5 Fórmula de Pollaczek-Khinchin

A fórmula de Pollaczek-Khinchine é uma fórmula geral para calcular a probabilidade de sobrevivência $\overline{\psi}(u)$. Tal fórmula permite expressar a probabilidade de ruína eventual como uma função de distribuição geométrica composta e pode ser utilizada para calcular a probabilidade de ruína eventual em alguns casos especiais de distribuição das indenizações. Essa fórmula é definida com base na variável aletória *perda agregada máxima*, que definiremos na próxima seção.

5.1 Perda agregada máxima

Considere o processo de reservas de uma seguradora $U(t) = u + ct - S(t), t \geq 0$. Definiremos $L(t) = S(t) - ct, t \geq 0$ como um processo de perdas agregadas que mede o excesso das indenizações agregadas sobre os prêmios recebidos pela seguradora em algum instante de tempo. Então a perda agregada máxima L é uma variável aleatória definida por:

$$L = max\{L(t),\ t \geq 0\}.$$

Podemos observar que L é uma variável aleatória não negativa, pois $S(t) = 0$ quando $N(t) = 0$, então $S(t) - ct = 0$ para $t = 0$, logo $L(0) = 0$

L é o maior valor do montante pelo qual a reserva de uma seguradora, pela primeira vez, fica abaixo da sua reserva inical no intervalo de tempo t observado. Assim a função de distribuição acumulada de perda máxima agregada é dada por:

$$\begin{aligned} P(L \leq u) &= P(L(t) \leq u, \forall t \geq 0) = P(S(t) - ct \leq u, \forall t \geq 0) \\ &= P(U(t) \geq 0, \forall t \geq 0) = \overline{\psi}(u). \end{aligned} \tag{5-1}$$

Com isso podemos perceber que a probabilidade de sobrevivência em um tempo infinito é igual a função de distribuição acumulada da variável aleatória L.

Considerando os tempos em que os processos de perda agregadas assumen valores maiores do que os anteriores (recordes), então a perda agregada máxima L pode ser decomposta e,

$$L = L_1 + L_2 + ... + L_M, \tag{5-2}$$

onde $L_i = L(t_i) - L(t_{i-1})$ e $L_0 = 0$. Os valores L_i são denominados montantes de perdas ou saltos dos recordes. Desde que o processo $\{L(t)\}$ tenha incrementos estacionários e independentes, $\{L_M\}_{M=1}^{\infty}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Assim M representa o número de vezes em que os recordes ocorrem até a perda agregada atingir o seu valor máximo pela primeira vez. Portanto, M segue uma distribuição geométrica com parâmetro $\overline{\psi}(0)$, que tem como função de probabilidade

$$P(M = m) = \overline{\psi}(0)\psi(0)^m, m = 0, 1, 2, .., .$$

Para encontrar $\overline{\psi}(0)$ utilizaremos algumas propriedades da transformada de Laplace. Podemos calcular a transformada de Laplace da função de distribuição acumulada da variável aleatória L da seguinte maneira

$$L\{F(L)\} = E(e^{-sL}) = e^0\overline{\psi}(0) + \int_0^{\infty} e^{-su}\overline{\psi}'(u)du. \tag{5-3}$$

Resolvendo a integral, temos que

$$L\{F(L)\} = \overline{\psi}(0) + [e^{-su}\overline{\psi}(u)|_0^{\infty} + s\int_0^{\infty} \overline{\psi}(u)e^{-su}du] = sL\{\overline{\psi}(u)\}. \tag{5-4}$$

Porém não conhecemos a transformada de $\overline{\psi}(u)$. Entretanto aplicando a transformada de Laplace na expressão (4-2) teremos:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-su}\overline{\psi}'(u)du &= \frac{\lambda}{c}\int_0^{\infty} e^{-su}\overline{\psi}(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^{\infty} e^{-su}\int_0^u p(x)\overline{\psi}(u-x)dxdu; \\ sL\{\overline{\psi}(u)\} - \overline{\psi}(0) &= \frac{\lambda}{c}L\{\overline{\psi}(u)\} - -\frac{\lambda}{c}\int_0^{\infty} e^{-su}\int_0^u p(x)\overline{\psi}(u-x)dxdu. \end{aligned} \tag{5-5}$$

Fazendo a seguinte mudança de variável $v = u - x \Rightarrow dv = du$, e mudando a ordem de integração, temos

$$\begin{aligned} sL\{\overline{\psi}(u)\} - \overline{\psi}(0) &= \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{-sx}p(x)dx \int_0^\infty e^{-sv}\overline{\psi}(v)dv \\ sL\{\overline{\psi}(u)\} - \overline{\psi}(0) &= \frac{\lambda}{c}L\{\overline{\psi}(u)\} - \frac{\lambda}{c}L\{p(x)\}L\{\overline{\psi}(u)\} \\ L\{\overline{\psi}(u)\} &= \frac{c\overline{\psi}(0)}{sc - \lambda + \lambda L\{p(x)\}}. \end{aligned} \tag{5-6}$$

Substituindo a expressão (5-6) em (5-4) temos,

$$L\{F(L)\} = \frac{sc\overline{\psi}(0)}{sc - \lambda + \lambda L\{p(x)\}} \tag{5-7}$$

Aplicando a regra de L'Hôpital, temos que:

$$\lim_{s\to 0} L\{F(L)\} = \lim_{s\to 0} \frac{c\overline{\psi}(0)}{c - \lambda + \lambda L'\{p(x)\}} \tag{5-8}$$

Entretando sabemos que a transformada de Laplace de $p(x)$ é dada por $\int_0^\infty e^{-sx}p(x)dx$, Derivando essa transformada de Laplace em relação a s, teremos $-\int_0^\infty xe^{-sx}p(x)dx$. Assim

$$L'\{p(0)\} = -\int_0^\infty xe^{-0}p(x)dx = -\int_0^\infty xp(x)dx = -E[x] = -p_1. \tag{5-9}$$

Substituindo em (5-8), obtemos

$$\lim_{s\to 0} L\{F(L)\} = \frac{c\overline{\psi}(0)}{c-_1} = \frac{\overline{\psi}(0)}{1 - \lambda p_1/c} = \frac{\overline{\psi}(0)}{1 - \psi(0)} = 1. \tag{5-10}$$

Logo como temos que $\lim_{s\to 0} L\{F(L)\} = 1$ e $c = (\theta+1)\lambda p_1$. Então temos o seguinte resultado

$$1 = \frac{c\overline{\psi}(0)}{c + \lambda L'\{p(0)\}} \Rightarrow \overline{\psi}(0) = \frac{\theta}{\theta+1}.$$

5.2
A Fórmula de Pollaczek-Khinchin

Agora apresentaremos a fórmula através do teorema a seguir.

Teorema 5.1 *A probabilidade de sobrevivência pode ser expressa como função de distribuição acumulada geométrica composta dada por*

$$\overline{\psi}(u) = P(L \leq u) = \overline{\psi}(0)\sum_{m=0}^{\infty} \psi(0)^m H^{m*}(u),\ \ u \geq 0 \ \ e\ m = 0, 1, 2, 3, ..., \tag{5-11}$$

em que $H^{m*}(u) = P(\sum_{i=1}^{m} L_i \leq u) = P(L \leq u)$ denota a m-ésima convolução da função distribuição da variáve aleatória L_i. Essa é a expressão conhecida como a fórmula de Pollaczek-Khinchin.

Prova do Teorema: Pela definição temos que

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}(u) = P(L \leq u) &= \sum_{m=0}^{\infty} P(L \leq u \cap M = m) = \sum_{m=0}^{\infty} P(L \leq u\,|M = m)P(M = m) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} P(L_1 + P(L_2 + ... + P(L_M \leq u)P(M = m) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} P(M = m)P\left(\sum_{i=1}^{m} L_i \leq u\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi(0)^m\overline{\psi}(0)H^{m*}(u) \\
&= \overline{\psi}(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \psi(0)^m\overline{\psi}(0)H^{m*}(u); \qquad (5\text{-}12)
\end{aligned}$$

pois, o índice de L_i é $i = 1, 2, ..., m$. □

Seja h^{m*} a densidade de H^{m*}, aplicando a transformada de Laplace em $h^{m*}(u)$, teremos

$$L\{h^{m*}(u)\} = \int_0^{\infty} e^{-su}h^{m*}(u) = [L\{h(u)\}]^m. \qquad (5\text{-}13)$$

Além disso, sabemos que

$$\begin{aligned}
L\{\psi'(u)\} &= \int_0^{\infty} e^{-su}\psi'(u)du = sL\{\psi(u)\} - \psi(0) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi^m(0)\overline{\psi}(0)L\{h^{m*}(u)\} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \psi^m(0)\overline{\psi}(0)[L\{h(u)\}]^m = \frac{\overline{\psi}(0)\psi(0)L\{h(u)\}}{1 - \psi(0)L\{h(u)\}}
\end{aligned}$$

desde que $|\psi(0)L\{h(u)\}| < 1$, pois temos uma série geométrica infinita de razão $\psi(0)L\{h(u)\}$. Então,

$$\begin{aligned}
sL\{\overline{\psi}(u)\} - \overline{\psi}(0) &= \frac{\overline{\psi}(0)\psi(0)L\{h(u)\}}{1 - \psi(0)L\{h(u)\}} \\
sL\{\overline{\psi}(u)\} &= \overline{\psi}(0) + \frac{\overline{\psi}(0)\psi(0)L\{h(u)\}}{1 - \psi(0)L\{h(u)\}} = \frac{\overline{\psi}(0)}{1 - \psi(0)L\{h(u)\}}.
\end{aligned}$$

Substituindo $sL\{\overline{\psi}(u)\}$ pela expressão obtida em (5-6), teremos:

$$\frac{sc\overline{\psi}(0)}{[cs - \lambda + \lambda L\{p(x)\}]} = \frac{\overline{\psi}(0)}{1 - \psi(0)L\{h(u)\}}$$

$$\begin{aligned} sc[1-\psi(0)L\{h(u)\}] &= [cs-\lambda+\lambda L\{p(x)\}] \\ sc\psi(0)L\{h(u)\} &= \lambda[1-L\{p(x)\}] \\ L\{h(u)\} &= \frac{\lambda[1-L\{p(x)\}]}{\psi(0)sc} = \frac{1}{p_1 s}[1-L\{p(x)\}] = \frac{1}{p_1}\left[\frac{1}{s}-\frac{L\{p(x)\}}{s}\right]; \end{aligned}$$

aplicando a transformada inversa de Laplace, temos que

$$h(x) = \frac{1}{p_1}\left[1-P(x)\right], x > 0.$$

Com $h(x)$ podemos calcular a função de distribuição acumulada de L_i através de

$$H(x) = P(L_i \leq x) = \frac{1}{p_1}\int_0^x [1-P(y)]dy,\ x > 0.$$