

4

Modelos de regressão linear com heterocedasticidade

4.1.

Abordagem via mínimos quadrados ordinários

Uma alternativa de modelagem dos dados do triângulo de *runoff* é supor que o seguinte modelo de regressão linear consegue expressar bem a natureza dos dados:

$$Y = X\beta + \varepsilon, \quad (9)$$

no qual $E(\varepsilon | X) = 0$ e $Var(\varepsilon | X) = \sigma^2 I$. No modelo (9), a matriz X representa variáveis do tipo *dummy*, referentes aos efeitos linha e coluna do triângulo (cf. Figuras 1 e 6). Claramente, o modelo reconhece não existir nenhuma estrutura de correlação entre os sinistros pagos por instante de tempo de ocorrência nem por instante de tempo de atraso. Supõe-se também que os choques aleatórios possuem a mesma variância, independentemente do atraso do pagamento do sinistro ou instante de tempo de ocorrência deste (hipótese esta que pode não ser coerente com a estrutura dos dados).

Conforme seção 2.5, há três formas básicas de reserva: total, por linhas e por ano de calendário. Isto sugere a adoção de uma nova notação, visando a relacionar a estrutura do triângulo com a teoria do modelo (9)⁴. Inicialmente, defina-se $\Gamma \equiv \{t : Y_t \text{ não é valor ausente}\}$ pode-se expressar a reserva a ser formada por ano de ocorrência de sinistro como

$$Y^{(i)} = \sum_{j \in \Gamma} C_{i,j}. \quad (10)$$

Expressa-se também a reserva total de IBNR a ser calculada da forma

⁴ Esta notação também será doravante aproveitada, sempre que se fizer necessário.

$$Y^{(T)} = \sum_{\substack{i \in \Gamma \\ j \in \Gamma}} C_{i,j}.$$

Os estimadores das reservas utilizando esta abordagem podem ser calculados via Mínimos Quadrados Ordinários (MQO), método este que pode fornecer estimadores não necessariamente ótimos (isto é, não-tendenciosos para β e de variância mínima) para os dados em questão, pois as hipóteses assumidas para este modelo podem não ser as mais adequadas para os dados do triângulo (vide Johnston e DiNardo, 1997, cap. 5). E o mais importante: em alguns casos, os dados apresentam, via análise de resíduos, pronunciadas evidências de erros heterocedásticos, o que compromete os testes de hipótese para os coeficientes do modelo de regressão e a eficiência teórica dos estimadores dos três diferentes tipos de reserva. Alternativas que incorporam a heterocedasticidade do erro serão apresentadas na seqüência.

4.2.

Extensão do modelo de regressão: mínimos quadrados generalizados e (ainda) mínimos quadrados ordinários

Como já brevemente se pôs na seção 4.1, assumir que o erro é homocedástico é uma hipótese simplificadora, ainda que, possivelmente, pouco realista para descrever o comportamento dos dados do triângulo. De fato: análises de resíduos rotineiras podem indicar comportamentos heterocedásticos.

As alternativas mais diretas ao modelo (9), que contemplem heterocedasticidade e, possivelmente, correlação, seriam, respectivamente, tais que $Var(\varepsilon) = diag(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)$ e $Var(\varepsilon) = \Sigma$, esta última uma matriz não-diagonal. Nestes casos, o estimador do coeficiente β de variância mínima é obtido através do método de Mínimos Quadrados Generalizados (MQG) (cf. Johnston e Dinardo, 1997, cap. 5 e 6). Como se deseja obter as reservas total, por linhas e por ano de calendário – que foram os três tipos de reserva apresentados na seção 2.5 –, é necessário que se desenvolvam expressões gerais do estimador da reserva e de seu correspondente EQM teórico, as quais serão devidamente particularizadas para cada um dos três tipos de reserva. O caminho para isso tem início no seguinte teorema, que irá apresentar a fórmula de cálculo do EQM teórico para somas de reservas (independente do tipo de reserva que se deseja obter) tais que

contemplem heterocedasticidade no termo aleatório bem como possíveis estruturas de correlação. A demonstração é relegada à subseção 4.5.1.

Teorema 2. *Seja o seguinte modelo de regressão*

$$Y = \begin{bmatrix} Y_O \\ Y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_O \\ X_A \end{bmatrix} \beta + \begin{bmatrix} \varepsilon_O \\ \varepsilon_A \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_O \\ \varepsilon_A \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_O & \Sigma_{OA} \\ \Sigma_{AO} & \Sigma_A \end{bmatrix} \right)$$

Sejam $\hat{Y}_O = X_O \hat{\beta}$ e $\hat{Y}_A = X_A \hat{\beta}$, nos quais $\hat{\beta} = (X_O' \Sigma_O^{-1} X_O)^{-1} X_O' \Sigma_O^{-1} Y_O$. Seja ainda $Y^s = \sum_{j=1}^h Y_{i_j}$, tal que $Y_{i_j} \in \{Y_i : Y_i \text{ é coordenada de } Y_A\}$.

Definindo $\hat{Y}^s = \sum_{j=1}^h \hat{Y}_{i_j} = \sum_{j=1}^h x'_{i_j} \hat{\beta}$, então

$$\begin{aligned} EQM(\hat{Y}^s) \equiv E \left[(Y^s - \hat{Y}^s)^2 \right] &= \sum_{j=1}^h x'_{i_j} (X_O' \Sigma_O^{-1} X_O)^{-1} \sum_{j=1}^h x_{i_j} + \Pi' \Sigma \Pi - \\ &\quad - 2 \sum_{j=1}^h x'_{i_j} (X_O' \Sigma_O^{-1} X_O)^{-1} X_O \Sigma_O^{-1} [\Sigma_O \quad \Sigma_{OA}] \Pi, \end{aligned} \quad (11)$$

no qual $\Pi = [I_1, I_2, \dots, I_n]$, sendo que $I_j = \begin{cases} 1, & \text{se } j \in \{i_1, \dots, i_h\} \\ 0, & \text{se } j \notin \{i_1, \dots, i_h\} \end{cases}$.

Cumpra confirmar que o Teorema 2 é desenvolvido sob a ótica de um modelo de regressão com heterocedasticidade e, também, com estrutura de correlação no termo de erro. Dentro do contexto de triângulos IBNR e identificando Y_O com os valores *observados* do triângulo (ou seja: a parte “de cima” do triângulo) e Y_A com os valores *ausentes* (que representam a parte “de baixo” e o efeito cauda), é possível utilizar a formulação apresentada no Teorema 2 para calcular o EQM teórico nos três tipos básicos de reserva.

Os casos de modelos de regressão apenas heterocedásticos e de modelos homocedásticos são devidamente contemplados nos Corolários 1 e 2 abaixo.

Corolário 1. *Sob as mesmas definições do Teorema 2, considerando $Var(\varepsilon)$ como sendo diagonal, então*

$$EQM(\hat{Y}^s) = \sum_{j=1}^h x'_{i_j} (X_o' \Sigma_o^{-1} X_o)^{-1} \sum_{j=1}^h x_{i_j} + \sum_{j=1}^h \sigma_{i_j}^2. \quad (12)$$

Corolário 2. *Sob as mesmas definições do Teorema 2 mas assumindo-se que $Var(\varepsilon) = \sigma^2 I$, então*

$$EQM(\hat{Y}^s) = \sigma^2 \left(\sum_{j=1}^h x'_{i_j} (X_o' X_o)^{-1} \sum_{j=1}^h x_{i_j} + h \right). \quad (13)$$

Mesmo que estimadores de MQG constituam a alternativa mais eficiente de estimação, nada impede que estruturas de heterocedasticidade e de correlação sejam igualmente incorporadas/reconhecidas em uma abordagem de MQO. Este caminho, ainda que sub-ótimo, oferece ao menos as possibilidades de uma metodologia de estimação mais simples (com efeito: não haveria a necessidade de se estimar a matriz de covariância do erro – vide seção 4.3) e de que se obtenham estimadores não-tendenciosos do vetor de coeficientes β e expressões *corretas* dos EQMs teóricos dos estimadores das reservas. Inicialmente, note-se que, se $Var(\varepsilon) = \Sigma$, então

$$Var(\tilde{\beta}) = (X' X)^{-1} X' \Sigma X (X' X)^{-1}, \quad (14)$$

na qual $\tilde{\beta}$ é o usual estimador de MQO. Tendo a expressão (14) como bloco construtor, o Teorema 3 abaixo oferece as expressões para o EQM teórico da reserva decorrentes da abordagem de MQO, para o caso de uma matriz Σ geral. A prova do Teorema 3 encontra-se na subseção 4.5.2. O caso em que a mesma é diagonal é considerada no Corolário 3.

Teorema 3. *Seja o seguinte modelo de regressão*

$$Y = \begin{bmatrix} Y_o \\ Y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_o \\ X_A \end{bmatrix} \tilde{\beta} + \begin{bmatrix} \varepsilon_o \\ \varepsilon_A \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_o \\ \varepsilon_A \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_o & \Sigma_{oA} \\ \Sigma_{AO} & \Sigma_A \end{bmatrix} \right).$$

Sejam $\tilde{Y}_O = X_O \tilde{\beta}$ e $\tilde{Y}_A = X_A \tilde{\beta}$, nos quais $\tilde{\beta} = (X_O' X_O)^{-1} X_O' Y_O$. Seja ainda

$$Y^s = \sum_{j=1}^h Y_{i_j}, \text{ tal que } Y_{i_j} \in \{Y_i : Y_i \text{ é coordenada de } Y_A\}.$$

Definindo $\tilde{Y}^s = \sum_{j=1}^h \tilde{Y}_{i_j} = \sum_{j=1}^h x'_{i_j} \tilde{\beta}$, então

$$\begin{aligned} EQM(\tilde{Y}^s) \equiv E\left[(Y^s - \tilde{Y}^s)^2\right] &= \sum_{j=1}^h x'_{i_j} (X_O' X_O)^{-1} X_O' \Sigma_O X_O (X_O' X_O)^{-1} \sum_{j=1}^h x_{i_j} + \Pi' \Sigma \Pi - \\ &\quad - 2 \sum_{j=1}^h x'_{i_j} (X_O' X_O)^{-1} X_O [\Sigma_O \quad \Sigma_{OA}] \Pi, \end{aligned} \quad (15)$$

no qual $\Pi = [I_1, I_2, \dots, I_n]$, sendo que $I_j = \begin{cases} 1, & \text{se } j \in \{i_1, \dots, i_h\} \\ 0, & \text{se } j \notin \{i_1, \dots, i_h\} \end{cases}$.

Corolário 3: Sob as mesmas definições do Teorema 3, considerando $Var(\varepsilon)$ como sendo diagonal, então

$$EQM(\tilde{Y}^s) = \sum_{j=1}^h x_{i_j}' (X_O' X_O)^{-1} X_O' \Sigma_O X_O (X_O' X_O)^{-1} \sum_{j=1}^h x_{i_j} + \sum_{j=1}^h \sigma_{i_j}^2 \quad (16)$$

Nos estudos de caso desta Dissertação (Capítulo 6), serão apresentados, para fins de comparação, os resultados da estimação via MQO sem a incorporação da heterocedasticidade do erro (cf. expressão (13)) e com a incorporação desta estrutura (cf. expressão (16)), assim como os resultados obtidos via MQG (cf. expressão (12)).

4.3. Versões factíveis dos EQMs teóricos

As equações apresentadas em (11), (12), (13), (15) e (16) relativas ao cálculo dos EQMs teóricos e provadas na seção 4.5, apesar de serem soluções exatas para a obtenção destes, são pouco úteis na prática uma vez que elas compreendem quantidades desconhecidas: a matriz de variâncias e covariâncias.

Como em geral não é possível, em casos práticos, a obtenção do valor exato dessas mencionadas quantidades, devem ser adotados procedimentos de estimação das mesmas. As equações dos EQMs teóricos serão alteradas e, no caso apresentado em (11), será simbolicamente representada por

$$EQM(\hat{Y}_{MQGF}^s) \equiv E\left[\left(Y^s - \hat{Y}_{MQGF}^s\right)^2\right] = \sum_{j=1}^h x'_{ij} \left(X_o' \hat{\Sigma}_o^{-1} X_o\right)^{-1} \sum_{j=1}^h x_{ij} + \Pi' \hat{\Sigma} \Pi - \\ - 2 \sum_{j=1}^h x'_{ij} \left(X_o' \hat{\Sigma}_o^{-1} X_o\right)^{-1} X_o \hat{\Sigma}_o^{-1} \left[\hat{\Sigma}_o \quad \hat{\Sigma}_{oA}\right] \Pi. \quad (17)$$

Veja que o próprio estimador de Y^s , neste caso, é um estimador factível dado por: $\hat{Y}_{MQGF}^s = \sum_{j=1}^h \hat{Y}_{ij, MQGF} = \sum_{j=1}^h x'_{ij} \hat{\beta}_{MQGF}$, no qual $\hat{\beta}_{MQGF} = \left(X_o' \hat{\Sigma}_o^{-1} X_o\right)^{-1} X_o' \hat{\Sigma}_o^{-1} Y_o$.

Como dito antes, os resultados obtidos em (15) e (16) não são úteis na prática de forma que deve-se obter também uma versão factível do EQM teórico, o qual é simbolicamente apresentado abaixo:

$$EQM(\tilde{Y}_F^s) \equiv E\left[\left(Y^s - \tilde{Y}_F^s\right)^2\right] = \sum_{j=1}^h x'_{ij} \left(X_o' X_o\right)^{-1} X_o' \tilde{\Sigma}_o X_o \left(X_o' X_o\right)^{-1} \sum_{j=1}^h x_{ij} + \Pi' \tilde{\Sigma} \Pi - \\ - 2 \sum_{j=1}^h x'_{ij} \left(X_o' X_o\right)^{-1} X_o \left[\tilde{\Sigma}_o \quad \tilde{\Sigma}_{oA}\right] \Pi, \quad (18)$$

Verificou-se nos quatro triângulos modelados (vide Capítulo 6) – e em outros cujas modelagens não são neste texto reportadas – que a heterocedasticidade encontrada nos resíduos estava diretamente associada às colunas do triângulo – isto pode ser tomado como um importante *fato estilizado*, o que facilitaria a confecção de softwares para estimação de reserva. Mais especificamente, os resíduos indicaram que o termo do erro parece ter uma variância maior quando considerado em alguma das colunas iniciais, que correspondem aos pagamentos mais próximos das datas de ocorrência dos correspondentes sinistros. Dentro desta constatação, e supondo que não existem estruturas de correlação no termo do erro (a matriz Σ é diagonal)⁵, o estimador proposto das diferentes variâncias, a ser usado nas versões factíveis dos estimadores das reservas, no caso de estimação por MQG e de seus respectivos EQMs teóricos, será estratificado por coluna; considerar-se-á portanto a média

⁵ No entanto, tal conjectura deve ter sua presumida pertinência aferida por análise de diagnósticos.

amostral, por coluna, dos quadrados dos resíduos, obtidos primeiramente via estimação por MQO. Já para o caso de estimadores da reserva via MQO, as versões factíveis de seus EQMs teóricos serão baseadas na *matriz de White*, a qual não pressupõe a estimação da estrutura de heterocedasticidade, tampouco demandaria o conhecimento da mesma (cf. White, 1980; Johnston e DiNardo, 1997; e Greene, 2003).

Tendo em mente que as versões factíveis dos estimadores das reservas e de seus respectivos EQMs teóricos devem, preferencialmente, se comportar assintoticamente de forma similar às suas versões teóricas dadas em (12) e (16), a partir de agora será perseguida uma justificativa formal para o uso dos estimadores de variância propostos. Inicialmente, considere as seguintes condições de regularidade:

H1) *Existe uma partição* $\{I_1^{(n_o)}, \dots, I_K^{(n_o)}\}$ *de* $\{1, 2, \dots, n_o\}$ *e* $\bar{\sigma}_1^2, \dots, \bar{\sigma}_K^2$ *constantes positivas, tais que, para todo* $i = 1, \dots, n_o, n_o+1, \dots, n$, *existe* $k \in \{1, \dots, K\}$ *tal que* $\sigma_i^2 = \bar{\sigma}_k^2$; *também, para todo* $k=1, \dots, K$, $m_k \equiv \text{card } I_k^{(n_o)} \longrightarrow \infty$ *quando* $n_o \longrightarrow \infty$.

H2) *Os regressores em* X_o *são uniformemente limitados e tais que as seguintes condições são satisfeitas:*

$$i) \frac{X_o' X_o}{n_o} \longrightarrow Q_1 > 0 \text{ quando } n_o \longrightarrow \infty;$$

$$ii) \frac{X_o' \Sigma_o X_o}{n_o} = \frac{1}{n_o} \sum_{l=1}^{n_o} \sigma_l^2 x_l x_l' \longrightarrow Q^* > 0 \text{ quando } n_o \longrightarrow \infty;$$

$$iii) \frac{X_o' \Sigma_o^{-1} X_o}{n_o} = \frac{1}{n_o} \sum_{l=1}^{n_o} (\sigma_l^2)^{-1} x_l x_l' \longrightarrow \tilde{Q} > 0 \text{ quando } n_o \longrightarrow \infty.$$

H3) *Existem* $\delta', \Delta > 0$ *tais que* $E\left(|\varepsilon_i^2|^{1+\delta'}\right) < \Delta$.

A hipótese H1, dentro do contexto do triângulo, determina que a variância do termo do erro será diferente entre as colunas e igual dentro delas. Como o número de colunas do triângulo, quando este assume o formato de um trapézio

(vide seção 2.3), é menor do que o número de linhas, é possível expressar todas as variâncias do termo do erro em uma partição definida em H1 no sentido de que, mesmo que $n \rightarrow \infty$ (número de observações dentro do triângulo), a partição continuará sendo finita e expressará as variâncias do termo do erro para todas as observações da série. Já na hipótese H2, assume-se que os regressores em X_o são uniformemente limitados – no caso do triângulo, isto é facilmente verificado uma vez que todos os regressores são variáveis *dummies*. Esta mesma natureza dos dados também justifica o item (i) apresentado nesta hipótese. Já o item (ii) é demonstrado em White (1980). Outra observação muito importante é a de que, para que esta hipótese H2 possa ser adotada no contexto do triângulo, é impreterível supor que o efeito linha, com o passar dos anos de desenvolvimento (ou seja, com o aumento do número de dados referentes a novas linhas no triângulo), não requer *dummies* adicionais para contabilizar novas influências de anos futuros – isto é: não há aumento de colunas na matriz X_o , tampouco de parâmetros no vetor β). Por fim, a hipótese H3 significa que a variância do termo do erro não “explode” quando $n \rightarrow \infty$. Apesar de nem sempre na prática ser possível extrair validade estatística dos dados estudados de tal condição, em geral os indícios teóricos dão suporte a tal conjectura; por conseguinte, esta condição será doravante adotada.

Agora, é enunciado o teorema que constituirá condições suficientes para a desejável equivalência assintótica entre as versões teóricas e factíveis dos estimadores das reservas e de seus associados EQMs teóricos. Sua prova encontra-se na subseção 4.5.3 e tanto esta quanto o enunciado omitirão algumas óbvias dependências de n_o .

Teorema 4: *Considere as condições dos Corolários 1 e 3 e as hipóteses H1, H2 e*

H3. Então, se $\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{m_k} \sum_{l \in I_k} e_l^2$ quando $\sigma_i^2 = \bar{\sigma}_k^2$ para algum k , sendo

$$e_l = Y_l - x_l' \tilde{\beta}, \quad l \in I_k :$$

$$a) \sum_{j=1}^k \hat{\sigma}_{i_j}^2 - \sum_{j=1}^k \sigma_{i_j}^2 \xrightarrow{P} 0 ;$$

$$b) n_o \left(\sum_{j=1}^k x_{i_j}' (X_o' \hat{\Sigma}_o^{-1} X_o)^{-1} \sum_{j=1}^k x_{i_j} - \sum_{j=1}^k x_{i_j}' (X_o' \Sigma_o^{-1} X_o)^{-1} \sum_{j=1}^k x_{i_j} \right)$$

$$\equiv n_o \left(\sum_{j=1}^k x_{i_j}' \left(\sum_{l=1}^{n_o} (\hat{\sigma}_l^2)^{-1} x_l x_l' \right)^{-1} \sum_{j=1}^k x_{i_j} - \sum_{j=1}^k x_{i_j}' \left(\sum_{l=1}^{n_o} (\sigma_l^2)^{-1} x_l x_l' \right)^{-1} \sum_{j=1}^k x_{i_j} \right) \xrightarrow{P} 0.$$

c)

$$n_o \left(\sum_{j=1}^k x_{i_j}' (X_o' X_o)^{-1} (X_o' \tilde{\Sigma}_o X_o)^{-1} (X_o' X_o)^{-1} \sum_{j=1}^k x_{i_j} - \sum_{j=1}^k x_{i_j}' (X_o' X_o)^{-1} (X_o' \Sigma_o X_o)^{-1} (X_o' X_o)^{-1} \sum_{j=1}^k x_{i_j} \right)$$

$$\equiv n_o \left(\sum_{j=1}^k x_{i_j}' (X_o' X_o)^{-1} \left(\sum_{l=1}^{n_o} e_l^2 x_l x_l' \right) (X_o' X_o)^{-1} \sum_{j=1}^k x_{i_j} - \sum_{j=1}^k x_{i_j}' (X_o' X_o)^{-1} \left(\sum_{l=1}^{n_o} \sigma_l^2 x_l x_l' \right) (X_o' X_o)^{-1} \sum_{j=1}^k x_{i_j} \right) \xrightarrow{P} 0$$

Adicionando-se a hipótese de que $\varepsilon \sim N$, tem-se também que:

$$d) \frac{Y^s - \hat{Y}_{MQGF}^s}{\sqrt{EQM(\hat{Y}_{MQGF}^s)}} \xrightarrow{d} N(0,1) \text{ quando } n_o \longrightarrow \infty, \text{ sendo que}$$

$$EQM(\hat{Y}_{MQGF}^s) \equiv \sum_{j=1}^k x_{i_j}' \left(\sum_{l=1}^{n_o} (\hat{\sigma}_l^2)^{-1} x_l x_l' \right)^{-1} \sum_{j=1}^k x_{i_j} + \sum_{j=1}^k \hat{\sigma}_{i_j}^2;$$

$$e) \frac{Y^s - \tilde{Y}^s}{\sqrt{EQM(\tilde{Y}_F^s)}} \xrightarrow{d} N(0,1) \text{ quando } n_o \longrightarrow \infty, \text{ sendo que}$$

$$EQM(\tilde{Y}_F^s) \equiv \sum_{j=1}^k x_{i_j}' (X_o' X_o)^{-1} \left(\sum_{l=1}^{n_o} e_l^2 x_l x_l' \right) (X_o' X_o)^{-1} \sum_{j=1}^k x_{i_j} + \sum_{j=1}^k \hat{\sigma}_{i_j}^2.$$

Os itens (a), (b) e (c) do Teorema 4 indicam que os estimadores dos EQMs teóricos para as modelagens via MQG e MQO que incorporam a heterocedasticidade (este último utilizando a consagrada matriz de White $(X_o' X_o)^{-1} \left(\sum_{l=1}^{n_o} e_l^2 x_l x_l' \right) (X_o' X_o)^{-1}$ - cf. White, 1980; Johnston e DiNardo, 1997, cap. 6, Greene, 2003, cap. 10) são “consistentes”, no sentido de que há um comportamento assintoticamente similar às suas contrapartes teóricas – o problema prático encontrado na utilização desse estimador, no contexto de estimação de reserva IBNR, está relacionado ao baixo número de observações

disponíveis no triângulo (o que pode variar de seguradora para seguradora). Por fim, os itens (d) e (e), após checada a adequação da distribuição normal via análise de resíduos, permitem a construção de intervalos de predição para os diferentes tipos de reserva.

Apesar de os resultados obtidos no Teorema 4 serem assintóticos, os dados que serão utilizados na modelagem, como exaustivamente já dito nesta Dissertação, são limitados ao tamanho do triângulo que geralmente contém poucas informações nas últimas colunas. Em dois dos quatro casos analisados, a última coluna continha apenas um único valor válido, o que compromete a estimação da variância do termo do erro para esta coluna. Felizmente, como a magnitude dos valores de reserva nas últimas colunas costuma ser consideravelmente menor do que nas primeiras, é plausível supor que a subestimação ou superestimação dos mesmos pouco influenciará no cálculo das reservas por linhas, total e tempo de calendário. Em contrapartida, as reservas que apresentam melhores estimadores da heterocedasticidade do termo do erro estão mais à esquerda do triângulo (reservas de maior valor), pois estas colunas contêm mais observações que as demais que se encontram à esquerda.

4.4.

Algoritmo de modelagem e cálculo da reserva IBNR: análise de regressão

Verificou-se, durante este trabalho, certo padrão na modelagem dos dados do triângulo e que foram seguidos praticamente sem alterações. O algoritmo adotado na modelagem de quatro triângulos é mostrado a seguir:

1º Passo) Verificar, por meio de gráficos, a relação existente entre os valores dos sinistros e as variáveis indicadoras linha e coluna e possíveis comportamentos heterocedásticos *a priori* (que, obviamente, deverão ser confirmados por análise de resíduos).

2º Passo) Uma vez identificados indícios iniciais de relação entre as variáveis (o que costuma ser mais evidente em relação à variável coluna), estima-se o modelo de regressão proposto em (9) por MQO.

3º Passo) Verificar, de forma definitiva, a presença de heterocedasticidade nos resíduos, tanto de forma gráfica quanto mediante a prática de testes de heterocedasticidade.

4º Passo) Se não houver indícios nos resíduos que levariam a crer que exista heterogeneidade entre as variância dos erros, vá para o 7º Passo. Caso contrário, prossiga ao 5º Passo.

5º Passo) Re-estime os modelos mediante estimadores de MQGF, utilizando um candidato de estimador de variância (observação: os resíduos provenientes do método de MQO são impreterivelmente usados nesta etapa).

6º Passo) Verifique se a heterocedasticidade foi modelada e incorporada corretamente, através de análise dos resíduos padronizados. Em caso positivo, vá para o 7º Passo. Caso contrário, re-implemente o 5º Passo com uma outra candidata a estrutura de variância.

7º Passo) Faça testes de significância para os efeitos linha e coluna. Em caso de os dados não oferecerem indícios, em um nível de significância preestabelecido, favoráveis à relevância de algum dos efeitos, volte ao 2º Passo, mas, desta vez, com um modelo mais parcimonioso. Caso contrário, siga para o 8º Passo.

8º Passo) Calcule as medidas de ajuste do modelo, sendo que estas podem ser utilizadas para corroborar a escolha do melhor modelo.

9º Passo) Com o modelo mais adequado, calcule os três diferentes tipos de reserva e seus respectivos EQMs teóricos, utilizando as fórmulas factíveis previamente desenvolvidas na seção 4.3. O fluxograma apresentado na Figura 10 resume o algoritmo proposto.

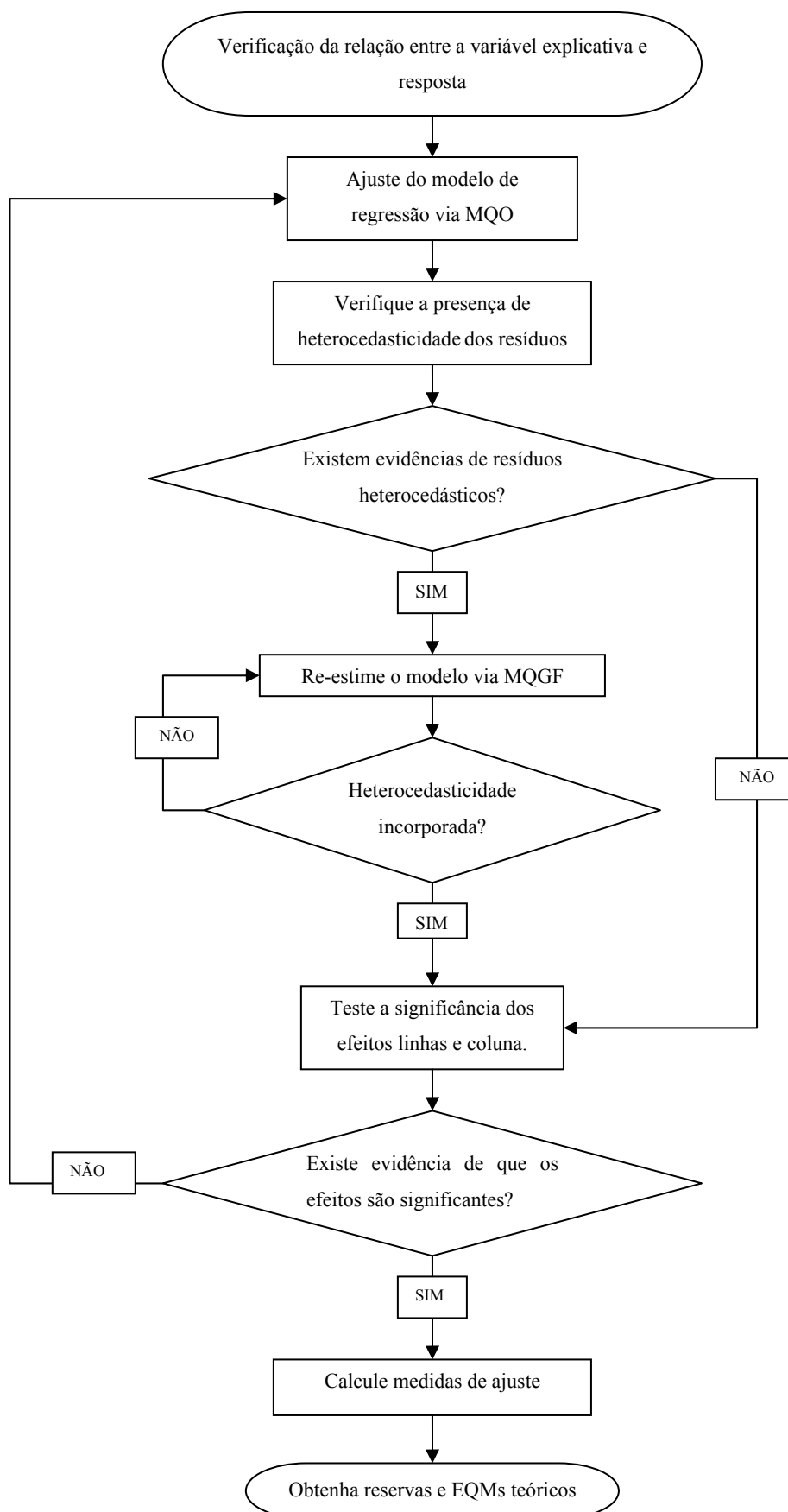


Figura 10. Fluxograma para ajuste do modelo de regressão.

4.5.

Apêndice: Provas

4.5.1.

Prova do Teorema 2

Primeiramente, veja que

$$E(Y^s - \hat{Y}^s) = E\left(\sum_{j=1}^h Y_{i_j} - \sum_{j=1}^h \hat{Y}_{i_j}\right) = \sum_{j=1}^h E(Y_{i_j}) - \sum_{j=1}^h E(\hat{Y}_{i_j}) = 0 \quad (\text{I})$$

Veja ainda que

$$\text{Var}(Y^s - \hat{Y}^s) = E\left[(Y^s - \hat{Y}^s)^2\right] = EQM(\hat{Y}^s),$$

sendo que a primeira igualdade sai por (I). Logo,

$$\begin{aligned} EQM(\hat{Y}^s) &= \text{Var}\left(\sum_{j=1}^h Y_{i_j} - \sum_{j=1}^h \hat{Y}_{i_j}\right) = \text{Var}\left(\sum_{j=1}^h (x_{i_j}'\beta + \varepsilon_{i_j}) - \sum_{j=1}^h x_{i_j}'\hat{\beta}\right) \\ &= \text{Var}\left(\sum_{j=1}^h x_{i_j}'(\beta - \hat{\beta}) + \mathbb{1}'\varepsilon\right) \\ &= \text{Var}\left(\sum_{j=1}^h x_{i_j}'(\beta - \hat{\beta})\right) + \text{Var}(\mathbb{1}'\varepsilon) + 2\text{Cov}\left(\sum_{j=1}^h x_{i_j}'(\beta - \hat{\beta}), \mathbb{1}'\varepsilon\right). \end{aligned} \quad (\text{II})$$

Resolvendo (II) por partes, segue-se que

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\sum_{j=1}^h x_{i_j}'(\beta - \hat{\beta})\right) &= \sum_{j=1}^h x_{i_j}' \text{Var}(\beta - \hat{\beta}) \sum_{j=1}^h x_{i_j} = \sum_{j=1}^h x_{i_j}' \text{Var}(\hat{\beta}) \sum_{j=1}^h x_{i_j} \\ &= \sum_{j=1}^h x_{i_j}' (X_o' \Sigma_o^{-1} X_o)^{-1} \sum_{j=1}^h x_{i_j}, \end{aligned} \quad (\text{III})$$

$$\text{Var}(\mathbb{1}'\varepsilon) = \mathbb{1}' \text{Var}(\varepsilon) \mathbb{1} = \mathbb{1}' \Sigma \mathbb{1},$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}\left(\sum_{j=1}^h x_{i_j}'(\beta - \hat{\beta}), \mathbb{1}'\varepsilon\right) &= \text{Cov}\left(\sum_{j=1}^h x_{i_j}'\beta - \sum_{j=1}^h x_{i_j}'\hat{\beta}, \mathbb{1}'\varepsilon\right) = \\ &= \text{Cov}\left(-\sum_{j=1}^h x_{i_j}'\hat{\beta}, \mathbb{1}'\varepsilon\right) = -\sum_{j=1}^h x_{i_j}' \text{Cov}(\hat{\beta}, \varepsilon) \mathbb{1} \\ &= -\sum_{j=1}^h x_{i_j}' \text{Cov}\left((X_o' \Sigma_o^{-1} X_o)^{-1} X_o \Sigma_o^{-1} Y_o, \varepsilon\right) \mathbb{1} \\ &= -\sum_{j=1}^h x_{i_j}' (X_o' \Sigma_o^{-1} X_o)^{-1} X_o \Sigma_o^{-1} \text{Cov}(Y_o, \varepsilon) \mathbb{1} \\ &= -\sum_{j=1}^h x_{i_j}' (X_o' \Sigma_o^{-1} X_o)^{-1} X_o \Sigma_o^{-1} \text{Cov}(X_o \beta + \varepsilon_o, \varepsilon) \mathbb{1} \\ &= -\sum_{j=1}^h x_{i_j}' (X_o' \Sigma_o^{-1} X_o)^{-1} X_o \Sigma_o^{-1} \text{Cov}(\varepsilon_o, \varepsilon) \mathbb{1}, \end{aligned}$$

$$= -\sum_{j=1}^h x_{i_j}' (X_o' \Sigma_o^{-1} X_o)^{-1} X_o \Sigma_o^{-1} [\Sigma_o \quad \Sigma_{oA}] \mathbf{I}. \quad (\text{IV}) \quad Q.E.D.$$

4.5.2.

Prova do Teorema 3

Análoga à prova do Teorema 2, sendo que, em (III) e (IV), $Var(\hat{\beta}) = (X_o' X_o)^{-1} X_o' \Sigma_o X_o (X_o' X_o)^{-1}$ e $Cov(\hat{\beta}, \varepsilon_o) = Cov((X_o' X_o)^{-1} X_o' Y_o, \varepsilon_o)$.
Q.E.D.

4.5.3.

Prova do Teorema 4

a) Seja $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ arbitrário. Por H1, $\sigma_{i_j}^2 = z_{i_j}' \bar{\sigma}^2$, sendo que z_{i_j} é um vetor de dimensão K , tal que sua k -ésima coordenada é igual a 1 se $\sigma_{i_j}^2 = \bar{\sigma}_k^2$ e as demais coordenadas são nulas; além disso, $\bar{\sigma}^2 \equiv (\bar{\sigma}_1^2, \dots, \bar{\sigma}_K^2)'$. Além disso, note que $\hat{\sigma}_i^2$ é o estimador de MQO de $\bar{\sigma}_i^2$ da regressão dos quadrados de $\tilde{\varepsilon}_o \equiv Y_o - X_o \tilde{\beta}_{MQO}$ em $Z_i = [z_1, \dots, z_K]$, sendo que z_k é um vetor de *dummies* associado a I_k , $k = 1, 2, \dots, K$. Como $\hat{\sigma}_i^2 \xrightarrow{P} \bar{\sigma}_i^2$ para todo i (vide Amemiya, 1977; ou Hayashi, 2000, pg. 170) e como $\hat{\sigma}_{i_j}^2 = \hat{\sigma}_i^2$ para algum i (cf. H1), então o resultado decorre de preservação de convergência em probabilidade por somas.

b) Como a matriz $\sum_{j=1}^k x_{i_j}$ é independente de n_o , é suficiente mostrar que

$$\frac{X_o' \hat{\Sigma}_o^{-1} X_o - X_o' \Sigma_o^{-1} X_o}{n_o} \xrightarrow{P} 0. \quad (\text{V})$$

Implementando: Por H1, o bloco referente a Y_o do modelo de regressão dos Teoremas 1 e 2 e respectivos corolários pode ser re-ordenado da forma .

$$\begin{bmatrix} \hat{Y}_{o,1,m_1 \times 1} \\ \hat{Y}_{o,2,m_2 \times 1} \\ \vdots \\ \hat{Y}_{o,K,m_K \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{X}_{o,1,m_1 \times p} \\ \hat{X}_{o,2,m_2 \times p} \\ \vdots \\ \hat{X}_{o,K,m_K \times p} \end{bmatrix} \beta + \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_{o,1,m_1 \times 1} \\ \hat{\varepsilon}_{o,2,m_2 \times 1} \\ \vdots \\ \hat{\varepsilon}_{o,K,m_K \times 1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_{o,1,m_1 \times 1} \\ \hat{\varepsilon}_{o,2,m_2 \times 1} \\ \vdots \\ \hat{\varepsilon}_{o,K,m_K \times 1} \end{bmatrix} \sim \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_1^2 I_{m_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}_2^2 I_{m_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \bar{\sigma}_K^2 I_{m_K} \end{bmatrix} \right). \quad (\text{VI})$$

Usando a nova ordenação de (VI), tem-se que:

$$\begin{aligned}
 X_o' \Sigma_o^{-1} X_o &= \sum_{l=1}^{n_o} \sigma_l^{-2} x_l x_l' = \sum_{l_1=1}^{m_1} \bar{\sigma}_{l_1}^{-2} \hat{x}_{o,l_1} \hat{x}_{o,l_1}' + \dots + \sum_{l_k=1}^{m_K} \bar{\sigma}_{l_k}^{-2} \hat{x}_{o,l_k} \hat{x}_{o,l_k}' \\
 &= \bar{\sigma}_1^{-2} \sum_{l_1=1}^{m_1} \hat{x}_{o,l_1} \hat{x}_{o,l_1}' + \dots + \bar{\sigma}_K^{-2} \sum_{l_k=1}^{m_K} \hat{x}_{o,l_k} \hat{x}_{o,l_k}' \\
 &= \bar{\sigma}_1^{-2} \hat{X}_{o,1}' \hat{X}_{o,1} + \dots + \bar{\sigma}_K^{-2} \hat{X}_{o,K}' \hat{X}_{o,K} = \sum_{k=1}^K \bar{\sigma}_k^{-2} \hat{X}_{o,k}' \hat{X}_{o,k}. \tag{VII}
 \end{aligned}$$

Analogamente, tem-se também que

$$X_o' \hat{\Sigma}_o^{-1} X_o = \sum_{k=1}^K \hat{\sigma}_k^{-2} \hat{X}_{o,k}' \hat{X}_{o,k}. \tag{VIII}$$

Por (VII) e (VIII),

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n_o} (X_o' \hat{\Sigma}_o^{-1} X_o - X_o' \Sigma_o^{-1} X_o) &= \frac{1}{n_o} \sum_{k=1}^K (\hat{\sigma}_k^{-2} - \bar{\sigma}_k^{-2}) \hat{X}_{o,k}' \hat{X}_{o,k} \\
 &= \sum_{k=1}^K (\hat{\sigma}_k^{-2} - \bar{\sigma}_k^{-2}) \frac{\hat{X}_{o,k}' \hat{X}_{o,k}}{n_o} \xrightarrow{P} 0,
 \end{aligned}$$

sendo que a convergência em probabilidade decorre de, dado qualquer $k \in \{1, \dots, K\}$, $\hat{\sigma}_k^{-2} \xrightarrow{P} \bar{\sigma}_k^{-2}$ (cf. item (a) e preservação de convergência em probabilidade por funções contínuas) e $\hat{X}_{o,k}' \hat{X}_{o,k} = O(n_o)$ (de fato, pois

$$0 < \frac{\hat{X}_{o,k}' \hat{X}_{o,k}}{n_o} \leq \frac{\sum_{k=1}^K \hat{X}_{o,k}' \hat{X}_{o,k}}{n_o} = \frac{X_o' X_o}{n_o} \xrightarrow{Q} \text{quando } n_o \longrightarrow \infty).$$

c) Como X_o é formado por regressores fixos e limitados uniformemente, e sob a validade de H3, então (cf. Woodridge, 2000, cap. 8, pg. 250 e Greene, 2003, cap.10, pg. 199 *apud* White, 1980):

$$n_o \left((X_o' X_o)^{-1} (X_o' \tilde{\Sigma}_o X_o) (X_o' X_o)^{-1} - (X_o' X_o)^{-1} (X_o' \Sigma_o X_o) (X_o' X_o)^{-1} \right) \xrightarrow{P} 0.$$

Conseqüentemente, o resultado decorre trivialmente de a matriz $\sum_{j=1}^k x_{i_j}$ ser independente de n_o .

d) Sob a hipótese adicional de normalidade de ε , segue-se que $\hat{\beta}_{MQG} \sim N(\beta, (X_o' \Sigma_o^{-1} X_o)^{-1})$. Então, utilizando o Teorema 2, temos que $Y^s - \hat{Y}^s \sim N(0, EQM(\hat{Y}^s))$ para todo n_o , ou equivalentemente

$$\frac{Y^s - \hat{Y}^s}{\sqrt{EQM(\hat{Y}^s)}} \sim N(0,1) \text{ para todo } n_o. \quad (\text{IX})$$

Além disso, pela re-ordenação proposta na prova do item (b), tem-se que

$$\begin{aligned} X_o' \Sigma_o^{-1} \varepsilon_o &= \sum_{l=1}^{n_o} \sigma_l^{-2} x_l \varepsilon_l = \sum_{l_1=1}^{m_1} \hat{\sigma}_{l_1}^{-2} \hat{x}_{o,l_1} \hat{\varepsilon}_{o,l_1} + \dots + \sum_{l_k=1}^{m_k} \hat{\sigma}_{l_k}^{-2} \hat{x}_{o,l_k} \hat{\varepsilon}_{o,l_k} \\ &= \bar{\sigma}_1^{-2} \sum_{l_1=1}^{m_1} \hat{x}_{o,l_1} \hat{\varepsilon}_{o,l_1} + \dots + \bar{\sigma}_K^{-2} \sum_{l_k=1}^{m_k} \hat{x}_{o,l_k} \hat{\varepsilon}_{o,l_k} \\ &= \bar{\sigma}_1^{-2} \hat{X}_{o,1}' \hat{\varepsilon}_{o,1} + \dots + \bar{\sigma}_K^{-2} \hat{X}_{o,K}' \hat{\varepsilon}_{o,K} = \sum_{k=1}^K \bar{\sigma}_k^{-2} \hat{X}_{o,k}' \hat{\varepsilon}_{o,k} \end{aligned} \quad (\text{X})$$

e, analogamente,

$$X_o' \hat{\Sigma}_o^{-1} \varepsilon_o = \sum_{k=1}^K \hat{\sigma}_k^{-2} \hat{X}_{o,k}' \hat{\varepsilon}_{o,k} \quad (\text{XI})$$

Por (X) e (XI),

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_o} (X_o' \hat{\Sigma}_o^{-1} \varepsilon_o - X_o' \Sigma_o^{-1} \varepsilon_o) &= \frac{1}{n_o} \sum_{k=1}^K (\hat{\sigma}_k^{-2} - \bar{\sigma}_k^{-2}) \hat{X}_{o,k}' \hat{\varepsilon}_{o,k} \\ &= \sum_{k=1}^K (\hat{\sigma}_k^{-2} - \bar{\sigma}_k^{-2}) \frac{\hat{X}_{o,k}' \varepsilon_{o,k}}{n_o} \xrightarrow{P} 0, \end{aligned} \quad (\text{XII})$$

pois, para cada $k = 1, 2, \dots, K$, $\hat{\sigma}_k^{-2} \xrightarrow{P} \bar{\sigma}_k^{-2}$ e $\hat{X}_{o,k}' \hat{\varepsilon}_{o,k} = o(n_o)$ (de fato, pois

$$E\left(\frac{1}{n_o} \hat{X}_{o,k}' \hat{\varepsilon}_{o,k}\right) = 0 \text{ e}$$

$$\begin{aligned} 0 \leq \text{Var}\left(\frac{1}{n_o} \hat{X}_{o,k}' \hat{\varepsilon}_{o,k}\right) &\leq \text{Var}\left(\frac{1}{n_o} \sum_{k=1}^K X_{o,k}' \varepsilon_{o,k}\right) = \text{Var}\left(\frac{1}{n_o} X_o' \varepsilon_o\right) \\ &= \frac{1}{n_o^2} X_o' \Sigma_o^{-1} X_o = \frac{1}{n_o} \left(\frac{1}{n_o} X_o' \Sigma_o^{-1} X_o\right) \longrightarrow 0 \tilde{Q} = 0 \text{ quando } n_o \longrightarrow \infty; \text{ cf. H2).} \end{aligned}$$

Por (V) associado ao item (b) e por (XII), segue-se, de Greene (2003) sec.10.5.2 ou Davidson e Mackinnon (2004) sec.7.4, que $\hat{\beta}_{MQGF} - \hat{\beta}_{MQG} \xrightarrow{P} 0$.

Agora, escreva

$$\begin{aligned}
\frac{Y^s - \hat{Y}_{MQGF}^s}{\sqrt{EQM(\hat{Y}_{MQGF}^s)}} &= \left(\frac{Y^s - \hat{Y}_{MQGF}^s}{\sqrt{EQM(\hat{Y}_{MQGF}^s)}} - \frac{Y^s - \hat{Y}_{MQGF}^s}{\sqrt{EQM(\hat{Y}^s)}} \right) + \left(\frac{Y^s - \hat{Y}_{MQGF}^s}{\sqrt{EQM(\hat{Y}^s)}} - \frac{Y^s - \hat{Y}^s}{\sqrt{EQM(\hat{Y}^s)}} \right) + \frac{Y^s - \hat{Y}^s}{\sqrt{EQM(\hat{Y}^s)}} \\
&= (Y^s - \hat{Y}_{MQGF}^s) \frac{\sqrt{EQM(\hat{Y}^s)} - \sqrt{EQM(\hat{Y}_{MQGF}^s)}}{\sqrt{EQM(\hat{Y}_{MQGF}^s)}EQM(\hat{Y}^s)} + \frac{\hat{Y}^s - \hat{Y}_{MQGF}^s}{\sqrt{EQM(\hat{Y}^s)}} + \frac{Y^s - \hat{Y}^s}{\sqrt{EQM(\hat{Y}^s)}}.
\end{aligned}
\tag{XIII}$$

Como $Y^s - \hat{Y}_{MQGF}^s \xrightarrow{P} \sum_{j=1}^k \varepsilon_{ij}$, uma vez que $\hat{\beta}_{MQGF} \xrightarrow{P} \beta$ (pois

$\hat{\beta}_{MQGF} - \hat{\beta}_{MQG} \xrightarrow{P} 0$ e, por H2, $\hat{\beta}_{MQG} \xrightarrow{P} \beta$), e

$$\frac{\sqrt{EQM(\hat{Y}^s)} - \sqrt{EQM(\hat{Y}_{MQGF}^s)}}{\sqrt{EQM(\hat{Y}_{MQGF}^s)}EQM(\hat{Y}^s)} \xrightarrow{P} 0 \text{ (use os itens (a) e (b) e a preservação de}$$

convergência em probabilidade por funções contínuas), então, pelo Teorema de Slutsky (cf. Shao, 2003), a primeira parcela depois da segunda igualdade de (XIII) converge em probabilidade para zero. Juntando com os fatos de que

$$\frac{\hat{Y}^s - \hat{Y}_{MQGF}^s}{\sqrt{EQM(\hat{Y}^s)}} \xrightarrow{P} 0 \text{ (novamente pelo fato de que } \hat{\beta}_{MQGF} - \hat{\beta}_{MQG} \xrightarrow{P} 0 \text{) e,}$$

trivialmente, $\frac{Y^s - \hat{Y}^s}{\sqrt{EQM(\hat{Y}^s)}} \xrightarrow{d} N(0,1)$ (por (IX)), e aplicando o Teorema de

Slutsky novamente, obtém-se o resultado desejado.

e) Análoga à do item (d), bastando apenas substituir \hat{Y}_{MQGF}^s por \tilde{Y}^s e

$EQM(\hat{Y}_{MQGF}^s)$ por $EQM(\tilde{Y}^s)$, e lembrar que $\tilde{\beta} \xrightarrow{P} \beta$ conforme H2. *Q.E.D.*