

## 8

### Resseguro

O *resseguro* é a operação pela qual o segurador transfere a outrem, total ou parcialmente, os riscos assumidos. “O resseguro tem um papel importante em reduzir o risco em um portfólio de seguro”. Além disso o resseguro pode reduzir a probabilidade de ruína.

Um *contrato de resseguro* é um contrato de transferência do risco, de uma entidade (chamada “seguradora cedente”) para outra (empresa de resseguro ou resseguradora), em troca de uma taxa (prêmio).

Em um contrato de resseguro, cada indenização individual  $X$  pode ser separada em dois componentes,  $Y$  e  $Z$  da seguinte forma:

$$X = Y + Z = h_c(X) + h_R(X),$$

onde  $Y = h_c(X)$  é a parte da cedente e  $Z = h_R(X)$  é a parte da resseguradora. Assumindo um processo de Poisson para ocorrência de indenizações, o lucro recebido pela seguradora no tempo  $t$  é consequentemente:

$$\begin{aligned} \lambda t[(1 + \theta)E[X] - (1 + \xi)E[Z] - E[Y]] &= \lambda t[\theta E[Y] + (\theta - \xi)E[Z]] \\ &= \lambda t[\theta E[X] - \xi E[Z]] \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \theta/\xi \geq E(Z)/E(X) \text{ ou equivalentemente } E(Y)/E(X) \geq 1 - \theta/\xi,$$

onde  $\xi$  é o carregamento de segurança que a resseguradora colocará no prêmio, e ele é normalmente maior do que  $\theta$  (o carregamento usado pela seguradora).

Estudaremos dois tipos de contratos de resseguro: contratos de resseguro proporcional e contrato de resseguro não proporcional (excesso de danos).

- Contrato de resseguro proporcional (quota-parte)

É aquele no qual o ressegurador responde por parte proporcional, previamente definida, em relação ao risco integral. A cedente repassa ao ressegurador uma quota fixa percentual dos seus negócios, e o ressegurador se responsabiliza pela mesma proporção em cada uma das indenizações. De modo geral este tipo de resseguro é mais adequado quando se podem identificar os riscos isolados e seus respectivos valores segurados.

No contrato proporcional, seja  $\alpha$  a proporção de qualquer indenização paga pela cedente, cada indenização pode ser representada por

$$X = \alpha X + (1 - \alpha)X = h_c(X) + h_R(X).$$

Com isso o modelo de risco coletivo da empresa cedente será dado por

$$U(t)^{(\alpha)} = u + c^\alpha t - \sum_{i=1}^{N_t} \alpha X_i, \quad (8-1)$$

onde  $\alpha \in [0, 1]$  e  $c^\alpha = [(1 + \theta) - (1 - \alpha)(1 + \xi) - \alpha]\lambda E[X]$ .

A figura 8.1 mostra o impacto de um contrato de resseguro proporcional em um processo de reservas de uma seguradora. A linha em preto mostra uma trajetória de um processo de reservas de uma seguradora sem nenhum contrato de resseguro, já a linha pontilhada em vermelho mostra uma trajetória de um processo de reservas com as mesmas condições, porém considerando que a seguradora fez um contrato de resseguro proporcional. Observamos que os instantes em que a reserva da seguradora assume valores negativos no seu processo de reserva, não acontecem no processo de reservas com o contrato de resseguro proporcional.

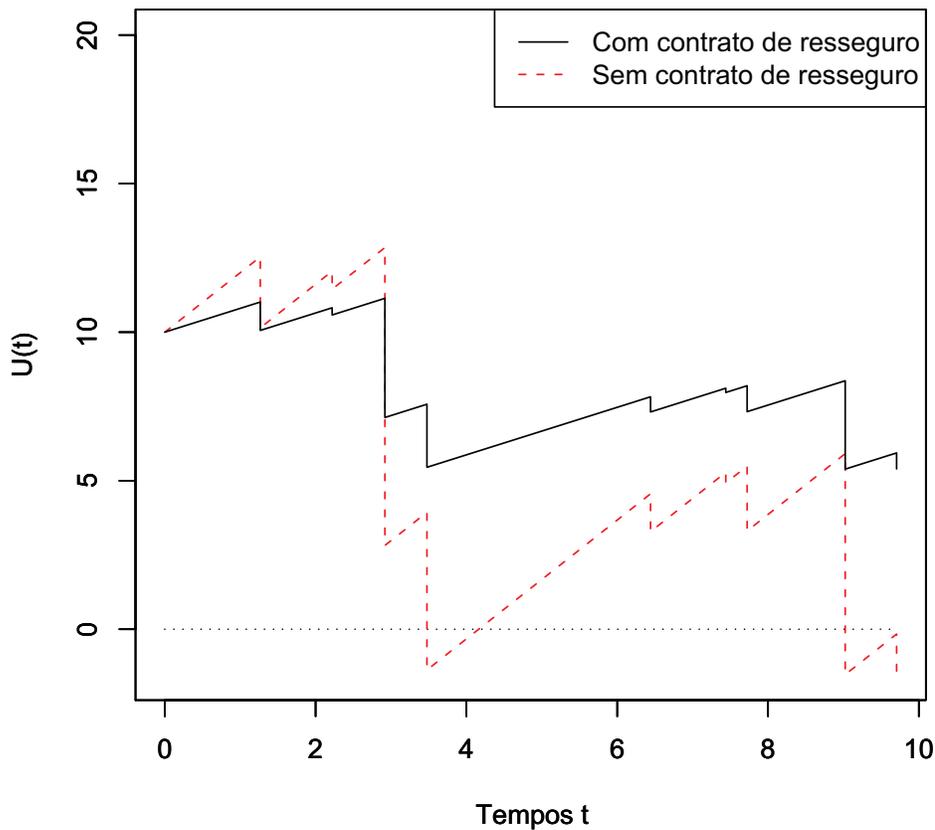


Figura 8.1: Exemplo do impacto de um contrato de resseguro proporcional em um processo de reservas  $U(t)$  de uma seguradora.

- Contrato de resseguro não proporcional (excesso de danos)

Nesse tipo de contrato a resseguradora somente paga se a perda sofrida pela cedente exceder um certo montante, chamado limite de retenção e denotado por  $M$ . Assim a indenização  $X$  será composta pela parte da cedente  $Y = h_c(X) = \min(X, M)$  e a parte da resseguradora  $Z = h_R(X) = \max(0, X - M)$ .

O processo de reservas da seguradora que fez um contrato de resseguro não proporcional (excesso de danos) será dado por

$$U(t)^{(M)} = u + c^M t - \sum_{i=1}^{N_t} \min\{X_i, M\}, \quad (8-2)$$

onde  $c^M = [(1 + \theta)E[X] - (1 + \xi)E(Z)]\lambda$ .

Na figura 8.2, temos novamente o impacto de um contrato de resseguro em um processo de reserva de um seguradora, porém agora

foi considerado que a seguradora fez um contrato de resseguro não proporcional (excesso de danos). Temos então, em linha pontilhada vermelha, uma trajetória de um processo de reservas de uma seguradora que não contratou o resseguro não proporcional, e em linha preta uma trajetória de um processo de reservas de um seguradora com o contrato de resseguro não proporcional.

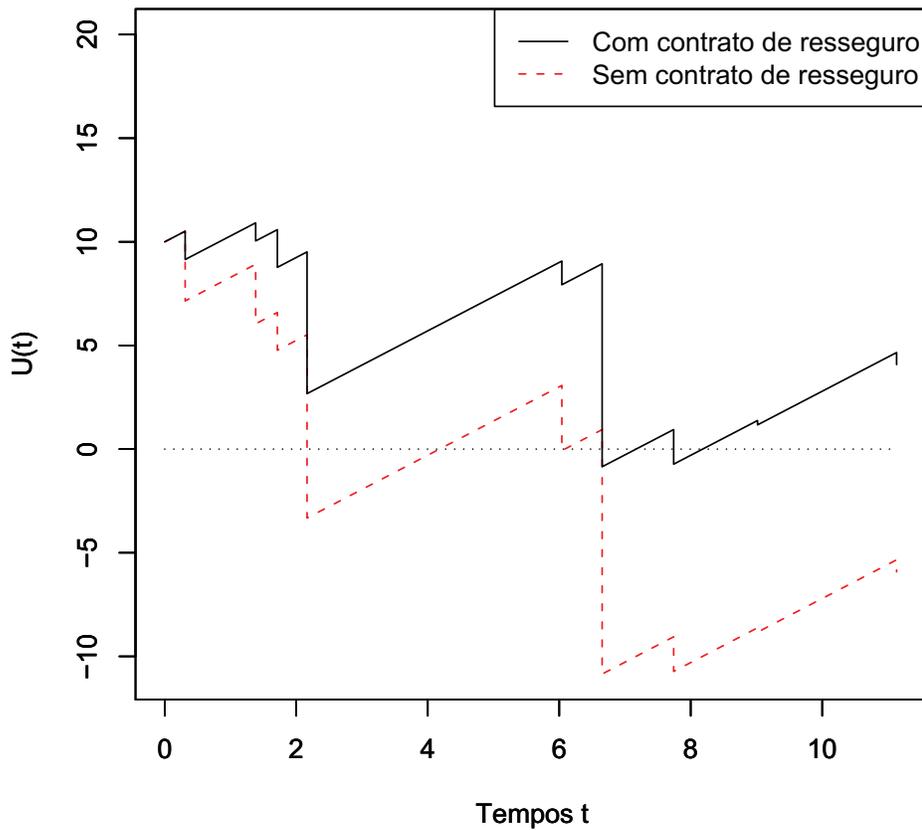


Figura 8.2: Exemplo do impacto de um contrato de resseguro do tipo excesso de danos em um processo de reservas  $U(t)$  de uma seguradora.

## 8.1

### Resseguro e Coeficiente de Ajuste

Através da Desigualdade de Lundberg podemos concluir que uma das maneiras de minimizar a probabilidade de ruína  $\psi(u)$  é procurar contratos

de resseguro que proporcionem grandes valores para o coeficiente de ajuste  $R$ .

– Resseguro Proporcional

No caso de um contrato de proporcional precisamos encontrar o valor  $\alpha$  que irá maximizar o valor do coeficiente de ajuste.

Primeiramente temos que lembrar que para termos lucro é necessário ter  $\theta/\xi \geq E(Z)/E(X) = 1 - \alpha$  ou equivalentemente  $\alpha > 1 - \theta/\xi$ .

Como  $c^\alpha = [(1 + \theta) - (1 - \alpha)(1 + \xi) - \alpha]\lambda E[X]$ , então se  $\theta \leq \xi$  o prêmio será uma função linear de  $\alpha$ . Assim para maximizar o lucro teríamos  $\alpha = 1$ . Porém neste caso não haveria contrato de resseguro. Na prática, entretanto, queremos conseguir um grau satisfatório de segurança, e o coeficiente de reajuste  $R$  pode servir de base para isso. Com a nova função para o prêmio, a equação de ajuste após um contrato de resseguro proporcional será dada por

$$A(r) = \lambda M_{\alpha X}(r) - \lambda - \lambda[(1 + \theta) - (1 - \alpha)(1 + \xi)]E[X]r = 0. \quad (8-3)$$

Assim temos o coeficiente de ajuste em função da proporção  $\alpha$ , e com isso podemos encontrar o valor de  $\alpha$  que nos dará o valor máximo do coeficiente de ajuste  $R$ .

Para um processo de reservas onde as indenizações individuais  $X$  tem distribuição exponencial com média  $1/\beta$ , a parte paga pela resseguradora  $Y$  também terá uma distribuição exponencial, mas com média  $\alpha/\beta$ . Então, utilizando a equação (3.4) o coeficiente de ajuste  $R$  é dado por

$$R = \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\lambda}{c} = \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta}{[(1 + \theta) - (1 + \xi)(1 - \alpha)]} = \frac{\beta[\theta - \xi + \xi\alpha]}{\alpha[\theta - \xi + \alpha(1 + \xi)]}.$$

Numa situação improvável onde  $\theta = \xi$ , então  $R = \beta\theta/\alpha(1 + \theta)$ , que é uma função decrescente de  $\alpha$ . Então  $R$  seria maximizado escolhendo  $\alpha = 0$ . Entretanto, nesse caso, a cedente estaria passando todo o seu negócio para a resseguradora.

Na figura 8.3 temos quatro gráficos do coeficiente de ajuste  $R$  em função da proporção  $\alpha$ , onde foi considerado um processo de reservas de Poisson com  $\lambda = 1$ ,  $\theta = 0.2$  e as indenizações individuais tem distribuição exponencial com média 1. Porém serão variados o carregamento de segurança exigido pela resseguradora, respectivamente, com  $\xi = 0.25, \xi = 0.3, \xi = 0.35, \xi = 0.4$ . Podemos observar

que quanto maior o carregamento de segurança exigido pela resseguradora maior será a proporção ideal que a seguradora repassará. Porém no último caso com  $\alpha$  aproximadamente 1 a seguradora transferiria não somente todo o risco, mas também todo o negócio para a resseguradora, o que não faria sentido.

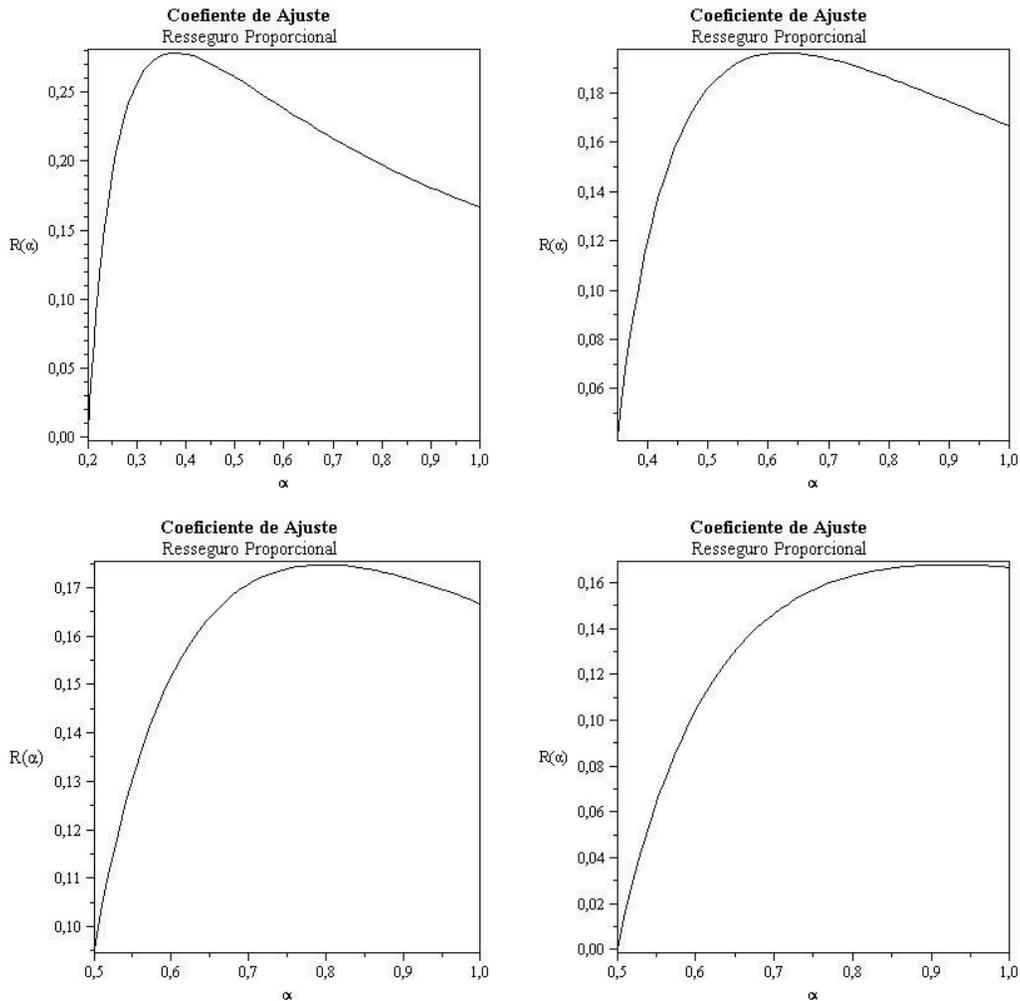


Figura 8.3: Função coeficiente de ajustes para os seguintes valores de  $\xi$ :  $\xi = 0.25$ ,  $\xi = 0.3$ ,  $\xi = 0.35$ ,  $\xi = 0.4$ .

Na tabela 8.1 mostramos o valores  $\alpha^*$  que maximizam  $R(\alpha)$  para cada caso apresentado na figura 8.3.

$\xi$	$\alpha^*$	$R(\alpha^*)$
0.25	0.378	0.278
0.3	0.626	0.196
0.35	0.797	0.175
0.4	0.923	0.167

Tabela 8.1: Valores de  $\alpha$  que maximizam  $R(\alpha)$  para  $\theta = 0.2$  e para diferentes valores de  $\xi$ .

- Resseguro não-proporcional (excesso de danos)

No caso de um resseguro não proporcional temos que encontrar qual o limite de retenção  $M$  que irá maximizar o valor do coeficiente de ajuste.

Para que o lucro líquido exceda os custos previstos das indenizações o limite de retenção ( $M$ ) deve satisfazer

$$\frac{E[Y]}{E[X]} \equiv g_{Y|X}(M) = \frac{\int_0^M x f_X(x) dx + M F_X(M)}{\int_0^\infty x f_X(x) dx} \geq 1 - \frac{\theta}{\xi}. \quad (8-4)$$

Onde, sendo  $X$  uma variável aleatória contínua,  $F_X$  é a função distribuição acumulada ( $F'_X(x) = f_X(x)$ ), então  $\frac{\partial(g_{Y|X}(M))}{\partial M} = F_X(M) \geq 0$  e com isso  $\frac{E[Y]}{E[X]}$  é uma função crescente de  $M$ . Conseqüentemente a seguradora consideraria somente os níveis de retenção  $M$  que são maiores do que o valor  $M_0$ , que satisfaz  $g_{Y|X}(M_0) = 1 - \frac{\theta}{\xi}$ .

Nesse tipo de contrato também teremos uma nova equação para o cálculo do coeficiente de ajuste que será dada por

$$A(r) = \lambda[M_Y(r) - 1 - [(1 + \theta)E[X] - (1 + \xi)E[Z]]r]. \quad (8-5)$$

Se considerarmos um processo de reservas de uma seguradora onde as indenizações particulares  $X$  seguem uma distribuição exponencial com média  $1/\beta$ , então

$$\frac{E[Y]}{E[X]} \equiv g_{Y|X}(M) = \frac{\int_0^M x \beta e^{-\beta x} dx + M e^{-\beta M}}{1/\beta} = 1 - e^{-\beta M}. \quad (8-6)$$

Logo a seguradora só considerará contratos de resseguro em que o limite de retenção  $M$  seja maior que  $M_0 = -\log(\theta/\xi)/\beta = -\log(\theta/\xi)E(X)$  e  $E[Z] = e^{-\beta M}/\beta$ . Com isso a equação de ajuste

será dada por

$$\lambda \left[ \frac{\beta}{\beta - r} (1 - e^{-M(\beta-r)}) + e^{-M(\beta-r)} - 1 - \frac{1}{\beta} [(1 + \theta) - (1 + \xi)e^{-\beta M}] \right] = 0.$$

Na figura 8.4 temos os gráficos do coeficiente de ajuste em função do limite de retenção  $M$  para um processo de reserva de Poisson com  $\lambda = 1$ ,  $\theta = 0.15$  e as indenizações individuais tem distribuição exponencial com média 50, para diferentes valores de  $\xi$ . E a tabela 8.5 mostra os valores  $M^*$  que maximizam  $R(M)$ , para os valores de  $\xi$  apresentados na figura 8.4.

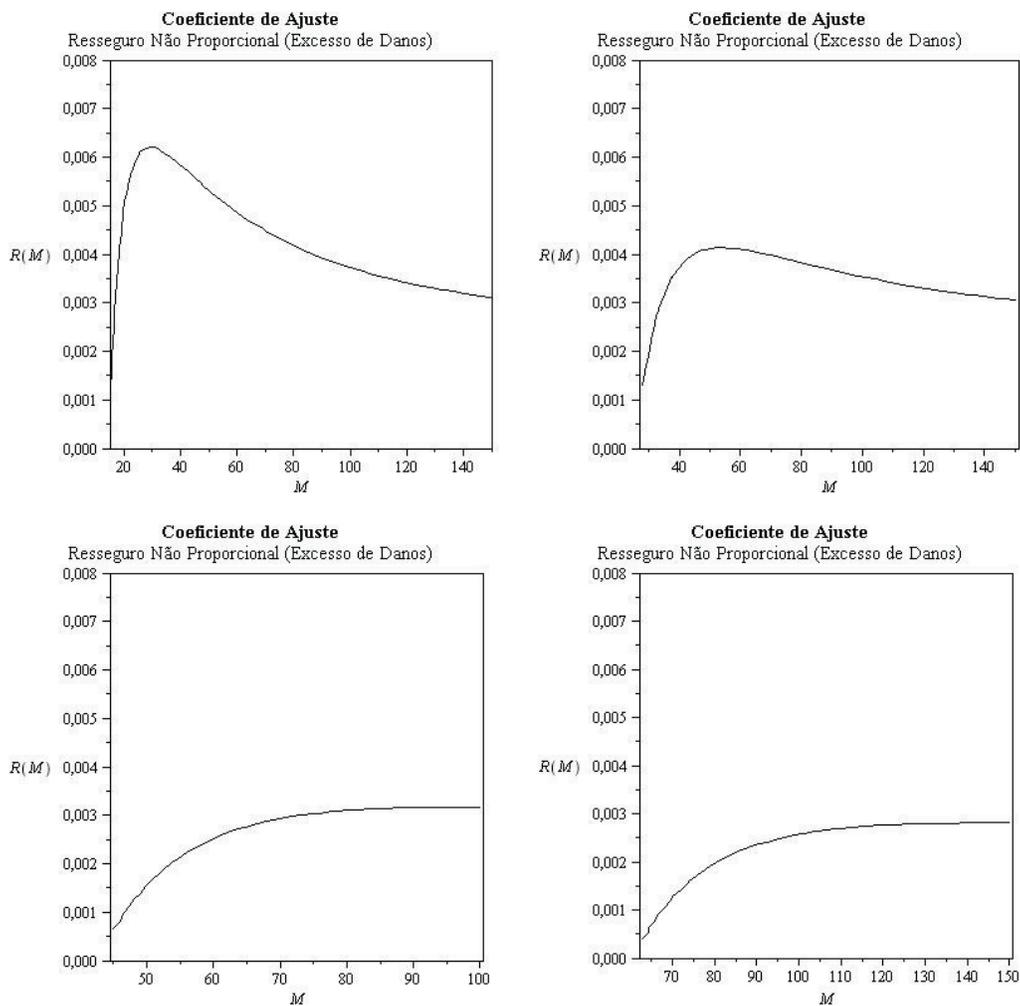


Figura 8.4: Função coeficiente de ajustes para os seguintes valores de  $\xi$ :  $\xi = 0.2, \xi = 0.25, \xi = 0.35, \xi = 0.5$ .

$\xi$	$M^*$	$R(M^*)$
0.20	29.284	0.0062
0.25	53.941	0.0042
0.35	94.765	0.0032
0.50	143.999	0.0028

Tabela 8.2: Valores  $M^*$  que maximizam  $R(M)$  para  $\theta = 0.15$  e diferentes valores de  $\xi$ .

## 8.2

### Resseguro e sua influência na probabilidade de ruína

Nessa seção veremos como uma seguradora diminui sua probabilidade de ruína quando faz um contrato de resseguro. Utilizaremos os métodos apresentados no capítulo anterior para o cálculo da probabilidade de ruína eventual de uma seguradora que contratou um resseguro. Porém será necessário algumas considerações.

#### – Resseguro Proporcional

Agora veremos como ficará a probabilidade de ruína dado que foi feito um contrato de resseguro do tipo proporcional para um modelo de risco coletivo (2-1) com parâmetros  $\lambda = 1$ ,  $E[X] = 1$ .

Denotaremos a probabilidade de ruína eventual quando  $h_c(X) = \alpha X$  por  $\psi(u; \alpha)$ . Considerando o modelo de risco coletivo (8-1) temos que

$$\begin{aligned} \psi(u; \alpha) &= P \left( u + (1 + \theta - (1 - \alpha)(1 + \xi))t - \sum_{i=1}^{N(t)} \alpha X_i < 0 \text{ para algum } t > 0 \right) \\ &= P \left( \frac{u}{\alpha} + (1 + \hat{\theta})t - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i < 0 \text{ para algum } t > 0 \right) \end{aligned}$$

onde  $\hat{\theta} = (\theta - \xi(1 - \alpha))/\alpha$ . Assim temos que  $\psi(u; \alpha) = \hat{\psi}(u/\alpha)$  que iremos calcular utilizando o carregamento de segurança  $\hat{\theta}$ . Então  $\psi_d(0) = \frac{1}{(1 + \hat{\theta})}$ .

Para encontrarmos uma aproximação para  $\psi(u; \alpha)$  utilizando o algoritmo proposto por Dickson Waters (1991) [6], é necessário discretizar a distribuição  $p(X)$  através do processo de discretização de De Vylder and Goovaerts (1988) [5] apresentado no capítulo anterior. Neste caso faremos  $Y = \beta\alpha X$ , o que quer dizer que  $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$  vai ter valores nos pontos  $0, \frac{1}{\beta\alpha}, \frac{2}{\beta\alpha}, \dots, \beta\alpha > 0$ , ou seja, vamos

ter intervalos de amplitude  $\frac{1}{\beta\alpha}$ . Assim as probabilidades de ruína calculadas nos dará aproximações para  $\hat{\psi}(j/\beta\alpha)$  para  $j = 0, 1, 2, \dots$ . E como precisamos que o valor da reserva inicial  $u$  seja inteiro, faremos  $j = u\beta$  para encontrarmos a aproximação para  $\psi(u, \alpha)$ . Como vimos no capítulo anterior, no caso em que as indenizações individuais do modelo de risco coletivo de uma seguradora são exponencialmente distribuídas, existe uma expressão fechada para probabilidade de ruína dada por

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c} e^{-(1-\frac{\lambda}{c})u} = \frac{\lambda}{c} e^{-Ru}.$$

Podemos reescrever a fórmula, levando em consideração que foi feito um contrato de resseguro. Então teremos:

$$\psi(u, \alpha) = \frac{\alpha}{c^\alpha} e^{-R(\alpha)u}$$

onde

$$c^\alpha = 1 + \theta - (1 + \xi)(1 - \alpha) \text{ e } R(\alpha) = (\theta - (1 - \alpha)\xi)/\alpha c^\alpha.$$

A tabela 8.3 mostra para diferentes valores de  $u$  qual o valor de  $\alpha$  que irá minimizar  $\psi(u, \alpha)$ , e a última linha da tabela informa o valor de  $\alpha$  que maximiza  $R(\alpha)$ . Podemos observar que quando  $u$  aumenta os valores de  $\alpha$  que minimizam a probabilidade de ruína diminuem, e convergem para o valor de  $\alpha$  que maximiza o coeficiente de ajuste. Com isso essa tabela mostra que escolhendo um  $\alpha$  que maximize o coeficiente de ajuste temos uma aproximação razoável para o  $\alpha$  que minimiza o probabilidade de ruína, pelo menos para grandes valores de  $u$ . Além disso quando a reserva inicial tem valores grandes, seja  $u \geq 50$ ,  $e^{-R(\alpha)u}$  nos dá uma boa aproximação para  $\psi(u, \alpha)$  para valores próximos ao valor ideal de  $\alpha$ .

Carregamentos( $\theta/\xi$ )	0.1/0.15	0.2/0.3
$u = 10$	0.666	0.646
$u = 20$	0.655	0.636
$u = 30$	0.651	0.632
$u = 40$	0.649	0.631
$u = 50$	0.648	0.630
$u = 60$	0.648	0.629
$u = 70$	0.647	0.628
$u = 80$	0.647	0.628
$u = 90$	0.646	0.628
$u = 100$	0.646	0.628
R	0.644	0.626

Tabela 8.3: Valores de  $\alpha$  que minimizam a função  $\psi(u, \alpha)$ , para diferentes valores de reserva inicial  $u$ .

Considere um modelo de risco coletivo, onde as indenizações individuais tem distribuição exponencial de média 1 com parâmetros  $\lambda = 1$ ,  $\theta = 0.2$ . A tabela 8.4 e a figura 8.5 apresentam uma comparação entre os valores de  $\psi(u)$ , os valores de  $\psi(u, \alpha)$ , encontrados pela expressão fechada para a probabilidade de ruína eventual, os valores de  $\psi(u, \alpha)_2$ , calculados através da aproximação numérica apresentada por Dickson and Waters(1991), e os valores do limite superior de Lundberg, onde consideramos que foi feito um contrato de resseguro proporcional no qual o carregamento exigido pela resseguradora é  $\xi = 0.3$  e o valor de  $\alpha$  que maximiza o coeficiente de ajuste é  $\alpha = 0.626$ . Na última linha da tabela 8.4 são apresentados os erros relativos da aproximação numérica comparada com o valor encontrado pela expressão fechada para a probabilidade de ruína eventual.

Reservas iniciais( $u$ )	0	1	2	5	10	15	20
$\psi(u)$	0.8333	0.7054	0.5971	0.3622	0.1574	0.0684	0.0297
$\psi(u, \alpha)_E$	0.8770	0.7209	0.5925	0.3292	0.1235	0.0463	0.0174
$\psi(u, \alpha)_2$	0.8770	0.7201	0.5909	0.3248	0.1159	0.0366	0.0173
$\exp\{-R(\alpha)\}$	1	0.8216	0.6750	0.3745	0.14015	0.0524	0.0196
$\epsilon_2$	0	0.0011	0.0027	0.0133	0.0615	0.2095	0.0057

Tabela 8.4: Comparação entre os valores de  $\psi(u)$ ,  $\psi(u; \alpha)$ ,  $\psi(u, \alpha)_2$  e o limite de Lundberg, para um modelo de risco coletivo.

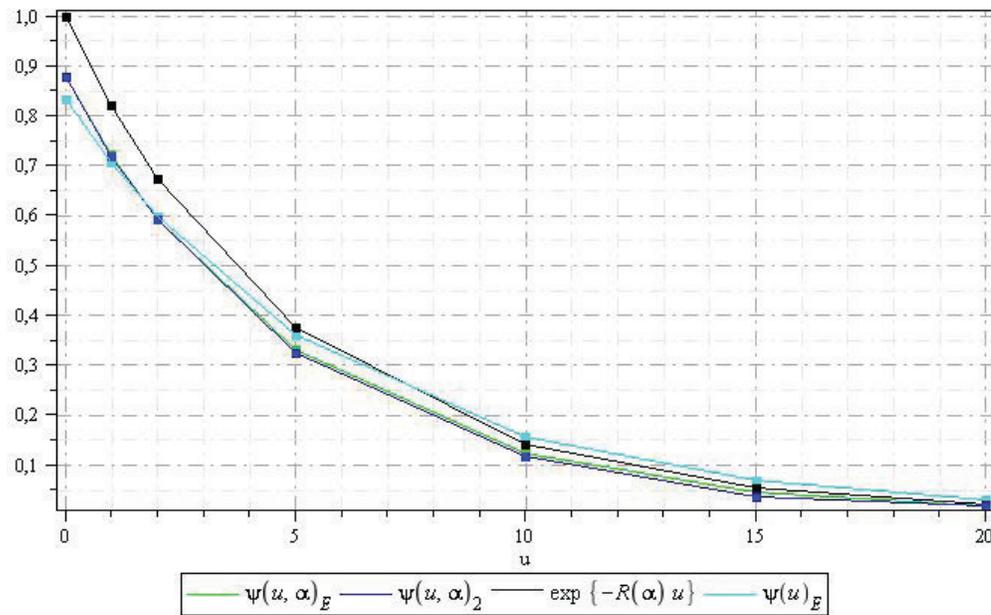


Figura 8.5: Comparação entre os valores de valores  $\psi(u)$ ,  $\psi(u; \alpha)$ ,  $\psi(u, \alpha)_2$  e o limite de Lundberg, para um modelo de risco coletivo, onde as indenizações individuais tem distribuição exponencial com média 1.

- Resseguro não-proporcional

Denotaremos por  $\psi(u; M)$  a probabilidade de ruína quando  $h_c(X) = \min(X, M)$ . Para o cálculo da aproximação de  $\psi(u; M)$  podemos utilizar o algoritmo proposto por Dickson and Waters (1991) [6], porém novamente teremos que discretizar a distribuição das indenizações individuais. Como nesse caso o valor máximo que a seguradora poderá pagar é  $M$ . Então faremos a discretização de  $p(X)$  de maneira que  $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$  irá ter valores nos pontos  $0, \frac{M}{\beta}, \frac{2M}{\beta}, \dots, M$ . Se o valor de  $u$  para o qual queremos calcular  $\psi(u; M)$  não for um múltiplo inteiro de  $\frac{M}{\beta}$ , então para calcular  $\psi(u; M)$  faremos a seguinte interpolação linear:

$$\psi(u; M) = (k + 1 - \beta u/M)\psi(k; M) + (\beta u/M - k)\psi(k + 1; M),$$

onde  $k$  é o inteiro tal que  $k < \beta u/M < k + 1$ .

No caso de um resseguro não-proporcional temos a seguinte expressão fechada para a probabilidade de ruína eventual quando as indenizações individuais tem distribuição exponencial, que foi apresentada por Dickson and Waters(1996) [7],

$$\psi(u; M) = \frac{1}{c^M} \left( 1 + \frac{1}{c^M - 1} \exp(-M) \right) \exp\{-(1-1/c^M)u\} - \frac{1}{c^M - 1} \exp(-M)$$

Porém esta expressão só é válida para  $0 \leq u < M$ .

A tabela 8.5 mostra os valores de  $\psi(3; M)$  calculados pela expressão fechada e pela aproximação numéricas, para diferentes valores de  $M$ . Em que consideramos um modelo de risco onde  $\lambda = 1$ ,  $\theta = 0.1$ ,  $\xi = 0.15$  e as indenizações individuais tem distribuição exponencial com média 1. Denotaremos por  $\psi(u; M)_E$  o valor encontrado pela expressão fechada e  $\psi(u; M)_2$  o valor encontrado pela aproximação numérica. Podemos observar que algoritmo produz uma boa aproximação para  $\psi(3; M)$ .

$M$	3.25	3.5	3.75	4	4.25	4.5
$\psi(u; M)_E$	0.6761	0.6798	0.6827	0.6848	0.6864	0.6877
$\psi(u; M)_2$	0.6743	0.6779	0.6827	0.6842	0.6854	0.6863

Tabela 8.5: Comparação entre os valores de  $\psi(u; M)$  encontrados pela expressão fechada e os valores encontrados pela aproximação numérica, para um modelo de risco coletivo onde as indenizações individuais tem distribuição exponencial com média 1,  $\lambda = 1$ ,  $\theta = 0.1$ ,  $\xi = 0.15$ .

Considere um modelo de risco coletivo no qual as indenizações individuais são exponencialmente distribuídas com média 1 e que possui os parâmetros  $\theta = 0.2$  e  $\lambda = 1$ . Agora vamos supor que foi feito um contrato de resseguro do tipo excesso de danos onde o prêmio exigido pela seguradora é  $\xi = 0.4$ . Então a tabela 8.6 e a figura 8.6 apresentam os valores de  $\psi(u)$ ,  $\psi(u, M)_2$  e os valores do limite de Lundberg para a probabilidade de ruína eventual, onde o valor de  $M$  que maximiza o coeficiente de ajuste  $R(M)$  é 1.486. A última linha da tabela 8.6 mostra os erros relativos da aproximação numérica comparada com o limite de Lundberg.

Reservas iniciais( $u$ )	0	1	5	10	20	30
$\psi(u)$	0.8333	0.7054	0.3622	0.1574	0.0297	0.0056
$\psi(u, M)_2$	0.8905	0.7256	0.3190	0.0904	0.0098	0.0010
$\exp\{-R(M)u\}$	1	0.7973	0.3222	0.1038	0.0107	0.0011
$\epsilon_2$	0.1095	0.0899	0.1030	0.0944	0.0841	0.0909

Tabela 8.6: Comparação entre os valores  $\psi(u)$ ,  $\psi(u, M)_2$  e do limite de Lundberg, para um modelo de risco coletivo com indenizações individuais exponencialmente distribuídas com média 1,  $\theta = 0.2$  e  $\lambda = 1$ , no qual foi feito um contrato de resseguro do tipo excesso de danos.

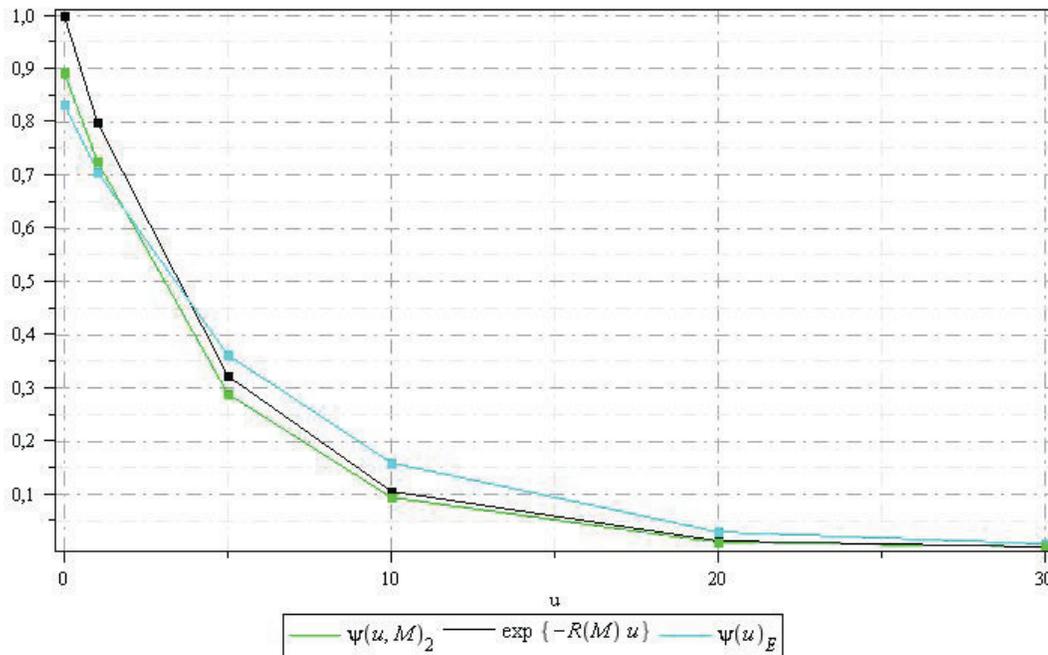


Figura 8.6: Comparação entre os valores de  $\psi(u)$ ,  $\psi(u, M)_2$  e o limite de Lundberg, para um modelo de risco coletivo.