2
Triângulo de runoff

2.1.
Conceitos básicos

Os dados de sinistros IBNR geralmente são dispostos em formato de um triângulo chamado de *triângulo de runoff* (cf. de Jong e Zehnwirth, 1983; Verrall, 1989; Atherino, 2005; de Jong e Heller, 2008; e Atherino et al., 2010), o qual é esboçado na Figura 1. Nesta, as linhas representam o instante de ocorrência do sinistro e as colunas representam o tempo de atraso desde a ocorrência até a efetivação do pagamento e a ordenação dos dados é denominada de ordenação de duplo índice. Clarificando um pouco mais: os valor $C_{i,j}$ no triângulo representam o valor pago pela seguradora relativo a sinistros ocorridos no ano i mas que foram pagos com j instantes de tempo de atraso – obviamente, se j = 0, não houve atraso. A freqüência dos dados pode ser anual, bimestral, trimestral, mensal etc., de acordo com o ramo no qual a seguradora atua e com relação às necessidades da mesma.

Ano de Origem	Desenvolvimento *d*				
W	0	1	2	...	$J-1$
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	...	$C_{1,(J-1)}$
2	$C_{2,0}$	$C_{2,1}$	...	$C_{2,(J-2)}$	
3	$C_{3,0}$	⋮			
⋮	⋮	⋮			
⋮	⋮	$C_{(J-1),1}$			
J	$C_{J,0}$				

Figura 1. O triângulo de runoff na ordenação usual de duplo índice.

O objetivo inicial de grande parte da literatura sobre estimação de reservas do tipo IBNR é "preencher" a parte de baixo do triângulo – vide Figura 2. Estes valores, a serem estimados, são propriamente denominados de IBNR, ou seja, que já ocorreram mas que ainda não foram informados à seguradora.

Ano de Origem	Desenvolvimento *d*					
w	0	1	2	...	...	$J-1$
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	...	...	$C_{1,(J-1)}$
2	C_{20}	C_{21}	⋮	...	$C_{2,(J-2)}$	$C_{2,(J-1)}$
3	C_{30}	⋮	⋮	...	$C_{3,(J-2)}$	$C_{3,(J-1)}$
⋮	⋮	⋮	...		$C_{4,(J-2)}$	...
J-1	$C_{(J-1),0}$	$C_{(J-1),1}$	$C_{(J-1),2}$	...	...	...
J	$C_{J,0}$	$C_{J,1}$	$C_{J,2}$	...	$C_{J,(J-2)}$	$C_{J,(J-1)}$

Figura 2. Triângulo de runoff com valores observados e os valores a serem estimados (em sombreado).

Observe que a reserva que deverá ser formada pela seguradora para determinado instante de tempo será a soma das reservas por diagonal conforme mostrado na Figura 3 abaixo.

Ano de Origem	Desenvolvimento *d*					
w	0	1	2	...	...	$J-1$
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	...	...	$C_{1,(J-1)}$
2	$C_{2,0}$	$C_{2,1}$	⋮	...	$C_{2,(J-2)}$	$C_{2,(J-1)}$
3	$C_{3,0}$	⋮	⋮	...	$C_{3,(J-2)}$	$C_{3,(J-1)}$
⋮	⋮	⋮	...		$C_{4,(J-2)}$	...
J-1	$C_{(J-1),0}$	$C_{(J-1),1}$	$C_{(J-1),2}$	...	...	...
J	$C_{J,0}$	$C_{J,1}$	$C_{J,2}$	...	$C_{J,(J-2)}$	$C_{J,(J-1)}$

Figura 3. Reserva total formada pela seguradora por ano de calendário.

2.2.
Adição do efeito cauda

Caso a informação utilizada pela seguradora para formar a sua reserva para um determinado instante de tempo seja baseada apenas no que foi descrito na Figura 3, a seguradora poderá estar subestimando o real valor da reserva a ser formada, pois ela estaria assumindo que não existe nenhum valor a ser pago de sinistro que ocorreu na *i*-ésima linha mas que será avisado com *J* instantes de tempo ou mais de atraso. A subestimação da reserva pode causar problemas de insolvência para a seguradora, o que transfere importância a uma concertada extrapolação/estimação da previsão para valores que estão além da *J*-1-ésima coluna do triângulo. Os valores correspondentes a essa extrapolação à direita são justamente o que se chama de *efeito cauda* ou, de forma mais direta, *cauda* (cf.

Verrall, 2000; England e Verrall, 2001; Atherino, 2005), e são ilustrados na Figura 4.

Ano de Origem	Desenvolvimento d						Efeito Cauda			
w	0	1	2	...	...	$J-1$	J	$J+1$	...	$J+n$
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	...	...	$C_{1,(J-1)}$	$C_{1,J}$	$C_{1,(J+1)}$	...	$C_{1,(J+n)}$
2	$C_{2,0}$	$C_{2,1}$	⋮	...	$C_{2,(J-2)}$	$C_{2,(J-1)}$	$C_{2,J}$	$C_{2,(J+1)}$	...	$C_{2,(J+n)}$
3	$C_{3,0}$	⋮	⋮	...	$C_{3,(J-2)}$	$C_{3,(J-1)}$	$C_{3,J}$	$C_{3,(J+1)}$	...	$C_{3,(J+n)}$
⋮	⋮	⋮	...		$C_{4,(J-2)}$	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
J-1	$C_{(J-1),0}$	$C_{(J-1),1}$	$C_{(J-1),2}$	...	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
J	$C_{J,0}$	$C_{J,1}$	$C_{J,2}$	...	$C_{J,(J-2)}$	$C_{J,(J-1)}$	$C_{J,J}$	$C_{J,(J+1)}$	...	$C_{J,(J+n)}$

Figura 4. O triângulo de runoff adicionando um efeito cauda genérico com até n+1 instantes de tempo de atraso.

A reserva total que a seguradora deverá formar no instante de tempo $J + 1$ deverá ser feita utilizando a soma das reservas da diagonal J+1, como sugerido na Figura 3, acrescentando-se os valores da cauda (mostrados na Figura 4). Além disso, propõe-se também uma extensão do efeito linha, relativo ao futuro, para o qual também evidencia-se um efeito cauda. Esta extensão do efeito linha, e conseqüentemente do conceito de cauda (cf. Figura 5), não é encontrada em nenhuma literatura citada neste trabalho, o que faz com que sejam tecidas algumas observações.

Os valores presentes na extensão do efeito linha representam sinistros "*IBNR futuros*", ou seja, sinistros que ocorrerão e, por algum motivo, não serão imediatamente informados à seguradora. Estas reservas, conforme definição feita pela literatura, já revisitada no Capítulo 1, não podem ser chamadas de reserva IBNR, pois elas ainda não ocorreram. No entanto, a previsão de alguns destes valores são de interesse da seguradora, uma vez que eles constituem parte da reserva total que a seguradora deverá formar no próximo instante de tempo.

Não é prudente que se faça uma extrapolação do efeito linha por horizontes muito longos, pois o poder preditivo dos modelos propostos pode ser fortemente comprometido, dado que as variáveis explicativas, geralmente utilizadas para modelagem de sinistros IBNR, não contêm informações quanto a mudanças de política da empresa e nem da economia. Neste trabalho, o efeito linha será extrapolado apenas para um instante de tempo (m =1; cf. Figura 5).

Ano de Origem	Desenvolvimento d						Efeito cauda			
w	0	1	2	...	...	J - 1	J	J + 1	...	J + n
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	...	...	$C_{1,(J-1)}$	$C_{1,J}$	$C_{1,(J+1)}$	...	$C_{1,(J+n)}$
2	$C_{2,0}$	$C_{2,1}$	⋮	...	$C_{2,(J-2)}$	$C_{2,(J-1)}$	$C_{2,J}$	$C_{2,(J+1)}$	...	$C_{2,(J+n)}$
3	$C_{3,0}$	⋮	⋮	...	$C_{3,(J-2)}$	$C_{3,(J-1)}$	$C_{3,J}$	$C_{3,(J+1)}$	...	$C_{3,(J+n)}$
⋮	⋮	⋮	...		$C_{4,(J-2)}$	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
J-1	$C_{(J-1),0}$	$C_{(J-1),1}$	$C_{(J-1),2}$	...	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
J	$C_{J,0}$	$C_{J,1}$	$C_{J,2}$	...	$C_{J,(J-2)}$	$C_{J,(J-1)}$	$C_{J,J}$	$C_{J,(J+1)}$	...	$C_{J,(J+n)}$
J + 1	$C_{(J+1),1}$	$C_{(J+1),2}$				...				$C_{(J+1),(J+n)}$
J + 2	$C_{(J+2),2}$	$C_{(J+2),3}$				...				$C_{(J+2),(J+n)}$
⋮	⋮		⋮							⋮
J + m	$C_{(J+m),4}$	$C_{(J+m),5}$				...				$C_{(J+m),(J+n)}$

Figura 5. O triângulo de runoff com o efeitos cauda usual e originado da extensão do efeito linha.

2.3. Extensões da forma básica do triângulo de runoff

O triângulo de runoff é apresentando em algumas literaturas com o formato de um *trapézio*, como considerado por Doray (1994), Taylor (2000), Taylor e McGuire (2004) e conforme ilustrado na Figura 6. As extensões de cauda, mostradas nas Figuras 4 e 5, também são, *a priori*, aplicáveis neste novo formato do triângulo, salvo maior juízo quando, como discutido por alguns autores (e.g. Taylor, 2000), os valores à direita do trapézio são sabidamente iguais a zero.

Uma vantagem clara para este tipo de dado, em relação ao triângulo de runoff, é que essa nova estrutura apresenta um número maior de valores na última coluna, o que contribui muito no processo de estimação de modelos estatísticos – vide, por exemplo, a seção 4.3 que lida com estimações factíveis tanto da reserva quanto do erro médio quadrático associado, no âmbito de modelos de regressão.

Ano de Origem	Desenvolvimento d						
ω	0	1	2	3	...	J - 2	J - 1
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	$C_{1,3}$	...	...	$C_{1,(J-1)}$
2	$C_{2,0}$	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	$C_{2,3}$	...	...	$C_{2,(J-1)}$
3	$C_{3,0}$	⋮		...		...	$C_{3,(J-1)}$
⋮	⋮	⋮			...		⋮
p	$C_{p,0}$	⋮		...		$C_{p,(J-2)}$	$C_{p,(J-1)}$
p+1	$C_{(p+1),0}$			...		$C_{(p+1),(J-2)}$	
⋮	⋮	⋮					
⋮	⋮	$C_{(J-1),1}$					
J	$C_{J,0}$						

Figura 6. Formato de trapézio do triângulo de runoff na ordenação usual de duplo índice.

2.4. Diferentes ordenações do triângulo de runoff

Os valores do triângulo de runoff, conforme apresentado até agora, indicam valores do sinistro pago pela seguradora que ocorreram na i-ésima data mas com j instantes de tempo de atraso. Esses dados também poderiam ser apresentados de forma acumulada por linha como mostrado na Figura 7 abaixo.

Ano de Origem	Desenvolvimento d				
w	0	1	2	...	J – 1
1	$D_{1,0}$	$D_{1,1}$	$D_{1,2}$	...	$D_{1,(J-1)}$
2	$D_{2,0}$	$D_{2,1}$	...	$D_{2,(J-2)}$	
3	$D_{3,0}$	⋮			
⋮	⋮	⋮			
⋮	⋮	$D_{(J-1),1}$			
J	$D_{J,0}$				

Figura 7. Triângulo de runoff na ordenação usual de duplo índice e valores acumulados por linha.

Os valores $D_{i,j}$ representam as somas dos sinistros IBNR por linhas, ou seja,

$$D_{i,j} = \sum_{k=0}^{j} C_{i,k}.$$

A ordenação dos dados (acumulados ou não) pode ser feito por coluna, ou seja, assume-se uma estrutura dos dados partindo da primeira coluna, seguindo-se para a segunda e assim por diante. Alguns autores como Kremer (1982), Mack

(1994) e Taylor (2000) utilizam esta ordenação dos dados, no contexto do chain ladder.

Os dados do triângulo podem ainda ser ordenados por diagonal (mantendo-se a leitura dos dados por mesmo instante de calendário) similares ao formato apresentado na Figura 3. Este tipo de ordenação é utilizado pela literatura dentro da abordagem de espaço de estado estudada em de Jong e Zehnwirth (1983) e Verrall (1989), e representam uma série *p*-variada, sendo que *p* varia com o tempo (veja Figura 8 abaixo).

Ano de Origem	Desenvolvimento *d*				
w	0	1	2	...	*J* - 1
1	$Y_{0(1)}$	$Y_{1(2)}$	$Y_{2(3)}$	...	$Y_{J-1(J)}$
2	$Y_{0(2)}$	$Y_{1(3)}$	...	$Y_{J-2(J)}$	
3	$Y_{0(3)}$	⋮			
⋮	⋮	⋮			
⋮	⋮	$Y_{1(J)}$			
J	$Y_{0(J)}$				

Figura 8. Triângulo de runoff na ordenação por tempo de calendário.

A série formada nesta ordenação contém todas as reservas que estão no mesmo tempo de calendário e são utilizadas pelos autores citados da seguinte forma:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} Y_0(t) \\ Y_1(t) \\ \vdots \\ Y_{t-1}(t) \end{bmatrix}$$

Finalmente, a última ordenação encontrada é proposta por Atherino et al. (2010) e é ilustrada na Figura 9 abaixo.

Ano de Origem	Desenvolvimento *d*				
w	0	1	2	...	*J* - 1
1	Y_1	Y_2	Y_3	...	Y_J
2	Y_{J+1}	Y_{J+2}	...	Y_{2J-1}	Y_{2J}
3	Y_{2J+1}	Y_{2J+1}	...	Y_{3J-1}	Y_{3J}
⋮		⋮			⋮
⋮		⋮			
J	$Y_{(J-1)J+1}$		...		Y_J^2

Figura 9. Triângulo de runoff ordenado por linha.

Nesta ordenação *por linhas*, os dados do triângulo representam uma série temporal univariada, e algumas estruturas podem ser observadas. Como se espera que os valores dos sinistros mais próximos às primeiras colunas sejam significativamente maiores que os sinistros observados nas últimas colunas, os dados dispostos nesta ordenação apresentam uma estrutura na forma de uma periodicidade bem definida.[2]

2.5.
Tipos de reserva calculados

Nesta Dissertação, como já breve e parcialmente discutido na seção 2.1, definem-se três tipos de reserva: a reserva por linha, a reserva total, e a reserva por ano de calendário.

A *reserva por linhas* é considerada por quase toda a literatura (cf. Kremer, 1982; Mack, 1993; Verral, 1994; England e Verrall, 1998; Renshaw e Verrall, 1998; Taylor, 2000; England e Verrall, 2002 e Atherino et al., 2010), inclusive a que considera os dados acumulados (vide seção 2.4). Ela representa a soma das reservas cuja ocorrência se deu em um determinado ano *i*, representado por apropriada linha do triângulo (vide Figura 1). A *reserva total* é utilizada por England e Verrall (2000) e Atherino et al. (2010) e representa a soma de todas as reservas a serem estimadas (vide Figura 2). Por fim, a *reserva por ano de calendário*[3] é constituída pela totalidade das reservas a serem formadas no mesmo ano de calendário (vide Figura 3).

Nas aplicações desta Dissertação (capítulo 6), estes três tipos de reserva serão calculados pelas abordagens desenvolvidas, interpretadas quanto às suas magnitudes, e avaliadas, através dos EQMs teóricos, quanto às suas correspondentes precisões *"model based"*.

---

[2] Maiores detalhes no capítulo 5.
[3] A expressão "ano de calendário" é motivada pelo fato de a freqüência anual ser comumente considerada pela literatura. Contudo, a freqüência dos dados poderia ser bimestral, trimestral, semestral etc.