4
Expressão fechada para a probabilidade de ruína eventual quando as indenizações individuais são exponencialmente distribuídas

Neste capítulo, apresentaremos uma equação para a probabilidade de ruína eventual. Usaremos dois teoremas para encontrarmos essa equação. No primeiro teorema, apresentamos a equação da derivada da probabilidade de ruína. Esta equação nos permitirá encontrar uma expressão fechada para a probabilidade de ruína eventual para o modelo de risco coletivo onde as indenizações particulares seguem uma distribuição exponencial. Já no segundo teorema encontraremos a probabilidade de ruína quando a reserva inicial u da seguradora é maior ou igual a zero.

Teorema 4.1 *Para $u > 0$, temos que a equação de $\psi'(u)$ é dada por*

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c}\psi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u p(x)\psi(u-x)dx - \frac{\lambda}{c}[1 - P(u)], \tag{4-1}$$

ou então, de forma equivalente, em termos da probabilidade de sobrevivência, $\overline{\psi}(u) = 1 - \psi(u)$,

$$\overline{\psi}'(u) = \frac{\lambda}{c}\overline{\psi}(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u p(x)\overline{\psi}(u-x)dx. \tag{4-2}$$

Prova do Teorema: Seja t o tempo em que ocorre a ruína. Se não ocorrer indenizações a reserva será de $u + cdt$. Porém, se ocorrer uma indenização, a reserva após esta indenização será $u + cdt - x$, onde x representa o valor da indenização. Também sabemos que se $x \leq u + cdt$, a reserva restante em dt não será negativa e a probabilidade de ruína para reserva que restou será $\psi(u + cdt - x)$. Entretanto, se $x > u + cdt$, então a indenização ocorrida causou a ruína. Por outro lado, sabemos que o número de indenizações segue um processo de Poisson, então o número de indenizações em (0,dt] tem as seguintes probabilidades:

1. $P[(N(t + dt) - N(t)) = 0] = 1 - \lambda dt + o(dt)$;

2. $P[(N(t+dt)-N(t))=1]=\lambda dt+o(dt)$;

3. $P[(N(t+dt)-N(t))>1]=o(dt)$.

Tendo em vista que a ruína pode ou não ocorrer com a primeira indenização, temos que

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= P(U(u)<0\cap[N(t+dt)-N(t)=0])+P(U(u)<0\cap[N(t+dt)-N(t)=1]) \\
&+ P(U(u)<0\cap[N(t+dt)-N(t)>1]) \\
&= P[(N(t+dt)-N(t))=0]P(U(u)<0|N(t+dt)-N(t)=0) \\
&+ P[(N(t+dt)-N(t))=1]P(U(u)<0|N(t+dt)-N(t)=1) \\
&+ P[(N(t+dt)-N(t))>1]P(U(u)<0|N(t+dt)-N(t)>1) \\
&= (1-\lambda+o(dt))\psi(u+cdt)+\lambda dt\left[\int_0^{u+cdt}p(x)\psi(u+cdt-x)dx+\int_{u+cdt}^{\infty}p(x)dx\right]+o(dt) \\
&= (1-\lambda dt)\psi(u+cdt)+\lambda dt\int_0^{u+cdt}p(x)\psi(u+cdt-x)dx\psi+\lambda dt[1-P(u+cdt)]+o(dt),
\end{aligned}$$

e podemos reescrever como

$$\begin{aligned}
\psi(u+cdt)-\psi(u) &= \lambda dt\psi(u+cdt)-\lambda dt\int_0^{u+cdt}p(x)\psi(u+cdt-x)dx \\
&- \lambda dt[1-P(u+cdt)]+o(dt),
\end{aligned}$$

que dividindo por cdt, teremos

$$\begin{aligned}
\frac{\psi(u+cdt)-\psi(u)}{cdt} &= \frac{\lambda}{c}\psi(u+cdt)-\frac{\lambda}{c}\int_0^{u+cdt}p(x)\psi(u+cdt-x)dx \\
&- \frac{\lambda}{c}[1-P(u+cdt)]+\frac{o(dt)}{cdt},
\end{aligned}$$

ao calcular o limite quando $cdt\to 0$, obtemos

$$\psi'(u)=\frac{\lambda}{c}\psi(u)-\frac{\lambda}{c}\int_0^u p(x)\psi(u-x)dx-\frac{\lambda}{c}[1-P(u)].$$

Para encontrar a equação (4-2) basta lembrar da seguinte relação $\overline{\psi}(u)=1-\psi(u)$. Assim, sabendo que $\psi'(u)=(1-\overline{\psi}(u))'=-\overline{\psi}'(u)$, fazendo as substituições em (4-1), obtemos

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}'(u) &= -\frac{\lambda}{c}(1-\overline{\psi}(u))+\frac{\lambda}{c}\int_0^u p(x)(1-\overline{\psi}(u-x))dx+\frac{\lambda}{c}[1-P(u)] \\
&= -\frac{\lambda}{c}+\frac{\lambda}{c}\overline{\psi}(u)+\frac{\lambda}{c}\int_0^u p(x)dx-\frac{\lambda}{c}\int_0^u p(x)\overline{\psi}(u-x)dx+\frac{\lambda}{c}-\frac{\lambda}{c}P(u),
\end{aligned}$$

tendo em vista que P(0)=0, vem:

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}'(u) &= \frac{\lambda}{c}\overline{\psi}(u) + \frac{\lambda}{c}P(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u p(x)\overline{\psi}(u-x)dx - \frac{\lambda}{c}P(u) \\
&= \frac{\lambda}{c}\overline{\psi}(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u p(x)\overline{\psi}(u-x)dx.
\end{aligned}$$

□

Com o teorema acima podemos encontrar uma expressão a fechada para probabilidade de ruína eventual quando temos um modelo de risco coletivo onde as indenizações particulares são variáveis aleatórias com função de densidade exponencial de parâmetro $\beta > 0$.

De acordo com (4-1) e tendo em vista que

$$\int_0^u p(x)\psi(u-x)dx = \int_0^u p(u-v)\psi(v)dv,$$

pois, fazendo $u - x = v \Rightarrow dx = -dv$, temos

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c}\psi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \beta e^{-\beta(u-v)}\psi(v)dv - \frac{\lambda}{c}e^{-\beta u}$$

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c}\psi(u) - \frac{\lambda\beta}{c}e^{-\beta u}\int_0^u e^{\beta v}\psi(v)dv - \frac{\lambda}{c}e^{-\beta u}; \tag{4-3}$$

derivando em relação a u, obtemos

$$\begin{aligned}
\psi''(u) &= \frac{\lambda}{c}\psi'(u) + \frac{\lambda\beta^2 e^{-\beta u}}{c}\int_0^u e^{\beta v}\psi(v)dv - \frac{\lambda\beta e^{-\beta u}}{c}\left[e^{\beta u}\psi(u) - e^{\beta 0}\psi(0)\frac{d0}{du}\right] \\
&+ \frac{\lambda\beta}{c}e^{-\beta u}.
\end{aligned} \tag{4-4}$$

De (4-3), temos

$$\int_0^u e^{\beta v}\psi(v)dv = -\frac{c}{\lambda\beta e^{-\beta u}}\left[\psi'(u) - \frac{\lambda}{c}\psi(u) + \frac{\lambda}{c}e^{-\beta u}\right].$$

Substituindo a parcela da integral na expressão(4-4) resulta em:

$$\begin{aligned}
\psi''(u) &= \frac{\lambda}{c}\psi'(u) - \beta\left[\psi'(u) - \frac{\lambda}{c}\psi(u) + \frac{\lambda}{c}e^{-\beta u}\right] - \frac{\lambda\beta}{c}\psi(u) + \frac{\lambda\beta}{c}e^{-\beta u} \\
&= \frac{\lambda}{c}\psi'(u) - \beta\psi'(u) \\
&= -\psi'(u)\left(\beta - \frac{\lambda}{c}\right).
\end{aligned}$$

Esta expressão corresponde a uma equação diferrencial cuja solução é $\psi(u) = k_1 + k_2 e^{-\left(\beta - \frac{\lambda}{c}\right)u}$. Utilizando a hipótese de que $c > \lambda p_1$, isto é, $c > \lambda E[X]$, então $c > \frac{\lambda}{\beta}$ implicando que $\beta > \frac{\lambda}{c}$. Sabemos que $\lim_{u\to\infty} \psi(u) = 0$, então $\lim_{u\to\infty} \psi(u) = \lim_{u\to\infty} k_1 + k_2 e^{-(\beta - \frac{\lambda}{c})u} = k_1 = 0$. Além disso, $\psi(0) = k_2$.

Desta forma, concluímos que $\psi(u) = k_2 e^{-\left(\beta - \frac{\lambda}{c}\right)u} = \psi(0) e^{-\left(\beta - \frac{\lambda}{c}\right)u}$ ou ainda que $\psi'(u) = \left(\frac{\lambda}{c} - \beta\right)\psi(0) e^{-\left(\beta - \frac{\lambda}{c}\right)u} = -\left(\beta - \frac{\lambda}{c}\right)\psi(u)$. Ao substituir $\psi'(u)$ em (4-3), obtemos

$$\begin{aligned}
\psi'(u) &= \frac{\lambda}{c}\psi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \beta e^{-\beta(u-v)}\psi(v)dv - \frac{\lambda}{c}e^{-\beta} \\
-\left(\beta - \frac{\lambda}{c}\right)\psi(u) &= \frac{\lambda}{c}\psi(u) - \frac{\lambda\beta}{c}e^{-\beta u}\int_0^u e^{\beta v}\psi(v)dv - \frac{\lambda}{c}e^{-\beta u} \\
\beta\psi(u) &= \frac{\lambda\beta}{c}e^{-\beta u}\int_0^u e^{\beta v}\psi(v)dv + \frac{\lambda}{c}e^{-\beta u} \\
\psi(u) &= \frac{\lambda}{c}e^{-\beta u}\int_0^u e^{\beta v}\psi(v)dv + \frac{\lambda}{c\beta}e^{-\beta u}.
\end{aligned}$$

Fazendo $u = 0$, temos que $\psi(0) = \frac{\lambda}{c\beta}$. Assim temos a seguinte expressão fechada para probabilidade de ruína eventual,

$$\psi(u) = \psi(0)e^{-\left(\beta - \frac{\lambda}{c}\right)u} = \frac{\lambda}{c\beta}e^{-\left(\beta - \frac{\lambda}{c}\right)u}. \tag{4-5}$$

Teorema 4.2 *Para $u \geq 0$, temos que a equação de $\psi(u)$ satisfaz a seguinte equação:*

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c}\int_u^\infty [1 - P(x)]dx + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \psi(u-x)[1 - P(x)]dx, \tag{4-6}$$

ou então, de forma equivalente, em termos da probabilidade de sobrevivência, $\overline{\psi}(u) = 1 - \psi(u)$,

$$\overline{\psi}(u) = \overline{\psi}(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \overline{\psi}(u-x)[1 - P(x)]dx. \tag{4-7}$$

Prova do Teorema: De (4-2), integrando variável u em $(0, t]$, obtemos

$$\int_0^t \overline{\psi'}(u)du = \frac{\lambda}{c}\int_0^t \overline{\psi}(u)du - \frac{\lambda}{c}\int_0^t\int_0^u p(x)\overline{\psi}(u-x)dxdu, \tag{4-8}$$

Resolveremos apenas a integral dupla do segundo membro da igualdade, aplicando integral por partes da seguinte maneira: seja $w = \overline{\psi}(u-x)$ e

$dv = d[1 - P(x)]$. Então, $\frac{dw}{dx} = \frac{d}{dx}\overline{\psi}(u-x)$ e $v = 1 - P(x)$. Com isso,

$$\begin{aligned}
\int_0^u p(x)\overline{\psi}(u-x)dx &= -\int_0^u \overline{\psi}(u-x)d[1-P(x)] \\
&= -\left(\left[\overline{\psi}(u-x)[1-P(x)]\,|_0^u\right] - \int_0^u \frac{d}{dx}\overline{\psi}(u-x)[1-P(x)]dx\right).
\end{aligned}$$

Tendo em vista que $P(0) = 0$, vem:

$$\begin{aligned}
\int_0^u p(x)\overline{\psi}(u-x)dx &= -\left([\overline{\psi}(0)[1-P(u)] - \overline{\psi}(u)] - \int_0^u \frac{d}{dx}\overline{\psi}(u-x)[1-P(x)]dx\right) \\
&= -\overline{\psi}(0)[1-P(u)] + \overline{\psi}(u) + \int_0^u \frac{d}{dx}\overline{\psi}(u-x)[1-P(x)]dx,
\end{aligned}$$

substituindo o resultado em (4-8), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^t \overline{\psi}'(u)du &= \frac{\lambda}{c}\int_0^t \overline{\psi}(u)du + \frac{\lambda}{c}\int_0^t \overline{\psi}(0)[1-P(u)]du - \frac{\lambda}{c}\int_0^t \overline{\psi}(u)du \\
&- \frac{\lambda}{c}\int_0^t\int_0^u \frac{d}{dx}\overline{\psi}(u-x)[1-P(x)]dxdu \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^t \overline{\psi}(0)[1-P(u)]du - \frac{\lambda}{c}\int_0^t\int_0^u \frac{d}{dx}\overline{\psi}(u-x)[1-P(x)]dxdu.
\end{aligned}$$

Sabe-se que $\frac{d}{dx}\overline{\psi}(u-x) = -\frac{d}{du}\overline{\psi}(u-x)$, então

$$\int_0^t \overline{\psi}'(u)du = \frac{\lambda}{c}\int_0^t \overline{\psi}(0)[1-P(u)]du + \frac{\lambda}{c}\int_0^t\int_0^u \frac{d}{du}\overline{\psi}(u-x)[1-P(x)]dxdu.$$

Mudando a ordem de integração, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^t \overline{\psi}'(u)du &= \frac{\lambda}{c}\int_0^t \overline{\psi}(0)[1-P(u)]du + \frac{\lambda}{c}\int_0^t [1-P(x)]\int_x^t \frac{d}{du}\overline{\psi}(u-x)dudx \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^t \overline{\psi}(0)[1-P(u)]du + \frac{\lambda}{c}\int_0^t [1-P(x)][\overline{\psi}(t-x) - \overline{\psi}(0)]dx
\end{aligned}$$

$$\overline{\psi}(t) - \overline{\psi}(0) = \frac{\lambda}{c}\int_0^t [1-P(x)]\overline{\psi}(t-x)dx,$$

ou, equivalentemente:

$$\overline{\psi}(u) = \overline{\psi}(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u [1-P(x)]\overline{\psi}(u-x)dx.$$

Entretanto, note que $\overline{\psi}(0)$ é desconhecido. Então, da equação (4-7) temos

$$\overline{\psi}(u) - \overline{\psi}(0) \leq \frac{\lambda}{c} \int_0^u [1 - P(x)]dx,$$

pois, $\overline{\psi}(u - x) \in (0, 1)$. Calculando o limite quanto $u \to \infty$ temos que $lim_{u \to \infty} \overline{\psi}(u) = 1$. Assim,

$$1 - \overline{\psi}(0) \leq \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} [1 - P(x)dx = \frac{\lambda}{c} E[x] = \frac{\lambda}{c} p_1$$

$$\overline{\psi}(0) \geq 1 - \frac{\lambda}{c} p_1.$$

Como $\frac{1}{1+\theta} = \frac{\lambda p_1}{c}$, então

$$\overline{\psi}(0) \geq 1 - \frac{1}{(1+\theta)} = \frac{\theta}{(1+\theta)}.$$

Por outro lado, da Desigualdade de Lundberg temos que $\psi(u) \leq e^{-Ru}$, portanto $\overline{\psi}(u) \geq 1 - e^{-Ru}$. Consequentemente,

$$\int_0^u [1 - P(x)] \overline{\psi}(u - x)dx \geq \int_0^u [1 - P(x)](1 - e^{-R(u-x)})dx.$$

Então de (4-7), temos que

$$\begin{aligned} \overline{\psi}(u) - \overline{\psi}(0) &\geq \frac{\lambda}{c} \int_0^u [1 - e^{-R(u-x)}][1 - P(x)]dx \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_0^u [1 - P(x)]dx - \frac{\lambda}{c} e^{-Ru} \int_0^u e^{Rx} [1 - P(x)]dx. \quad (4\text{-}9) \end{aligned}$$

ao calcular a segunda integral quando $u \to \infty$, obtém-se

$$\int_0^{\infty} e^{Rx} [1 - P(x)]dx = \int_0^{\infty} e^{Rx} \int_0^{\infty} p(y)dydx;$$

mudando a ordem de integração, temos

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{Rx} [1 - P(x)]dx &= \int_0^{\infty} p(y) \int_0^y e^{Rx} dxdy = \frac{1}{R} \int_0^{\infty} p(y) \left(e^{Ry} - 1 \right) dy \\ &= = \frac{1}{R} \left[\int_0^{\infty} p(y) e^{Ry} dy - \int_0^{\infty} p(y)dy \right] = \frac{1}{R} \left(M_X(R) - 1 \right) \\ &= = \frac{1}{R} \left(1 + \frac{cR}{\lambda} - 1 \right) = \frac{c}{\lambda}. \end{aligned}$$

Substituindo o resultado acima na equação (4-9) e calculando o limite quando $u \to \infty$, temos que $\lim_{u\to\infty} e^{-Ru} = 0$ e $\lim_{u\to\infty} \overline{\psi}(u) = 1$. Logo;

$$\begin{aligned} 1 - \overline{\psi}(0) &\geq \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty [1-P(x)]dx = \frac{\lambda}{c}E[X] \\ \overline{\psi}(0) &\leq 1 - \frac{\lambda}{c}p_1. \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{1+\theta} = \frac{\lambda p_1}{c}$, então

$$\overline{\psi}(0) \leq 1 - \frac{1}{(1+\theta)} = \frac{\theta}{(1+\theta)}.$$

Como consequência, temos

$$\frac{\theta}{(1+\theta)} \leq \overline{\psi}(0) \leq \frac{\theta}{(1+\theta)},$$

o que implica

$$\overline{\psi}(0) = \frac{\theta}{(1+\theta)},\ \theta > 0.$$

Para encontrar $\psi(0)$, basta fazer $\psi(0) = 1 - \overline{\psi}(0)$. Como $\theta = \frac{c}{\lambda p_1} - 1 = \frac{c-\lambda p_1}{\lambda p_1}$ e $\overline{\psi}(0) = 1 - \frac{\lambda p_1}{c}$, chega-se ao seguinte resultado

$$\psi(0) = \frac{1}{1+\theta} = \frac{\lambda p_1}{c}.$$

Para encontrar a equação (4-6) basta lembrar da seguinte relação $\psi(u) = 1 - \overline{\psi}(u)$. Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} \psi(u) &= 1 - \overline{\psi}(u) = 1 - \left(1 - \frac{\lambda}{c}p_1 + \frac{\lambda}{c}\int_0^u (1-\psi(u-x))[1-P(x)]dx\right) \\ &= \frac{\lambda}{c}p_1 - \frac{\lambda}{c}\left[\int_0^u [1-P(x)]dx - \int_0^u \psi(u-x)[1-P(x)]dx\right] \\ &= \frac{\lambda}{c}E[X] - \frac{\lambda}{c}\int_0^u [1-P(x)]dx + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \psi(u-x)[1-P(x)]dx \\ &= \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty [1-P(x)]dx - \frac{\lambda}{c}\int_0^u [1-P(x)]dx + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \psi(u-x)[1-P(x)]dx \\ &= \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty [1-P(x)]dx + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \psi(u-x)[1-P(x)]dx. \end{aligned}$$

$\square$