3
O limite superior de Lundberg para a probabilidade de ruína eventual

Como na maioria dos casos não é possível conseguir uma expressão fechada para a probabilidade de ruína, $\psi(u)$. Utilizando o modelo (2-1), Lundberg apresentou uma desigualdade, que ficou conhecida na literatura como desigualdade de Lundberg, a qual fornece um limitante superior para a probabilidade de ruína, assumindo a existência de um *coeficiente de ajuste* que é denotado por R. Neste capítulo apresentaremos a desigualdade de Lundberg e o coeficente de ajuste R.

3.1
Coeficiente de ajuste

Considere que para uma variável X cuja função geradora de momentos $m_X(r)$ exista para $-\infty < r < \gamma$, tal que $\lim\limits_{r \to \gamma} m_X(r) = +\infty$.

Lema 3.1 *Seja $X \geq 0$ a variável aleatória que representa o valor da indenização onde $\gamma > 0$. Então para quaisquer números $\lambda, c > 0$, temos que*

$$\lim_{r \to \gamma} [\lambda m_X(r) - cr] = +\infty.$$

Dado um modelo de risco onde o processo $S(t)$ tem distribuição de Poisson composta, definimos a *função de ajuste* por $A(r) = \lambda m_X(r) - \lambda - cr$ e a *equação de ajuste* por

$$A(r) = \lambda m_X(r) - \lambda - cr = 0.$$

O *coeficiente de ajuste*, denotado por R, para o processo de reservas é a única raiz positiva de $A(r)$.

Faremos algumas considerações sobre $A(r)$ para mostrarmos que ela possui somente uma raiz positiva.

- $A(r)$ é contínua;

- $r = 0$ é sempre raiz de $A(r)$, pois $A(0) = \lambda m_X(0) - \lambda - c.0 \Rightarrow A(0) = \lambda E\left[e^{0X}\right] - \lambda \Rightarrow A(0) = \lambda - \lambda = 0$;
- $A(r)$ é decrescente na vizinhamça de zero, pois $A'(r) = \lambda m'_X(r) - c \Rightarrow A'(0) = \lambda m'_X(0) - c \Rightarrow A'(0) = \lambda E[Xe^{0X}](0) - c \Rightarrow A'(0) = \lambda E[X](0) - c < 0$;
- $A(r)$ é convexa, pois $A''(r) = \lambda m''_X(r) = \lambda E\left[X^2 e^{rX}\right] > 0$;
- $\lim\limits_{r \to \gamma} [\lambda m_X(r) - \lambda - cr] = +\infty$.

Consequentemente segue que $A(r)$ terá uma única raiz positiva, pelo teorema do valor intermediário.

Na figura 3.1 apresentamos o gráfico de $A(r)$ para um processo de reserva de Poisson onde as indenizações individuaias tem distribuição Gama$(2, 0.01), \lambda = 30$ e $\theta = 0.2$. É possível verificar que $R = 0.001134$.

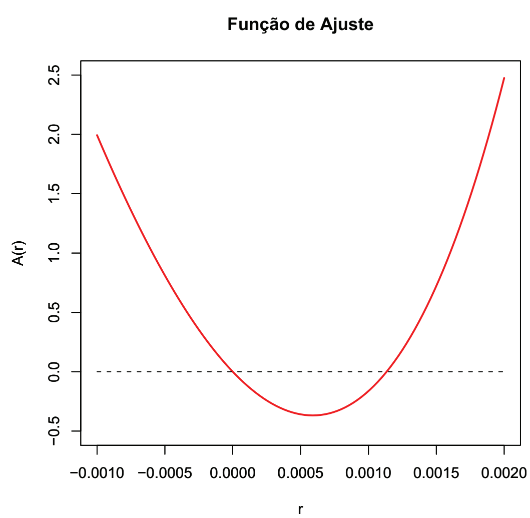

Figura 3.1: *Função de ajuste onde os temos como parâmetros do Processo de reservas $\lambda = 30$ e $\theta = 0.2$ e as indenizações individuais com distribuição $Gama(2, 0.01)$.*

Em alguns casos é possível resolver explicitamente a equação de ajuste para o coeficiente de ajuste R. Temos como exemplo um modelo de risco coletivo, onde as indenizações individuais tem distribuição exponencial com parâmetro β. Assim $E[X] = \frac{1}{\beta}$ e a função geradora de momento $m_X(r)$ será dada por $\frac{\beta}{\beta - r}$. Então a equação de ajuste ficará da seguinte forma:

$$A(r) = \lambda \frac{\beta}{\beta - r} - \lambda - cr = 0.$$

Ela possui raízes em $r = 0$ e em $r = \beta - \lambda/c$, mas sabemos que $c = (1+\theta)\lambda p_1 = \frac{\lambda(1+\theta)}{\beta}$, então o coeficiente de ajuste tem a forma:

$$R = \frac{\beta\theta}{1+\theta}. \tag{3-1}$$

Porém na maioria dos casos é necessário utilizar métodos numéricos para encontrar o coeficiente de ajuste, como por exemplo o método de Newton-Raphson.

Quando utilizamos um método numérico para o cálculo do coeficiente de ajuste, é necessário um valor inicial, que podemos obter fazendo uma observação na definição do coeficiente de ajuste R. Pois pela definição temos

$$\begin{aligned}
\lambda + cR = \lambda M_X(R) &= \lambda \int e^{RX} f_X(x)dx \\
&\geq \lambda \int_0^{+\infty} \left[1 + Rx + \frac{R^2x^2}{2}\right] f_X(x)dx \\
&= \lambda \left[1 + RE(X) + \frac{R^2E(X^2)}{2}\right] \\
&\Rightarrow 2(\lambda + cR) \geq \lambda \left[2 + 2RE(X) + R^2E(X^2)\right] \\
&\Rightarrow R \leq \frac{2(c - \lambda E(X))}{\lambda E(X^2)} = \frac{2\theta E(X)}{E(X^2)}.
\end{aligned}$$

Isso fornece um limite superior útil, independente de λ, para o coeficiente de ajuste.

3.2 Desigualdade de Lundberg

A desigualdade clássica de Lundberg nos mostra o quanto o coeficiente de ajuste R é util para dar um limite superior para a probabilidade de ruína $\psi(u)$.

Teorema 3.2 (Desigualdade de Lundberg) *Considere que $S(t)$ tem distribuição Poisson composta $(\lambda t, P(x))$, com $P(X \leq 0) = P(0) = 0$ e o coeficiente de ajuste R existe. Então a Desigualdade de Lundberg é dada por*

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}. \tag{3-2}$$

Prova do Teorema: Seja $\psi_n(u)$ a probabilidade de ruína antes ou na n-ésima indenização. Sabemos que o $\lim_{n\to\infty} \psi_n(u) = \psi(u)$, então precisamos mostrar por indução que $\psi(u) \leq e^{-Ru}$. Para n=1 a ruína só poderá ocorrer na primeira indenização e por definição temos que o tempo até a primeira indenização tem distribuição exponencial de média $\frac{1}{\lambda}$. Então

$$\begin{aligned}\psi_1(u) &= P([0 < T < \infty] \cap [U(t) < 0]) = P([0 < T < \infty] \cap [u + ct - S(t)] < 0) \\ &= P([0 < T < \infty] \cap [X_1 > u + ct]) = \int_0^\infty \int_{u+ct}^\infty \lambda e^{-\lambda t} f(x) dx dt.\end{aligned}$$

Como R é positivo devido as considerações anteriores e $x > u + ct$; logo $u + ct - x < 0$, implicando que $e^{-R(u+ct-x)}$ é um valor maior que um. Assim,

$$\psi_1(u) \leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)} f(x) dx dt.$$

Aumentando o limite de integração, obtemos

$$\begin{aligned}\psi_1(u) &\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty e^{-R(u+ct-x)} f(x) dx dt \\ &= e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} e^{-Rct} \int_0^\infty e^{-Rx} f(x) dx dt \\ &= e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda e^{-t(\lambda + Rc)} \int_0^\infty e^{-Rx} f(x) dx dt \\ &= e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda m_X(R) e^{-t(\lambda + Rc)} dt,\end{aligned}$$

que, fazendo a substituição $\lambda M_X(R) = \lambda + cR$, resulta em:

$$\begin{aligned}\psi_1(u) &\leq e^{-Ru} \int_0^\infty (\lambda + cR) e^{-t(\lambda + cR)} dt \\ &= e^{-Ru},\end{aligned}$$

pois o integrando da última integral corresponde a função densidade de probabilidade da Exponencial$(\lambda + cR)$.

Seguindo o raciocínio análogo para $n = 1$; temos que para $n = 2$ a ruína só ocorrerá na primeira indenização ou na segunda indenização, então:

$$\begin{aligned}\psi_2(u) &= P([0 < T < \infty] \cap [X_1 > u + ct]) \\ &+ P([0 < T < \infty] \cap [X_1 > u + ct] \cap (X_2 \text{ ocorre ruína})).\end{aligned}$$

Pois, se a ruína ocorreu na primeira indenização, consequentemente, a segunda indenização ocorrerá com o sistema em ruína e consequentemente com probabilidade um. No caso em que a primeira indenização não leva o sistema a ruína, o sistema fica na segunda indenização com probabilidade $\psi(u + ct - x)$; onde $u + ct - x$ é o valor de $U(t)$ após a primeira indenização, tal que x representa o valor da primeira indenização. Então

$$
\begin{aligned}
\psi_2(u) &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty f(x)dxdt + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} f(x)\psi_1(u+ct-x)dxdt \\
&\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)} f(x)dxdt + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} f(x)e^{-R(u+ct-x)}dxdt;
\end{aligned}
$$

sabemos que, por hipótese $\psi_1(u)(u+ct-x) \leq e^{-R(u+ct-x)}$, temos

$$
\begin{aligned}
\psi_2(u) &\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \left[\int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)} f(x)dxdt + \int_0^{u+ct} f(x)e^{-R(u+ct-x)}dxdt\right] \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty e^{-R(u+ct-x)} f(x)dxdt = e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda+cR)t} \int_0^\infty \lambda e^{Rx} p(x)dxdt \\
&= e^{-Ru},
\end{aligned}
$$

como em $\psi_1(u)$.

Supondo válido para n, temos que provar para $n+1$. Usando o mesmo raciocínio anterior e considerando, agora, que a ruína acontece na primeira ou nas n indenizações seguintes, temos

$$
\begin{aligned}
\psi_{n+1}(u) &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty f(x)dxdt + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} f(x)\psi_n(u+ct-x)dxdt \\
&\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty f(x)e^{-R(u+ct-x)}dxdt + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} f(x)e^{-R(u+ct-x)}dxdt \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \left[\int_{u+ct}^\infty f(x)e^{-R(u+ct-x)}dxdt + \int_0^{u+ct} f(x)e^{-R(u+ct-x)}dxdt\right] \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty f(x)e^{-R(u+ct-x)}dxdt = e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+cR)t} \int_0^\infty f(x)e^{Rx}dxdt \\
&= e^{-Ru}.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\psi_n(u) \leq e^{-Ru}$. □

A figura 3.2 apresenta o gráfico da probabilidade de ruína em função do tempo t para um modelo de risco coletivo onde as indenizações individuas tem distribuição Exponencia(0.1), $\lambda = 1$ e $\theta = 0.1$ e reserva inicial $u = 100$. Para esse processo o coeficiente de ajuste será $R = 0.090909$ e consequentemente $e^{-R100} = 0.4028903$, que é representado no gráfico através de uma linha sólida. Podemos observar que a probabilidade de ruína não ultrapassa o valor do limitante superior proposto por Lundberg.

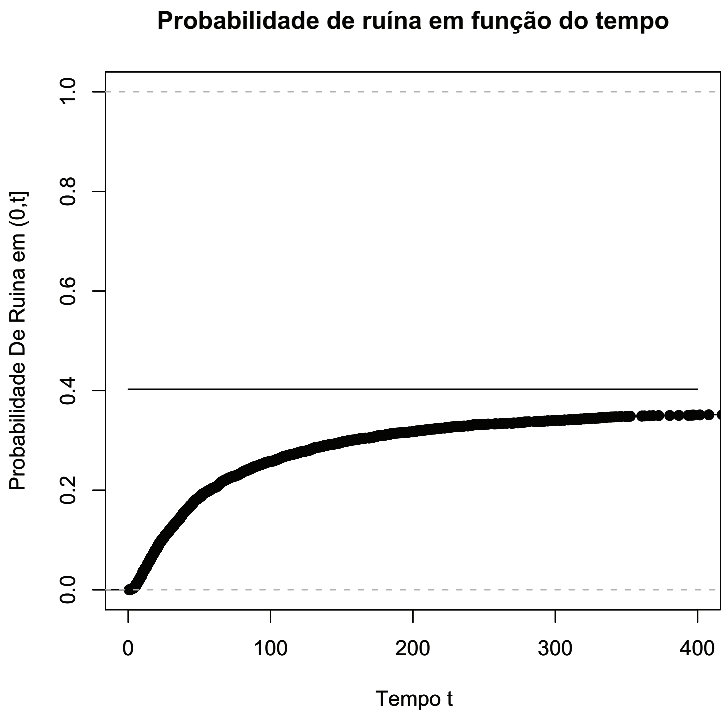

Figura 3.2: *Probabilidade de ruína em função do tempo e o Limitante de Lundberg para um processo de parâmetros* $\lambda = 1$, $\theta = 0.1$ *e indenizações individuais com distribuição Exponencial*(0.1).