

7

Aproximações numéricas para o cálculo da probabilidade de ruína eventual

Neste capítulo apresentaremos dois métodos numéricos para o cálculo para probabilidade de ruína eventual. O primeiro foi essencialmente desenvolvido por De Vylder and Goovaerts (1984) [4], onde é usada a conexão entre a probabilidade de ruína eventual e a variável aleatória perda agregada máxima. O segundo método é uma modificação do método elaborado por De Vylder and Goovaerts (1988) [5], apresentado por Dickson and Waters (1991) [6]. Para os dois métodos que iremos apresentar neste capítulo, será necessário encontrar a função densidade de probabilidade da variável $S(t)$. Para isto utilizaremos o algoritmo recursivo apresentado por Panjer (1981) [10].

7.1

Fórmula Recursiva de Panjer

A fórmula recursiva de Panjer foi desenvolvida para obter a distribuição de probabilidade de um variável aleatória composta $S = \sum_{i=1}^n X_i$ sem o uso de convoluções, o que reduz o gasto computacional. Essa fórmula recursiva foi desenvolvida para uma família de distribuições que é chamada de família (a,b) de Panjer. Fazem parte desta família as distribuições que satisfazem a recursão

$$p_n = p_{n-1} \left(a + \frac{b}{n} \right), n = 1, 2, 3, \dots \quad (7-1)$$

onde p é função de densidade de probabilidade.

Os membros dessa família são:

1. Poisson(λ)

$$(a) \quad p_n = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!}, \\ n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(b) \frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lambda}{n},$$

$$p_0 = e^{-\lambda}$$

$$(c) a = 0 \text{ e } b = \lambda$$

2. Binomial(n, p)

$$(a) p_n = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n},$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N$$

$$(b) \frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{(N-n+1)p}{(n(1-p))},$$

$$p_0 = (1-p)^N$$

$$(c) a = -p/(1-p) \text{ e } b = (N+1)p/(1-p)$$

3. Binomial Negativa(α, p)

$$(a) p_n \binom{\alpha+n-1}{n} p^\alpha (1-p)^n,$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(b) \frac{p_n}{p_{n-1}} = (\alpha+n-1)(1-p)/n,$$

$$p_0 = p^\alpha$$

$$(c) a = (1-p) \text{ e } b = (\alpha-1)(1-p)$$

4. Geométrica(p)

$$(a) p_n = (1-p^n)p,$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(b) \frac{p_n}{p_{n-1}} = q$$

$$p_0 = p$$

$$(c) a = q \text{ e } b = 0$$

Sundt and Jewell(1981) [13] mostram que estes são os únicos membros desta família.

Considere uma distribuição composta com função distribuição

$$G(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} p_n F^{*n}(x) & \text{se } x > 0 \\ p_0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad (7-2)$$

para uma função de distribuição arbitrária $F(x)$, $x > 0$. Então a função densidade associada a $G(X)$ é dada por

$$g(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} p_n f^{*n}(x) & \text{se } x > 0 \\ p_0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad (7-3)$$

onde $f(x)$ é a função densidade associada a $F(X)$.

Corolário 7.1 (*Algoritmo de Panjer*). Considere $g(x)$ definida por (7-3) e $f(x)$ qualquer distribuição discreta para $x > 0$. Se a P_n é um membro

da família de Panjer, então vale a seguinte recursão

$$g_k = \frac{1}{1 - af_0} \sum_{j=1}^k \left(a + \frac{bj}{k} \right) f_j g_{k-j}; k = 1, 2, \dots \quad (7-4)$$

A demonstração do corolário acima pode ser encontrada em Panjer(1981) [10].

7.2

Método dos limites inferior e superior para a probabilidade de ruína eventual

Nesta sessão apresentaremos o método conhecido como o método dos limites inferior e superior para a probabilidade de ruína eventual. Como foi dito esse método está baseado na ligação entre a variável perda agregada máxima e a probabilidade de ruína, e no fato de que a variável aleatória perda agregada máxima possui uma distribuição geométrica composta.

Vimos no capítulo 5 que a probabilidade de sobrevivência é dada pela distribuição acumulada da variável aleatória L ,

$$P(L \leq u) = \sum_{m=0}^{\infty} (1 - q)q^m H^{m*}(u), u \geq 0 \text{ e } m = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (7-5)$$

onde $q = \psi(0) = \frac{1}{(1+\theta)}$, como mostrado no capítulo 5, e com

$$H(x) = \frac{1}{p_1} \int_0^x [1 - P(y)] dy. \quad (7-6)$$

Desde que $H(x)$ seja uma função de distribuição contínua, a expressão do lado direito da equação (7-5) não pode ser avaliada diretamente. De acordo com Panjer (1986) [11] a idéia é substituir $H(x)$ por uma ou diversas distribuições discretas. Porém vamos prosseguir como Dufresne and Gerber (1989) [8]. Usaremos (5-2) como ponto de partida.

Para facilitar a apresentação e a notação, é suposto que o intervalo de discretização é de uma unidade (isto significa que a unidade monetária é idêntica ao comprimento do intervalo de discretização). Então a idéia é arredondar cada L_i do somatório (5-2) para o menor inteiro seguinte e para o maior inteiro seguinte. Para isso introduziremos duas variáveis aleatórias que estão relacionadas a L .

$$L^l = [L_1] + [L_2] + \dots + [L_n] \quad (7-7)$$

$$L^u = [L_1 + 1] + [L_2 + 1] + \dots + [L_n + 1] \quad (7-8)$$

Com isso, temos que $L^l \leq L \leq L^u$, o que implica em

$$P(L^l > u) \leq P(L > u) \leq P(L^u > u), \quad (7-9)$$

para todo u . Sendo $\psi(u) = P(L > u)$ uma função contínua para $u \geq 0$, temos que:

$$P(L^l \geq u) \leq \psi(u) \leq P(L^u > u), \quad u > 0. \quad (7-10)$$

Se conseguirmos calcular as distribuições de L^l e L^u teremos como calcular os limites inferior e superior para a probabilidade de ruína.

Seja h_k^l a probabilidade que um dado elemento do somatório (7-7) seja igual a k , isto é, que um dado elemento do somatório (5-2) esteja entre k e $k + 1$. Assim

$$h_k^l = H(k + 1) - H(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7-11)$$

Seja h_k^u a probabilidade correspondente h_k^l , para um elemento do somatório (7-8). Assim

$$h_k^u = H(k) - H(k - 1), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (7-12)$$

Aqui $H(x)$ é dado pela fórmula (7-6). Como mencionado queremos calcular

$$f_i^l = P(L^l = i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (7-13)$$

e

$$f_i^u = P(L^u = i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (7-14)$$

Então, de acordo com (7-10) teremos que

$$1 - \sum_{i=0}^{u-1} f_i^l \leq \psi(u) \leq 1 - \sum_{i=0}^u f_i^u, \quad u = 0, 1, \dots \quad (7-15)$$

Usando a fórmula de Panjer podemos calcular as probabilidades (7-13) e (7-14) recursivamente pelas fórmulas

$$f_0^l = \frac{1 - q}{1 - qh_0^l}, \quad (7-16)$$

$$f_0^l = \frac{q}{1 - qh_0^l} \sum_{k=1}^i h_k^l f_{i-k}^l, \quad i = 1, 2, \dots \quad (7-17)$$

e

$$f_0^u = 1 - q, \quad (7-18)$$

$$f_i^u = q \sum_{k=1}^i h_k^u f_{i-k}^u, \quad i = 1, 2, \dots \quad (7-19)$$

Utilizaremos aqui a proposta feita em De Vylder and Goovaerts (1984) [4] para cálculo numérico da probabilidade de ruína eventual utilizando os limites inferior e superior da seguinte forma:

$$\psi(u) \approx \frac{1}{2}\psi^l(u) + \frac{1}{2}\psi^u(u). \quad (7-20)$$

7.3

Método para a aproximação da probabilidade de ruína eventual proposto por Dickson and Waters(1991)

O método apresentado por Dickson and Waters (1991) [6] é um aperfeiçoamento do método proposto por De Vylder and Goovaerts (1988) ([5]), o qual foi baseado no Teorema da Probabilidade Total. Porém o algoritmo só é válido quando utilizamos números inteiros para os valores das reservas iniciais u . Então foi proposto por De Vylder and Goovaerts(1988) [5] o processo de discretização de uma distribuição que apresentaremos a seguir.

7.3.1

Processo de discretização de uma distribuição

Vamos considerar o processo de Poisson em tempo contínuo apresentado no capítulo 2 com parâmetros $\lambda = 1$ e $E[X] = 1$. Portanto $c = (1 + \theta)$. Através do processo de discretização de uma distribuição proposta por De Vylder and Goovaerts (1988) [5] podemos obter um modelo de Poisson Composto em tempo discreto com parâmetro de Poisson λt . De acordo com os autores, o método de discretização pode ser dividido em três passos, que descreveremos:

1. Considere a variável aleatória $Y = \beta X$, em que X representa o valor das indenizações individuais da distribuição original e β é um número inteiro. Isto quer dizer que $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ vai ter valores nos pontos $0, \frac{1}{\beta}, \frac{2}{\beta}, \dots, \beta > 0$, ou seja, vamos ter intervalos de amplitude $\frac{1}{\beta}$ como pode ser visto na figura (7.1).

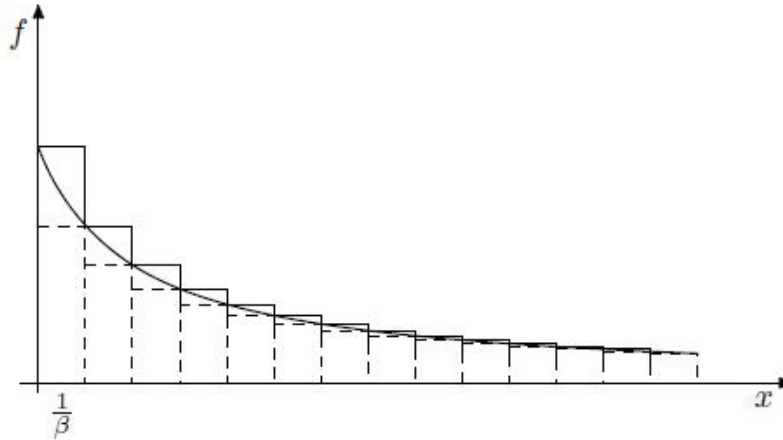


Figura 7.1: Discretização da distribuição de uma variável X .

Através da figura 7.1 podemos concluir que quanto maior for o valor de β , melhor será a aproximação da distribuição de Y à distribuição de X . Assim a nova unidade de tempo será β^{-1} vezes a unidade de tempo original, ou seja,

$$p_Y(k) = P\left(Y_i = \frac{k}{\beta}\right), k = 0, 1, 2, \dots$$

2. O procedimento seguinte é para rescalonar o processo original, multiplicando todos os valores monetários por β .

$$p_Y(k) = P(\beta Y_i = k) = P(Z_i = k), k = 0, 1, 2, \dots$$

Ou seja, os valores obtidos para βu no modelo discretizado corresponderão aos valores para u no modelo contínuo e passamos a ter $c = (1 + \theta)\beta$. Quanto a média das indenizações individuais, como consideramos que fosse, no modelo original, com esta alteração monetária passa a ser igual a β .

3. Por último, mudaremos a unidade de tempo. No modelo discretizado pretendemos que $c = 1$. Por isso, nova unidade de tempo corresponderá $((1 + \theta)\beta)^{-1}$ vezes a unidade de tempo original. Por sua vez, $\lambda = \frac{1}{[(1 + \theta)\beta]}$. No modelo discretizado, a distribuição original $P(x)$ é substituída por uma outra $H(j)$ que terá valores apenas para $j = 0, 1, 2, \dots$, ou seja:

$$H(j) = h(0) + h(1) + \dots + h(j) = \int_j^{j+1} P_Y(y) dy \quad (7-21)$$

e

$$P_Y(y) = P(x) = P(y/\beta)$$

A função de densidade associada à função de distribuição discreta $H(j)$ é bastante simples de obter:

$$h(j) = \begin{cases} H(0) & j = 0 \\ H(j) - H(j-1) & j \geq 1 \end{cases}$$

Este processo de discretização permite não só obter uma distribuição discreta “próxima” da original como também mantém a média das indenizações individuais inalterada(veja De Vylder and Goovaerts (1988) [5]).

Assim, no modelo de Poisson composto discretizado:

- O parâmetro de Poisson para o número esperado de indenizações por unidade de tempo é $\lambda = 1/[(1 + \theta)\beta]$.
- $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ tem valores inteiros não negativos e $E[Y] = \beta$.
- O prêmio, por unidade de tempo, é 1.

7.3.2

Descrição do método

Em Dickson and Waters (1991) [6] o modelo de Poisson composto discretizado é denotado por $\{Z(n)\}_{n \geq 0}$ e, com isso a probabilidade de ruína eventual é dada por $\psi_d(u) = P(\mathcal{T} < \infty)$, onde

$$\mathcal{T} = \begin{cases} \min\{n : Z(n) \leq 0, n = 1, 2, \dots\} \\ \infty \text{ se } Z(n) \geq 0, n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (7-22)$$

De acordo com Dickson and Waters (1991, Sessão 1) podemos considerar $\psi_d(\beta u)$ como uma boa aproximação para a probabilidade de ruína eventual $\psi(u)$. Com isso a probabilidade de ruína eventual pode ser calculada recursivamente utilizando o seguinte algoritmo,

$$\begin{aligned} \psi_d(0) &= 1/(1 + \theta), \\ \psi_d(u) &= g_0^{-1} \left(\psi_d(u-1) - \sum_{j=1}^{u-1} g_j \psi_d(u-j) - 1 + G(u-1) \right), \text{ para } u \geq 1 \end{aligned}$$

onde por definição $\sum_{j=1}^0 = 0$ (veja Dickson and Water, 1991 [6]). No algoritmo apresentado g_k e G_k para $k = 0, 1, 2, \dots$, são definidas, respectivamente, como função densidade de probabilidade e função distribuição acumulada das indenizações agregadas. Para encontrarmos os valores de g_k podemos utilizar a formula recursiva de Panjer apresentada na seção 4.1.

7.4

Exemplos numéricos

Nesta sessão apresentaremos os valores da probabilidade de ruína eventual, utilizando as aproximações analíticas e numéricas apresentadas, para os casos em que as indenizações individuais tem distribuição exponencial, gama e pareto. Para os três casos, foi considerado um modelo de risco coletivo com parâmetros $\lambda = 1$ e $E[X] = 1$ e $\theta = 0.2$. Vale resaltar que utilizamos $\beta = 1000$ para a discretização do modelo. Denotaremos por $\psi(u)_E$ o valor encontrado pela expressão fechada, $\psi(u)_{CL}$ a aproximação de Cramér-Lundberg, $\psi(u)_{DV}$ a aproximação de De Vylder, $\psi(u)_{BB}$ a aproximação de Beekman-Bowers, $\psi(u)_1$ a aproximação pelo método dos limites superior e inferior e $\psi(u)_2$ a aproximação proposta por Dickson and Waters.

1. Indenizações individuais com distribuição Exponencial(1)

Como foi citado, no caso em que as indenizações individuais tem distribuição exponencial, temos um expressão fechada para calcular a probabilidade de ruína eventual. Então a tabela 7.1 e a figura 7.2 apresentam a comparação entre a probabilidade de ruína eventual calculada pela expressão fechada, as aproximações analíticas apresentadas no capítulo anterior e as aproximações numéricas apresentadas neste capítulo.

u	$\psi(u)_E$	$\psi(u)_{CL}$	$\psi(u)_{DV}$	$\psi(u)_{BB}$	$\psi(u)_1$	$\psi(u)_2$
$u = 1$	0.7054014	0.7054014	0.7054014	0.6779222	0.7077016	0.7035088
$u = 5$	0.3621652	0.3621652	0.3621652	0.3489617	0.3632971	0.3608454
$u = 10$	0.1573963	0.1573963	0.1573963	0.1608104	0.1578685	0.1546455
$u = 15$	0.06840417	0.06840417	0.06840417	0.07556242	0.06860406	0.06465723
$u = 20$	0.02972833	0.02972833	0.02972833	0.03584945	0.02981434	0.02538516

Tabela 7.1: Valores para a probabilidade de ruína eventual encontrados através da expressão fechada, das aproximações analíticas e numéricas, para um modelo de risco coletivo com os seguintes parâmetros: $X \sim \text{Exp}(1)$, $\lambda = 1$, $\theta = 0.2$.

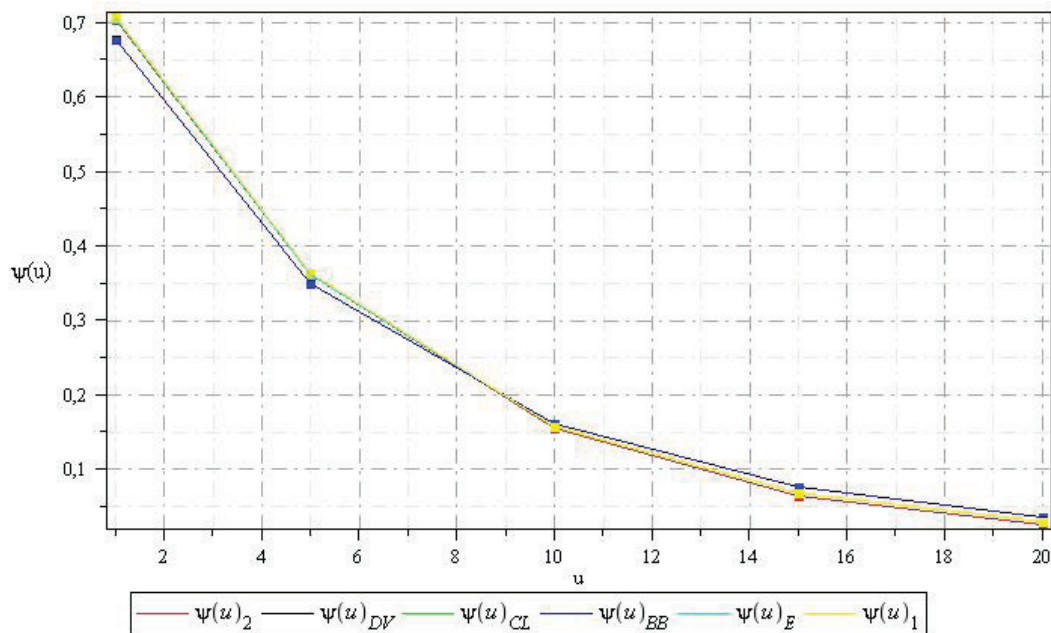


Figura 7.2: Aproximações para a probabilidade de ruína eventual, para um modelo de risco coletivo onde as indenizações individuais tem distribuição exponencial com média 1.

A tabela 7.2 mostra o erros relativos de cada aproximação, quando comparadas com o valor encontrado pela expressão fechada para a probabilidade de ruína eventual.

u	ϵ_{CL}	ϵ_{DV}	ϵ_{BB}	ϵ_1	ϵ_2
$u = 1$	0	0	0.03895540893	0.003260838439	0.002683011403
$u = 5$	0	0	0.03645711957	0.003125369307	0.003644193313
$u = 10$	0	0	0.02169110710	0.003000070523	0.01747690384
$u = 15$	0	0	0.1046463980	0.002922190270	0.05477648512
$u = 20$	0	0	0.2059019124	0.002893199853	0.1460953239

Tabela 7.2: Erros relativos de cada aproximação, quando comparadas com o valor encontrado pela expressão fechada para a probabilidade de ruína eventual.

2. Indenizações individuais com distribuição Gama(2,2)

Como não temos uma expressão fechada para o cálculo da probabilidade de ruína eventual, para o modelo de risco onde as indenizações individuais tem distribuição Gama, na tabela 7.3 e na figura 7.3 só apresentaremos os valores encontrados para a probabilidade de ruína eventual, através das aproximações analíticas e numéricas.

u	$\psi(u)_{CL}$	$\psi(u)_{DV}$	$\psi(u)_{BB}$	$\psi(u)_1$	$\psi(u)_2$
$u = 1$	0.6789702	0.6770267	0.6447556	0.6809568	0.6778334
$u = 5$	0.2741067	0.2737049	0.2698762	0.2752749	0.2724050
$u = 10$	0.08820753	0.08823246	0.09571656	0.0885764	0.08480184
$u = 15$	0.02838518	0.02844292	0.03455477	0.02850653	0.02405926
$u = 20$	0.009134352	0.009168961	0.01258231	0.009175837	0.0043918

Tabela 7.3: Valores para a probabilidade de ruína eventual encontrados através das aproximações analíticas e numéricas, para um modelo de risco coletivo com os seguintes parâmetros: $X \sim \text{Gama}(2, 2)$, $\lambda = 1$, $\theta = 0.2$.

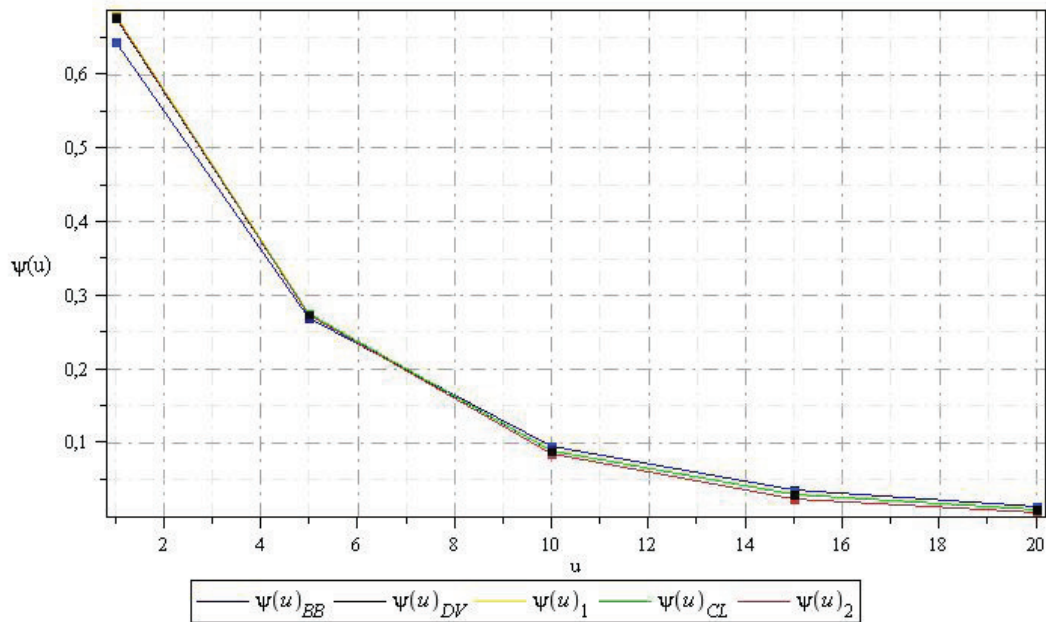


Figura 7.3: Aproximações para a probabilidade de ruína eventual, para um modelo de risco coletivo onde as indenizações individuais tem distribuição gama com média 1.

3. Indenizações individuais com distribuição Pareto(2,1)

Assim como no caso anterior, não temos uma expressão fechada para o cálculo da probabilidade de ruína eventual, para o modelo de risco onde as indenizações individuais tem distribuição Pareto(2,1). Além disso, esse tipo de distribuição não possui função geradora de momentos e os segundo e terceiro momentos. Assim não podemos utilizar as aproximações analíticas apresentadas. Logo a tabela 7.4 e a figura 7.4 só apresentam a comparação entre as aproximações numéricas descritas neste capítulo.

u	$\psi(u)_1$	$\psi(u)_2$
$u = 1$	0.7387807	0.7353676
$u = 5$	0.55657391	0.5552438
$u = 10$	0.4354038	0.4337788
$u = 15$	0.3568834	0.35949271
$u = 20$	0.3006713	0.2984106

Tabela 7.4: Comparação entre as aproximações para a probabilidade de ruína eventual, para um modelo de risco coletivos com os seguintes parâmetros: $X \sim \text{Pareto}(2,1)$, $\lambda = 1$, $\theta = 0.2$.

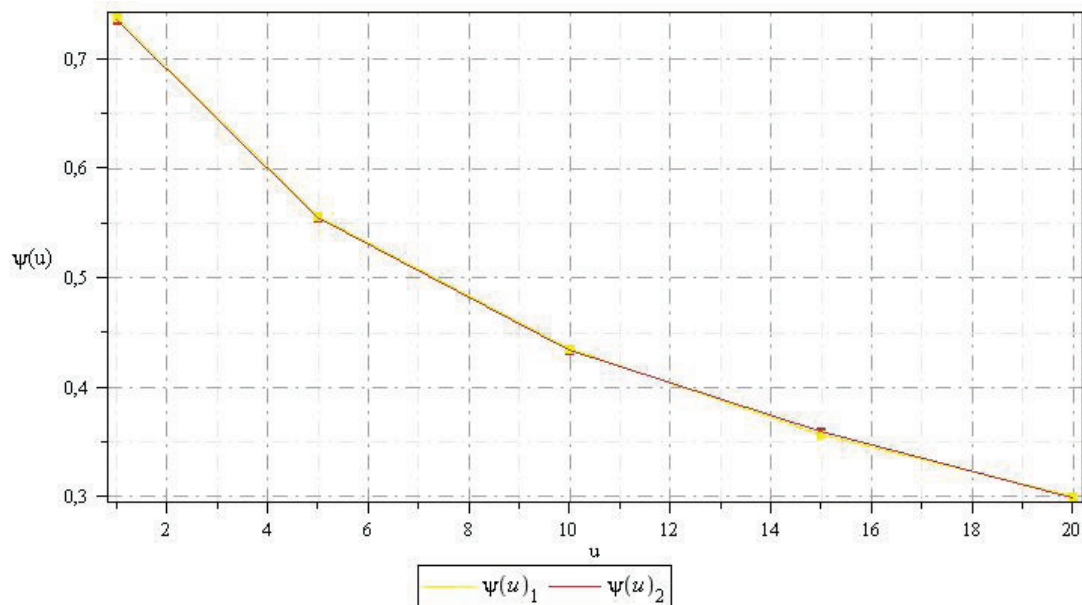


Figura 7.4: Aproximações para a probabilidade de ruína eventual, para um modelo de risco coletivo onde as indenizações individuais tem distribuição pareto com média 1.