PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

Joana Becker Paulo

Método de interpolação de Shepard baseado em núcleos

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós–graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC–Rio

Orientador: Prof. Hélio Côrtes Vieira Lopes

Rio de Janeiro
dezembro de 2009

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Joana Becker Paulo

Método de interpolação de Shepard baseado em núcleos

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós–graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC–Rio. Aprovada pela comissão examinadora abaixo assinada.

Prof. Hélio Côrtes Vieira Lopes
Orientador
Departamento de Matemática — PUC–Rio

Prof. Dirce Uesu Pesco
Universidade Federal Fluminense

Prof. Sinésio Pesco
Departamento de Matemática — PUC–Rio

Prof. Marcos Craizer
Departamento de Matemática — PUC–Rio

Prof. José Eugênio Leal
Coordenador do Centro Técnico Científico — PUC–Rio

Rio de Janeiro, 16 de dezembro de 2009

Joana Becker Paulo

Graduou-se em Licenciatura Matemática pela Universidade Federal Fluminense em 2005 e fez uma especialização em Educação Matemática na Universidade Estadual do Rio de Janeiro em 2006.

Ficha Catalográfica

Paulo, J. B.

Método de interpolação de Shepard baseado em núcleos / Joana Becker Paulo; orientador: Hélio Côrtes Vieira Lopes. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2009.

v., 49 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Método de Interpolação de Shepard; núcleos; modelagem geométrica . I. Lopes, Hélio Côrtes Vieira. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente ao meu professor e orientador Hélio Lopes, por toda a sua dedicação, atenção e apoio que sempre me dedicou. Ao CNPq pelo incentivo. À PUC-Rio, pela oportunidade de adquirir mais conhecimentos, num ambiente acadêmico acolhedor, do qual já sinto saudades, e pelo carinho com o qual fui recebida por todos. Aos funcionários da secretaria, pela simpatia e atenção de cada um de vocês. Aos meus queridos amigos, que tive o prazer de conhecer e cultivar. Um obrigado especial a Ady Cambraia, Betina Vath, Camilla Pagni, Cleide Mayra, David Rey, Eduardo Teles, João Paixão, Maria Clara Schuwartz e Yuri Ki, que estiveram sempre me dando apoio, conselhos, em muitos momentos. Não podendo esquecer o estimado amigo Renato Zarfolin, que embora tenha partido, será sempre lembrado por nós. Aos familiares e amigos que entenderam minhas ausências, e sempre me apoiaram. E meu mais que obrigado, aos meus pais, que sempre me deram segurança, conforto nas horas necessárias, carinho, me encorajando sempre em todos os momentos dessa caminhada. Eles foram e são fundamentais em mais essa etapa da minha vida.

Resumo

Paulo, J. B.; Lopes, Hélio Côrtes Vieira. **Método de interpolação de Shepard baseado em núcleos**. Rio de Janeiro, 2009. 49p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Muitos problemas reais em modelagem computacional requerem o uso de aproximação de funções. Em alguns casos a função a ser avaliada no computador é muito complexa, portanto seria desejável que ela fosse substituída por uma função mais simples e mais eficiente de ser calculada. Para fazer isso, calcula-se o valor da função escalar f em um conjunto de N pontos $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N\}$, onde $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, e faz-se uma estimativa dos valores dessa função f em qualquer outro ponto através de um método de interpolação. Um método de *interpolação* é qualquer procedimento que toma um conjunto de restrições e determina uma "boa" função que satisfaça essas condições. O método de interpolação de Shepard originalmente calcula o valor estimado dessa função num ponto qualquer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ como uma média ponderada dos valores da função original nas N amostras dadas. Sendo que o peso para cada amostra $\mathbf{x}_i$ é função das potências negativas das distâncias euclidianas entre os pontos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}_i$. Os núcleos $k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são funções que correspondem ao produto interno no espaço de Hilbert $\mathcal{F}$ da imagem dos pontos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{z}$ por uma função $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathcal{F}$, ou seja $k(\mathbf{x}, \mathbf{z}) =< \phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{z}) >$. Na prática, as funções núcleos representam implicitamente o mapeamento feito pela função ϕ, ou seja, se define qual núcleo usar e não qual ϕ usar. Esse trabalho propõe uma modificação do método de interpolação de Shepard que é uma simples substituição no método original: ao invés de usar a distância euclidiana entre os pontos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}_i$ sugere-se usar a distância entre as imagens dos pontos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}_i$ por ϕ no espaço de Hilbert $\mathcal{F}$, que pode ser calculada diretamente com o uso da função núcleo k. Os resultados mostram que essa pequena modificação gera resultados melhores quando comparados com o método de Shepard original.

Palavras–chave

Método de Interpolação de Shepard; núcleos; modelagem geométrica .

Abstract

Paulo, J. B.; Lopes, Hélio Côrtes Vieira. **Kernel based Shepard's interpolation method**. Rio de Janeiro, 2009. 49p. MSc Dissertation — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Several real problem in computational modeling require function approximations.In some cases, the function to be evaluated in the computer is very complex, so it would be nice if this function could be substituted by a simpler and efficient one. To do so, the function f is sampled in a set of N pontos $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N\}$, where $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, and then an estimate for the value of f in any other point is done by an interpolation method. An interpolation method is any procedure that takes a set of constraints and determines a nice function that satisfies such conditions. The Shepard interpolation method originally calculates the estimate of $f(\mathbf{x})$ for some $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ as a weighted mean of the N sampled values of f. The weight for each sample $\mathbf{x}_i$ is a function of the negative powers of the euclidian distances between the point $\mathbf{x}$ and $\mathbf{x}_i$. Kernels $k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ are functions that correspond to an inner product on some Hilbert space $\mathcal{F}$ that contains the image of the points $\mathbf{x}$ and $\mathbf{z}$ by a function $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathcal{F}$, i.e. $k(\mathbf{x}, \mathbf{z}) =< \phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{z}) >$. In practice, the kernels represent implicitly the mapping ϕ, i.e. it is more suitable to defines which kernel to use instead of which function ϕ. This work proposes a simple modification on the Shepard interpolation method that is: to substitute the euclidian distance between the points $\mathbf{x}$ and $\mathbf{x}_i$ by a distance between the image of these two point by ϕ in the Hilbert space $\mathcal{F}$, which can be computed directly with the kernel k. Several tests show that such simple modification has better results when compared to the original method.

Keywords

Shepard's Interpolation Method; kernels; geometric modeling.

Sumário

Lista de figuras

Lista de tabelas