_t Q_t R_t' & P_{*,t+1}^{\alpha\gamma} \\ P_{*,t+1}^{\gamma\alpha} & P_{*,t+1}^\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{*,t+1} & P_{*,t+1}^{\alpha\gamma} \\ P_{*,t+1}^{\gamma\alpha} & P_{*,t+1}^\gamma \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (42)$$

na qual

$$P_{*,t+1}^{\alpha\gamma} = T_t P_{\infty,t} L_t^{(1)\gamma\alpha} + T_t P_{*,t} L_t^{(1)\gamma} + T_t P_{*,t} L_t^{(0)\gamma\alpha},$$

$$P_{*,t+1}^\gamma = X_t P_{\infty,t} L_t^{(1)\alpha\gamma} + P_{\infty,t}^{\alpha\gamma} L_t^{(1)\alpha\gamma} + X_t P_{\infty,t}^{\alpha\gamma} L_t^{(1)\gamma} + P_{\infty,t}^\gamma L_t^{(1)\gamma} + X_t P_{*,t} L_t^{(0)\gamma\alpha} + P_{*,t}^{\alpha\gamma} L_t^{(0)\gamma\alpha} + X_t P_{*,t}^{\alpha\gamma} L_t^{(0)\gamma} + P_{*,t}^\gamma L_t^{(0)\gamma},$$

assim como,

$$\begin{bmatrix} P_{\infty,t+1}^\alpha & P_{\infty,t+1}^{\alpha,\gamma} \\ P_{\infty,t+1}^{\gamma,\alpha} & P_{\infty,t+1}^\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_t & 0 \\ X_t & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{\infty,t} & P_{\infty,t}^{\alpha,\gamma} \\ P_{\infty,t}^{\gamma,\alpha} & P_{\infty,t}^\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_t^{(0)} & L_t^{(0)\gamma\alpha} \\ 0 & L_t^{(0)\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_t P_{\infty,t} L_t^{(0)} & P_{\infty,t+1}^{\alpha\gamma} \\ P_{\infty,t+1}^{\gamma\alpha} & P_{\infty,t+1}^\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{\infty,t+1} & P_{\infty,t+1}^{\alpha\gamma} \\ P_{\infty,t+1}^{\gamma\alpha} & P_{\infty,t+1}^\gamma \end{bmatrix}, \quad (43)$$

na qual

$$P_{\infty,t+1}^{\alpha\gamma} = T_t P_{\infty,t} L_t^{(0)\gamma\alpha},$$

$$P_{\infty,t+1}^{\gamma\alpha} = X_t P_{\infty,t} + P_{\infty,t}^{\gamma\alpha} L_t^{(0)},$$

$$P_{\infty,t+1}^\gamma = X_t P_{\infty,t} L_t^{(0)\gamma\alpha} + P_{\infty,t}^{\gamma\alpha} L_t^{(0)\gamma\alpha} + X_t P_{\infty,t}^{\alpha\gamma} L_t^{(0)\gamma} + P_{\infty,t}^\gamma L_t^{(0)\gamma}.$$

Agora, usando (41), (42), (43) e (24), obtêm-se

$$\tilde{v}_{t+1}^{(0)} = Y_{t+1} - \begin{bmatrix} Z_{t+1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{t+1}^{(0)} \\ \hat{\gamma}_{t+1}^{(0)} \end{bmatrix} - d_{t+1} = Y_{t+1} - Z_{t+1} \hat{\alpha}_{t+1}^{(0)} - d_{t+1} = v_{t+1}^{(0)},$$

$$\tilde{F}_{\infty,t+1} = \begin{bmatrix} Z_t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{\infty,t+1}^\alpha & P_{\infty,t+1}^{\alpha\gamma} \\ P_{\infty,t+1}^{\gamma\alpha} & P_{\infty,t+1}^\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{t+1} \\ 0 \end{bmatrix} = Z_{t+1} P_{\infty,t+1} Z_{t+1}' = F_{\infty,t+1},$$

$$\tilde{F}_{*,t+1} = \begin{bmatrix} Z_{t+1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{*,t+1}^\alpha & P_{*,t+1}^{\alpha\gamma} \\ P_{\infty,t+1}^{\gamma\alpha} & P_{\infty,t+1}^\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{t+1} \\ 0 \end{bmatrix} + H_{t+1} = Z_{t+1} P_{*,t+1} Z_t' + H_{t+1} = F_{*,t+1}.$$

Considere-se agora o caso em que  $F_{\infty,t} = 0$  - ou, equivalentemente,  $\tilde{F}_{\infty,t} = 0$  - ,

sob o qual ainda trivialmente valem as identidades  $M_{\infty,t}^\alpha = M_{\infty,t}$  e  $M_{*,t}^\alpha = M_{*,t}$ .

Destas constatações iniciais, de (26) e da hipótese de indução, tem-se

$$\tilde{K}_t^{(0)} = \begin{bmatrix} T_t & 0 \\ X_t & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{*,t} \\ M_{*,t}^\gamma \end{bmatrix} F_{*,t}^{-1} = \begin{bmatrix} T_t M_{*,t} F_{*,t}^{-1} \\ X_t M_{*,t} F_{*,t}^{-1} + M_{*,t}^\gamma F_{*,t}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_t^{(0)} \\ K_t^{(0)\gamma} \end{bmatrix}. \quad (44)$$

De (44) e de (26), tem-se também:

$$\tilde{L}_t^{(0)} = \begin{bmatrix} T_t & 0 \\ X_t & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_t^{(0)} \\ K_t^{(0)\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_t & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_t - K_t^{(0)} Z_t & 0 \\ X_t - K_t^{(0)\gamma} Z_t & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_t^{(0)} & L_t^{(0)\alpha\gamma} \\ L_t^{(0)\gamma\alpha} & L_t^{(0)\gamma} \end{bmatrix} \quad (45)$$

Usando (44), (26) e a hipótese de indução, obtém-se, como feito em (41),

$\hat{\alpha}_{t+1}^{(0)} = \hat{\alpha}_{t+1}^{(0)}$ . E, de (45), de (26) e da hipótese de indução, são obtidos, também,

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{*,t+1} &= \begin{bmatrix} T_t & 0 \\ X_t & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{*,t} & P_{*,t}^{\alpha\gamma} \\ P_{*,t}^{\gamma\alpha} & P_{*,t}^{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_t^{(0)\alpha} & L_t^{(0)\alpha\gamma} \\ 0 & L_t^{(0)\gamma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_t \\ 0 \end{bmatrix} Q_t [R_t' \ 0'] \\ &= \begin{bmatrix} T_t P_{*,t} L_t^{(0)\alpha} + R_t Q_t R_t' & T_t P_{*,t} L_t^{(0)\gamma\alpha} + T_t P_{*,t}^{\alpha\gamma} L_t^{(0)\gamma} \\ (X_t P_{*,t} + P_{*,t}^{\gamma\alpha}) L_t^{(0)\alpha} & (X_t P_{*,t} + P_{*,t}^{\gamma\alpha}) L_t^{(0)\gamma\alpha} + (X_t P_{*,t}^{\alpha\gamma} + P_{*,t}^{\gamma}) L_t^{(0)\gamma} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{*,t+1} & P_{*,t+1}^{\alpha\gamma} \\ P_{*,t+1}^{\gamma\alpha} & P_{*,t+1}^{\gamma} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{\infty,t+1} &= \begin{bmatrix} T_t & 0 \\ X_t & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{\infty,t} & P_{\infty,t}^{\alpha\gamma} \\ P_{\infty,t}^{\gamma\alpha} & P_{\infty,t}^{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_t' & X_t' \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T_t P_{\infty,t} T_t' & T_t P_{\infty,t} X_t + T_t P_{\infty,t}^{\alpha\gamma} \\ (X_t P_{\infty,t} + P_{\infty,t}^{\gamma}) T_t' & (X_t P_{\infty,t}^{\alpha\gamma} + P_{\infty,t}^{\gamma}) X_t + X_t P_{\infty,t}^{\alpha\gamma} + P_{\infty,t}^{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{\infty,t+1} & P_{\infty,t+1}^{\alpha\delta} \\ P_{\infty,t+1}^{\delta\alpha} & P_{\infty,t+1}^{\delta} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (47)$$

Finalmente, usando a identidade  $\hat{\alpha}_{t+1}^{(0)} = \hat{\alpha}_{t+1}^{(0)}$ , (46), (47) e (26), obtém-se, da mesma forma como feito antes,  $\tilde{v}_{t+1}^{(0)} = v_{t+1}^{(0)}$ ,  $\tilde{F}_{\infty,t+1} = F_{\infty,t+1}$  e  $\tilde{F}_{*,t+1} = F_{*,t+1}$ . *Q.E.D.*

### 5.5.2. Primeira Prova do Teorema 6

Para que se estabeleçam as identidades enunciadas, é suficiente mostrar que

$$\begin{aligned} \tilde{r}_t^{(0)} &= \begin{bmatrix} r_t^{(i)\alpha} \\ r_t^{(i)\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_t^{(i)} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i = 0,1, \\ \begin{bmatrix} N_t^{(j)\alpha} & N_t^{(j)\alpha\gamma} \\ N_t^{(j)\gamma\alpha} & N_t^{(j)\gamma} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} N_t^{(j)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad j = 0,1,2 \end{aligned} \quad (48)$$

para todo  $t = n, n-1, n-2, \dots, 2, 1, 0$  – com efeito, pois, por (25) e pelo Teorema 5,

$$i) \quad \hat{\alpha}_{t|n}^{(0)} = \hat{\alpha}_t^{(0)} + P_{*,t} r_{t-1}^{(0)\alpha} + P_{*,t}^{\alpha\gamma} r_{t-1}^{(0)\gamma} + P_{\infty,t} r_{t-1}^{(1)\alpha} + P_{\infty,t}^{\alpha\gamma} r_{t-1}^{(1)\gamma};$$

$$V_t^\alpha = P_{*,t} - P_{*,t} N_{t-1}^{(0)\alpha} P_{*,t} - P_{*,t}^{\alpha\gamma} N_{t-1}^{(0)\alpha\gamma} P_{*,t} - P_{*,t} N_{t-1}^{(0)\alpha\gamma} P_{*,t}^{\gamma\alpha} - P_{*,t}^{\alpha\gamma} N_{t-1}^{(0)\gamma} P_{*,t}^{\gamma\alpha} - P_{*,t} N_{t-1}^{(1)\alpha} P_{\infty,t}$$

$$ii) \quad -P_{*,t}^{\alpha\gamma} N_{t-1}^{(1)\gamma\alpha} P_{\infty,t} - P_{*,t} N_{t-1}^{(1)\alpha\gamma} P_{\infty,t}^{\gamma\alpha} - P_{*,t}^{\alpha\gamma} N_{t-1}^{(1)\gamma} P_{\infty,t}^{\gamma\alpha} - P_{\infty,t} N_{t-1}^{(1)\alpha} P_{*,t} - P_{\infty,t} N_{t-1}^{(1)\alpha\gamma} P_{*,t}^{\gamma\alpha}$$

$$-P_{\infty,t}^{\alpha\gamma} N_{t-1}^{(1)\gamma\alpha} P_{*,t} - P_{\infty,t}^{\alpha\gamma} N_{t-1}^{(1)\gamma} P_{*,t}^{\gamma\alpha} - P_{\infty,t} N_{t-1}^{(2)\alpha} P_{\infty,t} - P_{\infty,t}^{\alpha\gamma} N_{t-1}^{(2)\gamma\alpha} P_{\infty,t} - P_{\infty,t} N_{t-1}^{(2)\gamma\alpha} P_{*,t} - P_{\infty,t}^{\alpha\gamma} N_{t-1}^{(2)\gamma} P_{\infty,t}^{\gamma\alpha}.$$

Isso será feito por indução. Primeiramente, veja que

$$\tilde{r}_n^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_n^{(i)} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i = 0, 1 \text{ e que}$$

$$\begin{bmatrix} N_n^{(i)\alpha} & N_n^{(i)\alpha\gamma} \\ N_n^{(i)\gamma\alpha} & N_n^{(i)\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_n^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad i = 0, 1, 2.$$

– vide condições iniciais do SKIE (p/  $F_{\infty,t} > 0$  e  $F_{\infty,t} = 0$ ). Agora, suponha que

(48) é válido para um dado  $t \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Se  $F_{\infty,t} > 0$ , então, por (25), pelo

Teorema 5 e pelas hipóteses de indução

$$\tilde{r}_{t-1}^{(0)} = \begin{bmatrix} L_t^{(0)'} & L_t^{(0)\gamma\alpha'} \\ 0' & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_t^{(0)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_t^{(0)'} r_t^{(0)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{t-1}^{(0)} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{t-1}^{(1)} &= \begin{bmatrix} Z_t' \\ 0' \end{bmatrix} F_t^{(1)} v_t^{(0)} + \begin{bmatrix} L_t^{(0)'} & L_t^{(0)\gamma\alpha'} \\ 0' & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_t^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_t^{(1)'} & L_t^{(1)\gamma\alpha'} \\ 0' & 0' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_t^{(0)} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Z_t' F_t^{(1)} v_t^{(0)} + L_t^{(0)'} r_t^{(1)} + L_t^{(1)'} r_t^{(0)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{t-1}^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_{t-1}^{(0)\alpha} & N_{t-1}^{(0)\alpha\gamma} \\ N_{t-1}^{(0)\gamma\alpha} & N_{t-1}^{(0)\gamma} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} L_t^{(0)'} & L_t^{(0)\gamma\alpha'} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_t^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_t^{(0)} & 0 \\ L_t^{(0)\gamma\alpha} & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_t^{(0)'} N_t^{(0)} L_t^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} N_{t-1}^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_{t-1}^{(1)\alpha} & N_{t-1}^{(1)\alpha\gamma} \\ N_{t-1}^{(1)\gamma\alpha} & N_{t-1}^{(1)\gamma} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Z_t' \\ 0' \end{bmatrix} F_t^{(1)} \begin{bmatrix} Z_t & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_t^{(0)'} & L_t^{(0)\gamma\alpha'} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_t^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_t^{(0)} & 0 \\ L_t^{(0)\gamma\alpha} & I \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} L_t^{(1)'} & L_t^{(1)\gamma\alpha'} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_t^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_t^{(0)} & 0 \\ L_t^{(0)\gamma\alpha} & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_t^{(0)'} & L_t^{(0)\gamma\alpha'} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_t^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_t^{(1)} & 0 \\ L_t^{(1)\gamma\alpha} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Z_t' F_t^{(1)} Z_t + L_t^{(0)'} N_t^{(1)} L_t^{(0)} + L_t^{(1)'} N_t^{(0)} L_t^{(0)} + L_t^{(0)'} N_t^{(0)} L_t^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{t-1}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} N_{t-1}^{(2)} & N_{t-1}^{(2)\alpha\gamma} \\ N_{t-1}^{(2)\gamma\alpha} & N_{t-1}^{(2)\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_t \\ 0' \end{bmatrix} F_t^{(2)} \begin{bmatrix} Z_t & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_t^{(0)'} & L_t^{(0)\gamma\alpha'} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_t^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_t^{(0)} & 0 \\ L_t^{(0)\gamma\alpha} & 0 \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} L_t^{(0)'} & L_t^{(0)\gamma\alpha'} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_t^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_t^{(0)} & 0 \\ L_t^{(0)\gamma\alpha} & I \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} Z_t' F_t^{(2)} Z_t + L_t^{(0)'} N_t^{(2)} L_t^{(0)} + L_t^{(0)'} N_t^{(1)} L_t^{(1)} + L_t^{(1)'} N_t^{(0)} L_t^{(1)} + L_t^{(1)'} N_t^{(1)} L_t^{(0)} & 0 \\ & 0 \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} N_{t-1}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Por outro lado, se  $F_{\infty,t} = 0$ , tem-se, por (27), pelo Teorema 5 e pela hipótese de indução, que

$$\begin{aligned}
\tilde{r}_{t-1}^{(0)} &= \begin{bmatrix} Z_t' \\ 0 \end{bmatrix} F_{*,t}^{-1} v_t^{(0)} + \begin{bmatrix} L_t^{(0)'} & L_t^{(0)\gamma\alpha'} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_t^{(0)} \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} Z_t' F_{*,t}^{-1} v_t^{(0)} + L_t^{(0)'} r_t^{(0)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{t-1}^{(0)} \\ 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\tilde{r}_{t-1}^{(1)} = \begin{bmatrix} T_t' & X_t' \\ 0' & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_t^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_t' r_t^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{t-1}^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} N_{t-1}^{(0)\alpha} & N_{t-1}^{(0)\alpha\gamma} \\ N_{t-1}^{(0)\gamma\alpha} & N_{t-1}^{(0)\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_t' \\ 0' \end{bmatrix} F_{*,t}^{-1} \begin{bmatrix} Z_t & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_t^{(0)'} & L_t^{(0)\gamma\alpha'} \\ 0' & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_t^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_t^{(0)} & 0 \\ L_t^{(0)\gamma\alpha} & I \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} Z_t' F_{*,t}^{-1} Z_t + L_t^{(0)'} N_t^{(0)} L_t^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{t-1}^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} N_{t-1}^{(1)\alpha} & N_{t-1}^{(1)\alpha\gamma} \\ N_{t-1}^{(1)\gamma\alpha} & N_{t-1}^{(1)\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_t^{(0)'} & L_t^{(0)\gamma\alpha'} \\ 0' & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_t^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_t^{(0)} & 0 \\ L_t^{(0)\gamma\alpha} & I \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} L_t^{(0)'} N_t^{(1)} L_t^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{t-1}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_{t-1}^{(2)\alpha} & N_{t-1}^{(2)\alpha\gamma} \\ N_{t-1}^{(2)\gamma\alpha} & N_{t-1}^{(2)\gamma} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} T_t' & X_t' \\ \mathbf{0}' & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_t^{(2)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_t & \mathbf{0} \\ X_t & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T_t' N_t^{(2)} T_t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{t-1}^{(2)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

*Q.E.D.*

### 5.5.3.

#### Segunda prova do Teorema 6.

Sem perda de generalidade, suponha que os modelos (19) e (30) são Gaussianos.

Lembremos que, para (19) e (30), SKIE fornece

$$\hat{\alpha}_{t|n} \equiv E(\alpha_t | \mathfrak{F}_n), \quad (49)$$

$$V_t \equiv E[(\alpha_t - \hat{\alpha}_{t|n})(\alpha_t - \hat{\alpha}_{t|n})' | \mathfrak{F}_n], \quad (50)$$

$$\hat{\tilde{\alpha}}_{t|n} \equiv E(\tilde{\alpha}_t | \tilde{\mathfrak{F}}_n), \quad (51)$$

$$\tilde{V}_t \equiv E[(\tilde{\alpha}_t - \hat{\tilde{\alpha}}_{t|n})(\tilde{\alpha}_t - \hat{\tilde{\alpha}}_{t|n})' | \tilde{\mathfrak{F}}_n], \quad (52)$$

sendo que todos os momentos condicionais acima são finitos (cf. Durbin e Koopman, 2001, seção 5.3). Então, seguindo Atherino et al. (2010) eq. (16)-(20), tem-se que  $\tilde{\alpha}_t = \alpha_t$  e  $\tilde{\mathfrak{F}}_n = \mathfrak{F}_n$  que implica que as esperanças condicionais em (49) e (51) são iguais, assim como as em (50) e (52). *Q.E.D.*