6
Aproximações analíticas para o cálculo da probabilidade de ruína eventual

Devido a dificuldade de encontrar uma expressão fechada para a probabilidade de ruína eventual, muitos pesquisadores se dedicam a encontrar boas aproximações para tal probabilidade. Neste capítulo apresentaremos três aproximações analíticas para o cálculo da probabilidade de ruína eventual, que são muito discutidas na literatura, nomeadamente: aproximações de Cramér-Lundberg, de De Vylder e de Beekman-Bowers.

– **Aproximação de Cramér-Lundberg**

  A aproximação de Cramér-Lundberg foi desenvolvida por Harald Cramér e Filip Oskar Lundberg no início do século XX e, na teoria de risco, é a aproximação mais conhecida. Esta é uma aproximação assintótica para a probabilidade de ruína eventual para grandes valores de reserva inicial u e é dada por

$$\psi_{CL}(u) = Ce^{-Ru}, \tag{6-1}$$

  onde $C = \theta E[X]/\{M'_x(R) - E[X](1+\theta)\}$. Para demonstração veja Grandell (1991).

  Temos na literatura que esta aproximação, geralmente, apresenta resultados bastante precisos para a probabilidade de ruína eventual, quando temos $u \geq 0$, porém exige a existência do coeficiente de ajuste R, o que faz necessário o conhecimento da função geradora de momento das indenizações. Logo não pode ser usada para todo tipo de distribuições de indenizações.

– **Aproximação de De Vylder**

  A proposta de De Vylder, em 1978 foi aproximar o modelo de risco coletivo (2-1) para um modelo cuja as indenizações agregadas $\widetilde{S}(t)$ ocorrem de acordo com um processo de Poisson composto de parâmetro $\widetilde{\lambda}$, os valores das indenizações ocorridas no intervalo $(0,t]$ tem distribuição exponencial com média $\widetilde{\beta}^{-1}$ e os prêmios são recebidos continuamente a uma nova taxa constante $\widetilde{c} > 0$.

Para determinar os novos parâmetros igualamos os três primeiros momentos. Logo, temos :

$$\widetilde{\lambda} = \frac{9\lambda p_2^3}{2p_3^2};\ \widetilde{\beta} = \frac{3p_2}{p_3};\ \widetilde{c} = c - \lambda p_1 + \frac{3\lambda p_2^2}{2p_3}. \tag{6-2}$$

Assim a aproximação de De Vylder é dada por:

$$\psi_{DV}(u) = \frac{\widetilde{\lambda}}{\widetilde{\beta}\widetilde{c}} exp\{-(\widetilde{\beta} - \widetilde{\lambda}/\widetilde{c})u\}. \tag{6-3}$$

No caso da distribuição exponencial o método apresenta o resultado exato. Porém esse método só poderá ser aplicado para distribuições que possuam os três primeiros momentos.

De acordo com De Vylder (1978) [3], essa aproximação funciona bem quando a função geradora de momentos da distribuição das indenizações existe.

– **Aproximação de Beekman-Bowers**

John A. BeeKman, em 1969, desenvolveu uma aproximação para a probabilidade de ruína eventual. Porém Newton L. Bowers sugeriu uma modificação para esta aproximação o que a tornou conhecida como aproximação de Beekman-Bowers.

Vimos que a probabilidade de não ruína eventual pode ser calculada usando a distribuição acumulada da distribuição geométrica composta. A idéia desta aproximação consiste em utilizar a expressão (4-7) e substituir a integral pela distribuição gama, o que os fornece

$$\overline{\psi}(u) \approx G(u) = \overline{\psi}(0) + \psi(0)G(u), \tag{6-4}$$

Assim temos a fórmula:

$$\psi_{BB}(u) = \psi(0)[1 - G(u)], \tag{6-5}$$

onde $G(u) = \int_0^u \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx$, com os parâmetros de forma e de escala dados respectivamentes por:

$$\alpha = \frac{(E[L])^2}{Var[L]\psi(0)} \text{ e } \beta = \frac{E[L]}{Var[L]}. \tag{6-6}$$

Esta aproximação só poderá ser utilizada para distribuiçõs de indenizações que possuam os três primeiros momentos.