

3

O método de Shepard baseado em núcleos

O objetivo desse capítulo é o de apresentar uma proposta de modificação do método de Shepard. Essa modificação consiste em usar distâncias calculadas através de núcleos ao invés da distância euclidiana. Inicialmente é apresentado o método de Shepard original, e posteriormente uma proposta de modificação.

3.1

O método de Shepard

O *método de Shepard* é um método de interpolação bastante conhecido pela sua simplicidade. Ele foi proposto por Donald Shepard em 1968 no artigo (11).

Seja $\mathcal{S} = \{(\mathbf{x}_1, f_1), (\mathbf{x}_2, f_2), \dots, (\mathbf{x}_N, f_N)\}$ um conjunto de pares de pontos, onde $f_i \in \mathbb{R}$ corresponde ao valor de uma função f amostrada no ponto $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, para $i = 1 \dots N$. Considere ainda, que os pontos \mathbf{x}_i são distintos, isto é $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{x}_j$, para $i \neq j$.

A interpolação dos dados contidos no conjunto \mathcal{S} pelo *método de Shepard* é feita através da seguinte fórmula:

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) f_i, \quad (3-1)$$

onde $w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = \frac{\delta^{-p}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)}{\sum_{j=1}^N \delta^{-p}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j)}$, $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|$, e $p \in \mathbb{N}$ é o único parâmetro para o método.

Na realidade os coeficientes $w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)$ podem ser reescritos na seguinte forma:

$$w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = \frac{\delta^{-p}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)}{\sum_{j=1}^N \delta^{-p}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j)} = \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^N \delta^p(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j)}{\sum_{k=1}^N \prod_{j=1}^N \delta^p(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j)} \quad (3-2)$$

O método de Shepard tem diversas propriedades interessantes. Para começar, vale notar que $\sum_{i=1}^N w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = 1$ para qualquer vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $0 \leq w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \leq 1$ para qualquer vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e qualquer $i \in \{1, \dots, N\}$. Com isso, pode-se concluir que o método de Shepard é de fato uma média ponderada dos valores f_i .

Com essas propriedades, fica fácil mostrar que o conjunto imagem da

função \hat{f} é o intervalo $[\min_{i=1..N} f_i, \max_{i=1..N} f_i]$:

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) f_i \geq \sum_{i=1}^N w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) (\min_{i=1..N} f_i) = (\min_{i=1..N} f_i) \sum_{i=1}^N w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = \min_{i=1..N} f_i,$$

e da mesma forma,

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) f_i \leq \sum_{i=1}^N w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) (\max_{i=1..N} f_i) = (\max_{i=1..N} f_i) \sum_{i=1}^N w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = \max_{i=1..N} f_i.$$

O método de Shepard é bastante simples de se implementar porém possui uma característica que pode ser indesejável para um método interpolação, é que a função interpoladora geralmente gera extremos locais nos pontos \mathbf{x}_i . (veja como exemplo a figura 3.1). O próprio Shepard em seu trabalho original sugeriu que quando fossem também disponíveis informações sobre a primeira derivada Df_i em cada ponto \mathbf{x}_i a seguinte função interpoladora poderia ser usada:

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) (f_i + Df_i \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)) \quad (3-3)$$

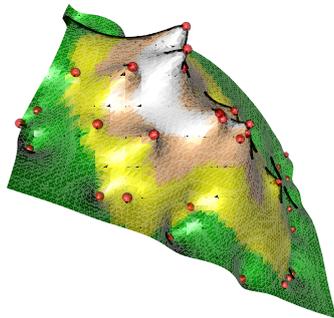


Figura 3.1: O método de Shepard usualmente gera extremos locais nos pontos do conjunto \mathcal{S} .

Várias outras modificações do método de Shepard foram propostas na literatura, dentre elas destaca-se a proposta de Tadeusz Liszka feita em 1984 (6), que modifica a função δ_i da seguinte forma: $\delta_i(\mathbf{x}) = (||\mathbf{x} - \mathbf{x}_i||^2 + \epsilon^2)^{1/2}$.

3.2

Modificação do método de Shepard

Nas mesmas hipóteses do método de Shepard original, isto é, considerando que $\mathcal{S} = \{(\mathbf{x}_1, f_1), (\mathbf{x}_2, f_2), \dots, (\mathbf{x}_N, f_N)\}$ é um conjunto de pares de pontos, onde $f_i \in \mathbb{R}$ corresponde ao valor de uma função f amostrada no ponto $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, para $i = 1 \dots N$. Considerando ainda que os pontos \mathbf{x}_i são distintos, isto é $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{x}_j$, para $i \neq j$. Deseja-se construir uma função \hat{f}_k que interpola os pontos $(\mathbf{x}_i, f_i) \in \mathcal{S}$, $i = 1 \dots N$.

Sabe-se que um núcleo $k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função que corresponde ao produto interno no espaço de Hilbert \mathcal{F} da imagem dos pontos \mathbf{x} e \mathbf{z} por uma função $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{F}$, ou seja

$$k(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \langle \phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{z}) \rangle .$$

E, como visto na seção 2.3, é sabido que com uso do núcleo é possível calcular a distância entre $\phi(\mathbf{x})$ e $\phi(\mathbf{z})$: $d_k(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \|\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{z})\| = \sqrt{k(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - 2k(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + k(\mathbf{z}, \mathbf{z})}$.

Usando esses conhecimentos, propõe-se uma modificação do método de interpolação de Shepard, que é a simples substituição no método original da distância euclidiana entre os pontos \mathbf{x} e \mathbf{x}_i pela distância d_k entre os pontos $\phi(\mathbf{x})$ e $\phi(\mathbf{x}_i)$ no espaço de Hilbert \mathcal{F} , onde a função núcleo k e seus parâmetros são dados.

Mais precisamente, a interpolação de Shepard baseada em núcleos é, portanto, feita através da seguinte fórmula:

$$\hat{f}_k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N w_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) f_i, \quad (3-4)$$

onde

$$w_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = \frac{d_k^{-p}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)}{\sum_{j=1}^N d_k^{-p}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j)} = \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^N d_k^p(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j)}{\sum_{k=1}^N \prod_{j=1}^N d_k^p(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j)}$$

é a função de ponderação para as amostras,

$$d_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = \sqrt{k(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - 2k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) + k(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i)}$$

é a distância entre $\phi(\mathbf{x})$ e $\phi(\mathbf{x}_i)$ no espaço de Hilbert \mathcal{F} e $p \in \mathbb{N}$ é um parâmetro para o método. Além de p , o resultado da interpolação também depende dos parâmetros que são usados para definir o próprio núcleo k .

Essa modificação mantém a grande vantagem do método original, que é a sua fácil implementação. Além disso, ela mantém também as boas propriedades do método original, que são:

- $\sum_{i=1}^N w_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = 1$ para qualquer vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,
- $0 \leq w_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \leq 1$ para qualquer vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e qualquer $i \in \{1, \dots, N\}$.

Que conseqüentemente, permitem dizer que o conjunto imagem da função \hat{f}_k é:

$$\text{Imagem}(\hat{f}_k) = [\min_{i=1..N} f_i, \max_{i=1..N} f_i].$$

Porém, aquela desvantagem existente no método original apontada anteriormente, que é a de gerar extremos locais nos pontos do conjunto \mathcal{S} , muitas vezes se repete nesse novo método.

No próximo capítulo serão apresentados diversos exemplos em que essa simples modificação gera melhores resultados quando comparados com o método de Shepard original. Mostrando assim, que essa proposta se torna uma boa alternativa para um método de interpolação que é simples de implementar.