2
Modelo Clássico de Cramér-Lundberg

2.1
Conceitos fundamentais

Nesta sessão introduziremos alguns conceitos fundamentais que serão utilizados na descrição do modelo de ruína.

A lei de probabilidade que rege um determinado experimento aleatório pode mudar ao longo do tempo. Assim faz sentido considerar, em cada instante de tempo, uma variável alatória $N(t)$ que associará ao mesmo acontecimento, em instantes distintos, probabilidades (possivelmente) distintas. Esta sucessão de variáveis aleatórias designa-se por *processo estocástico*. Formalmente, poderemos representar um processo estocástico como $\{N(t) : t \in \mathcal{T}\}$, onde $\mathcal{T}$ é o conjunto de índices do processo e t é o parâmetro do processo. Quanto a natureza das medições temporais, os processos estocásticos podem ser classificados como *processo estocástico em tempo discreto* no caso de $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, ...\}$, ou como *processo estocástico em tempo contínuo* no caso $\mathcal{T} = [0, +\infty)$.

Considerando os valores $t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+1}$ como possíveis para t, podemos definir o *incremento do processo* como a variável aleatória $N(t_{k+1}) - N(t_k),\ k = 1, 2, \cdots, n$.

Dizemos que o processo tem *incrementos independentes* se, para $t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+1}$, as variáveis aleatórias $N(t_2) - N(t_1), \cdots, N(t_{n+1}) - N(t_n)$ são independentes. Além disso o processo tem *incrementos estacionários* se, para quaisquer $t_i < t_k$ e para todo $h \in \mathbb{R}, h > 0$, a variável aleatória $N(t_k) - N(t_i)$ tiver a mesma distribuição da variável aleatória $N(t_k + h) - N(t_i + h)$. Estas duas definições são importantes se quisermos descrever um processo de Poisson, como veremos mais à frente.

Quando $N(t)$ representa o número de ocorrências de um fenômeno aleatório no intervalo $(0, t]$ diz-se que $N(t), t \geq 0$ é um *processo de contagem*. Um caso particular de um processo de contagem é o processo de Poisson com taxa $\lambda > 0$ para todo $t > 0$, onde

1. $N(0) = 0$;

2. $N(t), t \geq 0$ tem incrementos independentes e estacionários;

3. $\forall h \to 0^+, P(N(h) = 1) = \lambda h + O(h)$;

4. $\forall h \to 0^+, P(N(h) \geq 2) = O(h)$.

O model o que descreveremos está relacionado com o montante e o número de indenizações a que um conjunto de apólices dá origem. Por isso, vamos introduzir um outro conceito que é o *processo estocástico composto*, identificado pela letra S. Se tivermos um processo de contagem $N(t), t \geq 0$, uma família de variáveis aleatórias $X_i,\ i = 0, 1, 2, \cdots$ independentes entre si e identicamente distribuídas (i.i.d.) que são independentes de $N(t)$, e $S(t), t \geq 0$ definido como

$$S(t) = \sum_{i=0}^{N(t)} X_i,$$

onde $X_0 \equiv 0$, então $S(t), t \geq 0$ é um *processo estocástico composto*. No caso de $\{N(t),\ t \geq 0\}$ ser um processo de Poisson, então $\{S(t),\ t \geq 0\}$, descreverá o que chamanos de um processo de Poisson composto.

2.2
Descrição do Modelo Clássico de Cramér-Lundberg

No modelo clássico de risco coletivo, a variável aleatória $N(t)$ representa o número de indenizações ocorridas no intervalo $(0, t]$ e segue um processo de Poisson homogêneo com taxa $\lambda > 0$. Em relação as indenizações individuais, é considerado que $\{X_i\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias em que cada uma das variáveis X_i diz respeito ao valor da i-ésima indenização associada a um sinistro ocorrido no intervalo $(0, t]$. Além disso é admitido que as indenizações individuais são independentes entre si e identicamente distribuídas e independentes de $N(t)$

Então, o modelo clássico de risco coletivo é um processo estocástico definido da seguinte forma:

$$U(t) = u + ct - S(t),\ t\ \geq 0, \tag{2-1}$$

onde $U(t)$ é a reserva de uma seguradora até o instante t e $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ representa as indenizações agregadas no intervalo $(0, t]$. Nesse processo é suposto que $U(0) = u$, onde u representa a reserva inicial, e os prêmios (prestações pagas pelos segurados para a contratação de seguro) são recebidos a uma taxa constante c por unidade de tempo.

No estudo de qualquer modelo de risco, é sempre importante conhecer a distribuição das indenizações individuais. Vamos considerar $P(x) = P(X_i \leq x)$ a função distribuição das indenizações individuais X_i, com $P(0) = 0$, $p(x)$ a respectiva função densidade, e $m_{X_i}(r) = E[e^{rX_i}]$ a função geradora de momentos, caso exista. Vamos admitir a existência da média e denotá-la por $p_1 = E[X]$.

Na figura 2.1 temos um exemplo de uma trajetória de um processo de reserva de risco de uma seguradora conforme o modelo de risco coletivo, para o caso em que $u = 10$, $c = 1.3$, $\lambda = 1$ e as indenizações tem distribuição exponencial com $p_1 = 1$. É possível observar que o processo de reserva atinge valores negativos em 5.63 e no intervalo $(5.68, 7.56)$, ou seja a seguradora esteve com reservas insuficiente para pagar as indenizações.

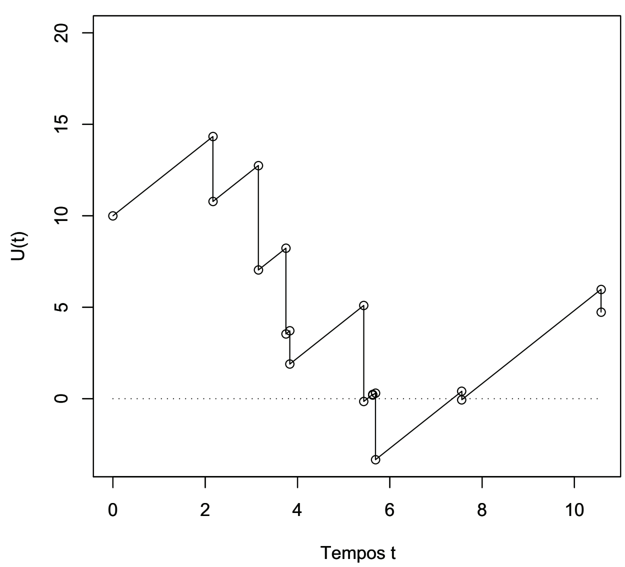

Figura 2.1: *Exemplo de uma trajetória, obtida por simulação, de um processo de reserva* $U(t)$, *onde* $X_i \sim Exp(1)$, $\lambda = 1$, $c = 1.3$ *e* $u = 10$.

Vale ressaltar que o modelo de risco coletivo só leva em consideração as indenizações pagas e os prêmios recebidos que geram a reserva da seguradora, desconsiderando as despesas com contratos de seguro, as taxas administrativas, os rendimentos de investimentos e as taxas de juros.

Como o número de indenizações $\{N_t\}_t$ é processo de Poisson homogêneo, então com base nos conceitos apresentados na sessão 2.1, podemos concluir que o processo de indenizações agregadas $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ é um processo de Poisson composto que possui a seguinte distribuição:

$$F_s(x) = P(S(t) \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(x) \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}$$

onde $F^{*n}(x) = P(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq x)$ é a n-ésima convolução de $F_X(x)$.

Para mostrar esse fato, observe que pela definição, temos que:

$$\begin{aligned}
F_s(x) &= P(S(t) \leq x) = P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq x\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P[N(t) = n] P\left(X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_{N(t)} \leq x | N(t) = n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P\left[N(t) = n\right] P\left[X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n \leq x\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} F^{*n}(x)
\end{aligned}$$

A esperança e a variância de S(t) são dadas respectivamente por

$$E\left[S(T)\right] = \lambda t E\left[X\right] \;\; e \; V\left[S(t)\right] = \lambda t E\left[X^2\right]$$

Para verificar esse fato, tem-se que:

$$\begin{aligned}
E\left[S(t)\right] &= E\left[E\left[X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_{N(t)}\right] | N(t) = n\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_{N(t)} | N(t) = n\right] P\left[N(t) = n\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n\right] P\left[N(t) = n\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] P\left[N(t) = n\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} nE\left[X\right] P\left[N(t) = n\right] = E\left[X\right] \sum_{n=0}^{\infty} nP\left[N(t) = n\right] = E\left[X\right] E\left[N(t)\right] = \lambda t E\left[X\right].
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
Var\left[S(t)\right] &= E\left[S(t)^2\right] - E\left[S(t)\right]^2 \\
&= E\left[\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i\right)^2\right] - \left(E\left[X\right]E\left[N(t)\right]\right)^2 \\
&= E\left[E\left[\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i\right)^2 | N(t)=n\right]\right] - \left(E\left[X\right]E\left[N(t)\right]\right)^2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]^2\right] P\left[N(t)=n\right] - \left(E\left[X\right]E\left[N(t)\right]\right)^2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] + \left(E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]\right)^2\right] P\left[N(t)=n\right] - \left(E\left[X\right]E\left[N(t)\right]\right)^2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[nVar[X] +^n 2\left(E\left[X\right]\right)^2\right] P\left[N(t)=n\right] - \left(E[X]E[N(t)]\right)^2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} nVar[X]P[N(t)=n] + \sum_{n=0}^{\infty} n^2(E[X])^2]P[N(t)=n] - (E[X]E[N(t)])^2 \\
&= Var[X]E[N(t)] + (E[X])^2E[N(t)^2] - (E[X])^2\left(E[N(t)]\right)^2 \\
&= Var[X]E\left[N(t)\right] + (E[X])^2 Var\left[N(t)\right] \\
&= \lambda tVar[X] + (E[X])^2\lambda t = \lambda t\left[Var[X] + (E[X])^2\right] = \lambda tE[X^2]
\end{aligned}$$

Se S(t) é um processo de Poisson composto homogêneo, então sua função geradora de momentos é dada por:

$$m_{S(t)}(r) = e^{\lambda t(m_X(r)-1)}.$$

Para verificar isso, tem-se que:

$$\begin{aligned}
m_{S(t)}(r) &= E\left[e^{rS(t)}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} E\left[e^{r\sum_{i=1}^{N(t)} X_i} \middle| N(t)=n\right] P\left[N(t)=n\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[e^{r\sum_{i=1}^{n} X_i}\right] P\left[N(t)=n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} E\left[e^{rX_1+rX_2+\ldots+rX_n}\right] P\left[N(t)=n\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[E\left[e^{rX_1}\right] E\left[e^{rX_2}\right] \ldots E\left[e^{rX_n}\right]\right] P\left[N(t)=n\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] P\left[N(t)=n\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\prod_{n}^{i=1} m_{X_i}(r)\right] P\left[N(t)=n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} (m_X(r))^n \left[N(t)=n\right] \\
. &= E\left[(m_X(r))^{N(t)}\right] = E\left[e^{N(t)\log m_X(r)}\right] = m_{N(t)}(\log m_X(r)),
\end{aligned}$$

Utilizando a função geradora de uma variável aleatória que segue um processo de Poisson, obtemos

$$m_{S(t)}(r) = e^{\lambda t(e^{\log m_X(r)}-1)} = e^{\lambda t(m_X(r)-1)}.$$

Com isso, é possível perceber que a função geradora de momentos de $S(t)$ existe se a função geradora de momentos da variável aleatória X existe.

Sabendo a esperança e a variância de $S(t)$ podemos concluir que a variável aleatória $U(t)$ que representa o nível de reserva de uma seguradora no tempo t tem esperança

$$E[U(t)] = E[u+tc-S(t)] = u+tc-E[S(t)] = u+ct-\lambda tE[X] = u+t\left(c-\lambda E[X]\right),$$

e variância

$$Var[U(t)] = Var[u+tc-S(t)] = Var[S(t)] = \lambda tE[X^2].$$

Em relação ao prêmio, existem diversos métodos de cálculo encontrados na literatura. Nesta dissertação, vamos optar pelo princípio do valor esperado que tem como base o valor esperado das indenizações agregadas, $E[S(t)]$. De acordo com este princípio, o prêmio por unidade de tempo será $c = (1+\theta)E[S(t)]$, sendo $\theta > 0$ o *carregamento de segurança*. A aplicação deste coeficiente deve-se, sobretudo, à necessidade de fazer face a desvios anormais de sinistralidade em relação ao seu valor esperado. Uma vez que $S(t), t \geq 0$ é um processo de Poisson composto, como demonstrado, temos $E[S(t)] = \lambda p_1$ e, por sua vez, $c = (1+\theta)\lambda p_1$.

2.3 Probabilidade de Ruína

Uma seguradora entra em situação de ruína quando a quantidade de capital que a instituição tem como reserva é incapaz de pagar aos segurados os valores das indenizações, que foram resultantes de um evento indicado no seu portifólio de contratos. Neste caso a seguradora entra em ruína, mas não necessariamente em falência. Uma das estratégias que uma seguradora tem para se proteger da ruína é tentar reduzir o risco de reserva negativa fazendo um contrato de resseguro. Falaremos melhor sobre resseguro no capítulo 5.

Neste trabalho a probabilidade de ruína é definida como a probabilidade da reserva de uma seguradora ficar negativa em algum instante de tempo, dado o capital inicial $U(0) = u$, isto é, dizemos que a ruína de uma seguradora ocorre quando o processo descrito na equação (2-1), que modela o risco coletivo atinge valores negativos.

Considere $T = \inf\{t > 0 \text{ e } U(t) < 0\}$ é a variável aleatória que representa o instante de ocorrência de ruína para cada $U(0) = u$. Então a *probabilidade da ruína eventual* é definida na literatura da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= P\{T < \infty | U(0) = u\} \\
&= P\{U(t) < 0 \text{ para um determinado valor fixo } t > 0 | U(0) = u\} \\
&= P(u + ct - S(t) < 0 | U(0) = u) = P(S(t) > u + ct | U(0) = u) \\
&= P\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i > u + ct | U(0) = u\right). \qquad (2\text{-}2)
\end{aligned}$$

A probabilidade complementar correspondente é denominada *probabilidade de não ruína eventual* ou *probabilidade de sobrevivência*, definida por:

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}(u) &= 1 - \psi(u) = P\{T = \infty | U(0) = u\} = P\{U(t) \geq 0, \forall t > 0 | U(0) = u\} \\
&= P(u + ct - S(t) \geq 0 | U(0) = u) = P(S(t) \leq u + ct | U(0) = u) \\
&= P\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \leq u + ct | U(0) = u\right). \qquad (2\text{-}3)
\end{aligned}$$

Sendo u o capital inicial para investimento, a probabilidade de ruína eventual de uma seguradora é alta quando os valores de u são baixos.

A figura 2.2 mostra a probabilidade de ruína quando as indenizações particulares tem distribuição exponencial com média 1, para $\lambda = 3$ e $c = 1$, para diferentes valores da reserva inicial.

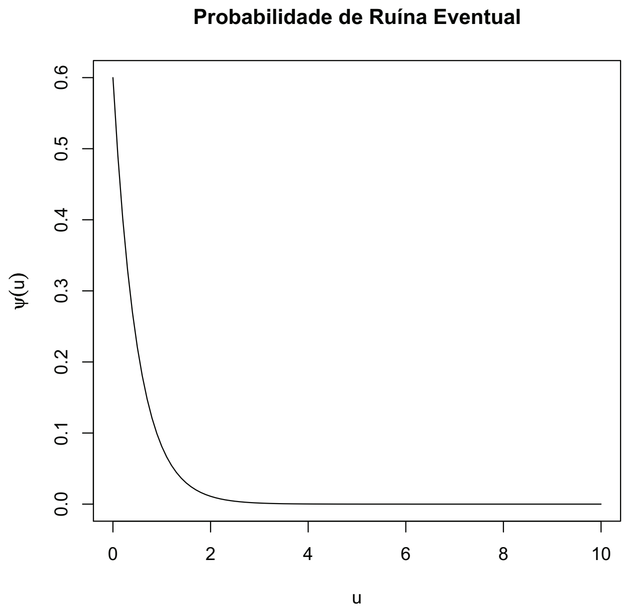

Figura 2.2: *Probabilidade de ruína em função da reserva inicial u.*

Como, por hipótese, $c > \lambda p_1$, então $0 \leq \psi(u) < 1$, caso contrário $\psi(u) = 1$, ou seja, a probabilidade de ruína da seguradora é certa se o valor do prêmio for inferior ao valor de p_1

É importante notar que a probabilidade de sobrevivência, $\overline{\psi}(u)$, é uma função monotônica crescente em u e que $\lim_{u \to \infty} \overline{\psi}(u) = 1$, o que implica que $\lim_{u \to \infty} \psi(u) = 0$ (ver Seah, 1990 [12]). Além disso a probabilidade de ruína eventual em função da reserva inicial u em tempo contínuo com horizonte de tempo finito é denotada por $\psi(u, t)$, que em outras palavras é a probabilidade de ruína eventual anterior a um determinado $t > 0$. Temos também que $\lim_{t \to \infty} \psi(u, t) = \psi(u),\ t > 0$.

Na prática para o modelo (2-1) a probabilidade de ruína $\psi(u, t)$ em um intervalo de tempo específico $(0, t]$ pode ser um indicador útil de segurança para o processo de reserva e pode ser aproximada por simulação. Entretanto, para $\psi(u)$, é possível obter soluções analíticas.